

Lösung zum 12. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

Kapitel 12 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Ableitungsregeln)

a) Berechnen Sie jeweils die 1. Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe der Summenregel:

i) $f_1(x) = 4e^x + 2$, $f_1'(x) = 4e^x$

ii) $f_2(x) = \sin(x) + 2x^{-2} - \frac{1}{x^4}$, $f_2'(x) = \cos(x) - 4x^{-3} + 4x^{-5}$

iii) $f_3(x) = 2\sin(x) - \cos(x) + 2a$, $a \in \mathbb{R}$, $f_3'(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$

b) Berechnen Sie jeweils die 1. Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe der Produktregel:

Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

i) $f_4(x) = (3x + 7x^5) \cdot \cos(x)$

$u = 3x + 7x^5$ $v = \cos(x)$

$u' = 3 + 35x^4$ $v' = -\sin(x)$

Mit Produktregel:

$$f_4'(x) = (3 + 35x^4) \cdot \cos(x) + (3x + 7x^5) \cdot (-\sin(x)) = (3 + 35x^4) \cdot \cos(x) - \sin(x)(3x + 7x^5)$$

ii) $f_5(x) = x^2 \cdot e^x$

$u = x^2$ $v = e^x$

$u' = 2x$ $v' = e^x$

Mit Produktregel:

$$f_5'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^xx(x + 2)$$

c) Berechnen Sie jeweils die 1. Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe der Quotientenregel:

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

i) $f_6(x) = \frac{\cos(x)}{e^x - 1}$

$u = \cos(x)$ $v = e^x - 1$

$u' = -\sin(x)$ $v' = e^x$

Mit Quotientenregel:

$$f_6'(x) = \frac{-\sin(x)(e^x - 1) - \cos(x)e^x}{(e^x - 1)^2}$$

ii) $f_7(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Hinweis: Verwenden Sie den trigonometrischen Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$u = \sin(x)$ $v = \cos(x)$

$u' = \cos(x)$ $v' = -\sin(x)$

Mit der Quotientenregel:

$$f_7'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x)) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \stackrel{\text{tryg. Pyth.}}{=} \frac{1}{\cos^2(x)}$$

d) Berechnen Sie jeweils die 1. Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe der Kettenregel:

Kettenregel: $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

i) $f_8(x) = (3x^7 - 4x)^7$

$$u = x^7 \quad v = 3x^7 - 4x$$

$$u' = 7x^6 \quad v' = 21x^6 - 4$$

Mit Kettenregel:

$$f_8'(x) = 7(3x^7 - 4x)^6 \cdot (21x^6 - 4)$$

ii) $f_9(x) = e^{2x+3}$

$$u = e^x \quad v = 2x + 3$$

$$u' = e^x \quad v' = 2$$

Mit Kettenregel:

$$f_9'(x) = e^{2x+3} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x+3}$$

iii) $f_{10}(x) = \sin(3x^2 + 4x + 5)$

$$u = \sin(x) \quad v = 3x^2 + 4x + 5$$

$$u' = \cos(x) \quad v' = 6x + 4$$

Mit Kettenregel:

$$f_{10}'(x) = \cos(3x^2 + 4x + 5) \cdot (6x + 4)$$

Aufgabe 2 (Ableitungen)

Berechnen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen:

a) $g_1(x) = \ln(x^4 + x^2 + x)$

$$u = \ln(x) \quad v = x^4 + x^2 + x$$

$$u' = \frac{1}{x} \quad v' = 4x^3 + 2x + 1$$

Mit Kettenregel:

$$g_1'(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + x} \cdot (4x^3 + 2x + 1) = \frac{4x^3 + 2x + 1}{x^4 + x^2 + x}$$

b) $g_2(x) = \sin(2x^2) \cdot e^{x^3}$

$$u = \sin(2x^2) \quad v = e^{x^3}$$

$$u' = \cos(2x^2) \cdot 4x \quad v' = e^{x^3} \cdot 3x^2$$

Mit Produktregel:

$$g_2'(x) = \cos(2x^2) \cdot 4x \cdot e^{x^3} + \sin(2x^2) \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2 = e^{x^3} x (4 \cos(2x^2) + 3x \sin(2x^2))$$

c) $g_3(x) = \cos(\sin(-x))$

$$u = \cos(x) \quad v = \sin(-x)$$

$$u' = -\sin(x) \quad v' = \cos(-x) \cdot (-1)$$

Mit Kettenregel:

$$g_3'(x) = -\sin(\sin(-x)) \cdot \cos(-x) \cdot (-1) = \sin(\sin(-x)) \cdot \cos(-x)$$

d) $g_4(x) = e^{\sin(x^2)}$

$$u = e^x \quad v = \sin(x^2)$$

$$u' = e^x \quad v' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Mit Kettenregel liefert:

$$g_4'(x) = e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

e) $g_5(x) = \sqrt[4]{\sin(3x^2 - 5)} = (\sin(3x^2 - 5))^{\frac{1}{4}}$

Idee: $u = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \quad v = \sin(3x^2 - 5)$

$$u' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \quad v' = \cos(3x^2 - 5) \cdot 6x$$

Mit Kettenregel:

$$g_5'(x) = \frac{1}{4} (\sin(3x^2 - 5))^{-\frac{3}{4}} \cdot \cos(3x^2 - 5) \cdot 6x = \frac{6x \cdot \cos(3x^2 - 5)}{4 \cdot \sqrt[4]{(\sin(3x^2 - 5))^3}} = \frac{3x \cdot \cos(3x^2 - 5)}{2 \cdot \sqrt[4]{(\sin(3x^2 - 5))^3}}$$

f) $g_6(x) = \ln \left(\sqrt[3]{\frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}} \right) = \ln \left(\left(\frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}} \right)^{\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{3} (\ln(e^{3x}) - \ln(1 + e^{3x})) = \frac{1}{3} (3x \ln(e) - \ln(1 + e^{3x}))$

$$= x - \frac{1}{3} \ln(1 + e^{3x})$$

$$u = \frac{1}{3} \ln(x) \quad v = 1 + e^{3x}$$

$$u' = \frac{1}{3x} \quad v' = 3e^{3x}$$

Mit Kettenregel:

$$g_6'(x) = 1 - \frac{1}{3(1 + e^{3x})} \cdot 3e^{3x} = 1 - \frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}} = \frac{1 + e^{3x} - e^{3x}}{1 + e^{3x}} = \frac{1}{1 + e^{3x}}$$