

Lösung zum 14. Übungsblatt

Anlaufstelle bei Fragen:

hmorga@math.tu-dortmund.de

Voraussetzungen:

Kapitel 14 - Vorkurs für Ingenieure

Aufgabe 1 (Matrizen)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ besitzt m Zeilen und n Spalten. Kann man sich auch gut merken mit
Zuerst Zeilen und Später Spalten.

Zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{a \times b}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lassen sich miteinander multiplizieren, wenn A genau so viele Spalten wie B Zeilen besitzt. Also wenn $b = m$ gilt.

Berechnen Sie die folgenden Matrizenmultiplikationen, sofern sie möglich sind:

a) $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Da die Dimensionen der Matrizen nicht passen, ist die Multiplikation $A \cdot B$ nicht möglich.

c) $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $C \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

$$\begin{aligned} A \cdot C &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) \\ 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ -4 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) $C \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\begin{aligned} C \cdot B &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & -3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 - 4 \cdot 1 & 1 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Trigonometrische Funktionen)

a) Lesen Sie die folgenden Werte für Cosinus und Sinus anhand eines selbst skizzierten Einheitskreises ab:

i) $\cos(0) = 1$

ii) $\sin(\pi)$

Eine volle Umdrehung im Einheitskreis entsprechen 2π .

Somit entspricht π einer halben Umdrehung: $\sin(\pi) = 0$

$$\text{iii) } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{iv) } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\substack{\text{Sinus} \\ \text{ungerade}}}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Alternativ gehen wir auf dem Einheitskreis im Uhrzeigersinn, weil $-\frac{\pi}{2} < 0$ ist.

b) Zeigen sie die folgende Gleichheit:

$$\text{Hinweis: } \cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\text{Zu zeigen: } \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \cdot 0 + \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

Aufgabe 3 (Zusatzaufgabe)

a) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{\frac{a^2}{2a} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \cdot (a^2 - 1)} : \left(\frac{(a-1)^3}{a^2 + 1 - 2a}\right)^{-1} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (a+1)}{\frac{1}{4} \cdot (a+1)(a-1)} : \left(\frac{(a-1)^3}{(a-1)^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \cdot (a-1)} : \left(\frac{(a-1)}{1}\right)^{-1} = \frac{2}{a-1} : \frac{1}{a-1} = \frac{2}{a-1} \cdot (a-1) = 2 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \frac{\frac{\pi}{(\pi-3)^2} \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{8}\right)}{\cos(11\pi) \cdot \frac{2}{\pi^2 - 6\pi + 9}} = \frac{\frac{\pi}{(\pi-3)^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(10\pi + \pi) \cdot \frac{2}{(\pi-3)^2}} = \frac{\frac{\pi}{(\pi-3)^2} \cdot 1}{(-1) \cdot \frac{2}{(\pi-3)^2}} = -\frac{\pi \cdot (\pi-3)^2}{2 \cdot (\pi-3)^2} = -\frac{\pi}{2}$$

b) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich und bestimmen Sie Real- sowie Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \text{i) } z &= \frac{(a+3)i}{2-2i} \cdot i + \frac{7}{4} \cdot (i+1) = \frac{(-a-3)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} + \frac{7}{4} \cdot (i+1) = \frac{-2a-2ai-6-6i}{8} + \frac{7}{4} \cdot (i+1) \\ &= \frac{-2a-6}{8} + \frac{-2a-6}{8} \cdot i + \frac{7}{4}i + \frac{7}{4} = -\frac{1}{4}a - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}ai - \frac{3}{4}i + \frac{7}{4}i + \frac{7}{4} = -\frac{a}{4} + 1 - \frac{1}{4}ai + i \\ &= \underbrace{-\frac{a}{4} + 1}_{=\text{Re}(z)} + \underbrace{\left(-\frac{a}{4} + 1\right) \cdot i}_{=\text{Im}(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{4-3i \cdot (4+3i)^{-2} \cdot (50+i)}{9+i^6-6i} &= \frac{(4+3i) \cdot (50+i)}{(9-1-6i)(4+3i)^2} = \frac{50+i}{(8-6i)(4+3i)} = \frac{50+i}{32+24i-24i-18i^2} \\ &= \frac{50+i}{50} = \underbrace{\frac{1}{1}}_{=\text{Re}(z)} + \underbrace{\frac{1}{50}}_{=\text{Im}(z)} \cdot i \end{aligned}$$