

Lösung zum 13. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

Kapitel 13 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Integralrechnung)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Summenregel:

$$\text{i) } \int x^4 + 4x^2 - 16 \, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 16x + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\text{ii) } \int 4 \sin(x) + 8x^3 + e^x \, dx = -4 \cos(x) + 2x^4 + e^x + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\text{iii) } \int x^{-3} + x^{-2} + 2 \, dx = \frac{1}{-2}x^{-2} + \frac{1}{-1}x^{-1} + 2x + c = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + 2x + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der partiellen Integration:

partielle Integration: $\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$

Dabei wird v so gewählt, dass es beim Ableiten "einfacher" wird.

$$\begin{aligned} \text{i) } \int 3x \cdot e^x \, dx &= 3 \cdot \int \underbrace{x}_{=:v} \cdot \underbrace{e^x}_{=:v'} \, dx & u &= e^x & v &= x \\ & & u' &= e^x & v' &= 1 \\ &= 3 \cdot \left([xe^x] - \int 1 \cdot e^x \, dx \right) = [3xe^x - 3e^x] = 3e^x(x-1) + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die eckigen Klammern ersetzen die Integrationskonstanten und ersparen uns das Zusammenfassen zu einer allgemeinen Integrationskonstante am Ende.

$$\begin{aligned} \text{ii) } \int \underbrace{x}_{=:u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=:v} \, dx \\ u &= \frac{1}{2}x^2 & v &= \ln(x) \\ u' &= x & v' &= \frac{1}{x} \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) \right] - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left[\frac{\ln(x)}{2}x^2 \right] - \frac{1}{2} \int x \, dx = \left[\frac{\ln(x)}{2}x^2 \right] - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 \right] \\ &= \frac{1}{4}x^2(2\ln(x) - 1) + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \int \underbrace{x^2}_{=:v} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=:u'} \, dx \\ u &= \sin(x) & v &= x^2 \\ u' &= \cos(x) & v' &= 2x \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} [x^2 \sin(x)] - \int 2x \sin(x) \, dx = [x^2 \sin(x)] - 2 \int x \sin(x) \, dx \\ u &= -\cos(x) & v &= x^2 \\ u' &= \sin(x) & v' &= 2x \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} [x^2 \sin(x) - 2] \left([-\cos(x)x] - \int -\cos(x) \cdot 1 \, dx \right) = [x^2 \sin(x)] + [2 \cos(x)x - 2 \sin(x)] \\ &= \sin(x)(x^2 - 2) + 2 \cos(x) \cdot x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

Substitution: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int f(t) \, dt$

i) $\int \frac{1}{(3x+2)^2} \, dx$

Subst.: $t := 3x + 2 = \varphi(x); \quad \varphi'(x) = 3 = \frac{dt}{dx} \iff dx = \frac{dt}{3}$

$$\int \frac{1}{(3x+2)^2} \, dx \stackrel{\text{Subst.}}{=} \int \frac{1}{t^2} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int t^{-2} \, dt = \frac{1}{3} [-t^{-1}] = \left[-\frac{1}{3t}\right] \stackrel{\text{Rücksubst.}}{=} \left[-\frac{1}{3(3x+2)}\right] + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ii) $\int (x^2 + 7)^8 \cdot x \, dx$

Subst.: $t := x^2 + 7 = \varphi(x), \quad \varphi'(x) = 2x = \frac{dt}{dx} \iff dx = \frac{dt}{2x}$

$$\int (x^2 + 7)^8 \cdot x \, dx \stackrel{\text{Subst.}}{=} \int t^8 \cdot x \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int t^8 \, dt = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} t^9\right] = \left[\frac{1}{18} t^9\right] \stackrel{\text{Rücksubst.}}{=} \frac{1}{18} (x^2 + 7)^9 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

iii) $\int \cos^5(x) \cdot \sin(x) \, dx$

Subst.: $t = \cos(x) = \varphi(x); \quad \varphi'(x) = -\sin(x) = \frac{dt}{dx} \iff dx = \frac{dt}{-\sin(x)}$

$$\int \cos^5(x) \cdot \sin(x) \, dx \stackrel{\text{Subst.}}{=} \int t^5 \cdot \sin(x) \frac{dt}{-\sin(x)} = - \int t^5 \, dt = - \left[\frac{1}{6} t^6\right] \stackrel{\text{Rücksubst.}}{=} -\frac{1}{6} \cos^6(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2 (Integrale)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int \underbrace{x^2}_{=:u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=:v} \, dx$

$$u = \frac{1}{3}x^3 \quad v = \ln(x)$$

$$u' = x^2 \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \left[\frac{1}{3} \ln(x) \cdot x^3\right] - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left[\frac{1}{3} \ln(x) \cdot x^3\right] - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3} \ln(x) \cdot x^3\right] - \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3\right] \\ &= \left[\frac{1}{3} \ln(x) \cdot x^3\right] - \left[\frac{1}{9} x^3\right] = \frac{1}{9} x^3 (3 \cdot \ln(x) - 1) + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) $\int \frac{2x}{\sqrt{5x^2+4}} \, dx$

Subst.: $t := 5x^2 + 4 = \varphi(x); \quad \varphi'(x) = 10x = \frac{dt}{dx} \iff dx = \frac{dt}{10x}$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{5x^2+4}} \, dx = 2 \cdot \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{10x} = \frac{2}{10} \int t^{-\frac{1}{2}} \, dt = \frac{2}{10} \cdot \left[\frac{1}{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{5} \cdot \left[2t^{\frac{1}{2}}\right] \stackrel{\text{Rücksubst.}}{=} \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5x^2+4} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

c) $\int \frac{2}{3x-5} \, dx = 2 \int \frac{1}{3x-5} \, dx \stackrel{\text{Hinweis}}{=} \left[2 \cdot \ln|3x-5| \cdot \frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3} \cdot |3x-5| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

d) $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx = - \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \, dx \stackrel{\text{Hinweis}}{=} -\ln|\cos(x)| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

e) $\int \frac{\ln(x)}{x} \, dx$

Subst.: $t := \ln(x) = \varphi(x); \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \iff dx = \frac{dt}{\frac{1}{x}} = x \, dx$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} \, dx = \int \ln(x) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \int t \cdot \frac{1}{x} \cdot x \, dt = \int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} = \frac{1}{2} \ln^2(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{f) } \int \sin^2(x) \, dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{=:u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=:v} \, dx \quad \begin{array}{ll} u = -\cos(x) & v = \sin(x) \\ u' = \sin(x) & v' = \cos(x) \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{P.I.}}{=} [-\sin(x) \cos(x)] - \int -\cos(x) \cdot \cos(x) \, dx = [-\sin(x) \cdot \cos(x)] + \int \cos^2(x) \, dx \\ &\stackrel{\text{trig. Pyth.}}{=} [-\sin(x) \cdot \cos(x)] + \int 1 - \sin^2(x) \, dx = [-\sin(x) \cdot \cos(x)] + \int 1 \, dx - \int \sin^2(x) \, dx \\ &= [-\sin(x) \cdot \cos(x)] + [x] - \int \sin^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Es bleibt das gleiche Integral wie zu Beginn. Wir bringen dieses durch eine Äquivalenzumformung auf die andere Seite:

$$\Leftrightarrow 2 \int \sin^2(x) \, dx = [-\sin(x) \cdot \cos(x) + x] \Leftrightarrow \int \sin^2(x) \, dx = \frac{-\sin(x) \cdot \cos(x) + x}{2} + c, \, c \in \mathbb{R}$$