

Def 10.7

Idee dazu: Hätte man bereits beliebige Potenzen mit den bekannten Potenzrechengesetzen, dann wäre:

$$e^{b \ln a} = (e^{\ln a})^b = a^b$$

Bsp: $2^{\sqrt{3}} = \exp(\sqrt{3} \cdot \ln 2) \approx 3.322$

Für $x > 0$: $x^x = \exp(x \cdot \ln x)$

Ableitung: $(x^x)' = (\exp(x \cdot \ln x))' = \exp'(x \ln x) \cdot (x \ln x)'$
 $= \exp(x \ln x) (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x (\ln x + 1)$

Für $a = e$ folgt dann:

$$e^x = \exp(x \underbrace{\ln(e)}_{=1}) = \exp(x)$$

Rechenregeln:

4. Für $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^b$ gilt

$$f'(x) = (x^b)' = (\exp(b \ln x))' = \exp'(b \ln x) \cdot (b \ln x)'$$
$$= \exp(b \ln x) \cdot b \cdot \frac{1}{x} = x^b \cdot \frac{b}{x} = b x^{b-1}$$

zu 10.8

2. 1. Fall $x > 0$: wegen $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ gilt $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \stackrel{x > 0}{=} \ln |x| + C$

2. Fall $x < 0$: Dann gilt

$$\int \frac{1}{x} dx = - \int \frac{1}{(-x)} dx = \ln(-x) + C \stackrel{x < 0}{=} \ln |x| + C$$

Probe: $(\ln(-x))' \stackrel{x < 0}{=} \left(\frac{1}{(-x)}\right)' \cdot (-1) = \frac{1}{x} \checkmark$

Bsp $\int \frac{3x^2}{x^3+5} dx$ $\begin{matrix} f(x)=x^3+5 \\ f'(x)=3x^2 \end{matrix}$ $\ln |x^3+5| + C$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \begin{matrix} f(x)=\cos(x) \\ f'(x)=-\sin(x) \end{matrix} \quad - \int \frac{\overbrace{-\sin x}^{f'(x)}}{\overbrace{\cos x}^{f(x)}} dx = -\ln |\cos x| + C$$

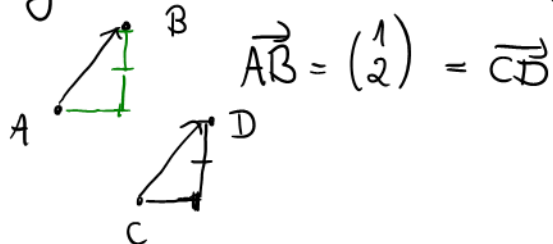
Kapitel 11 Vektoren

Bsp zu 11.2

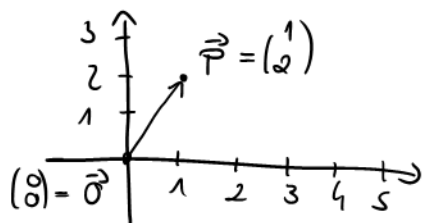
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vektor als:

- gerichtete Strecke zwischen zwei Punkten



- Punkte im Raum



Bsp zu 11.4

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ist eine Linearkombination von } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ mit } \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1$$

Allgemein: Ein Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ist eine Linearkombination von Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ genau dann, wenn das GLS $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{x}$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (n Unbekannte) lösbar ist.

Bsp unter 11.4: Das GLS

$$\alpha_1 \cdot 1 + 0 \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 6$$

$$\alpha_1 \cdot 1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0 \alpha_3 = 4$$

$$0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 2$$

ist lösbar (mit $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 2$)

zu 11.5

Bsp: Die Vektoren

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, da

$$\underbrace{2}_{\alpha_1} \cdot \vec{v}_1 + \underbrace{1}_{\alpha_2} \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

und α_1, α_2 sind nicht beide $= 0$.

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, da

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = 0 \text{ und } \alpha_2 = 0 \text{ und } \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$