

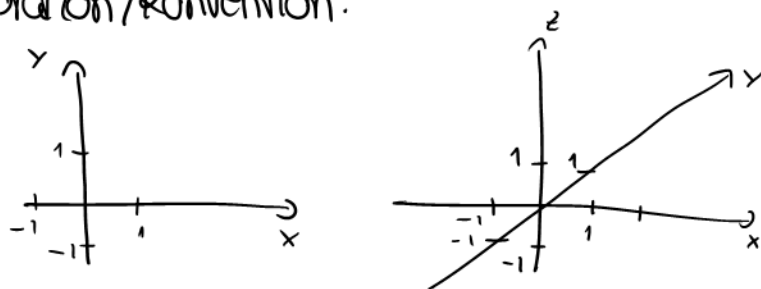
Wachmacher - Aufgabe 10:

Finde $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{x+2}$

Lösung:

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{x+2} \quad (\Leftrightarrow) \quad -\frac{1}{2} = \frac{1}{x+2} \quad (\Leftrightarrow) \quad -\frac{1}{2}(x+2) = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad -\frac{1}{2}x - 1 = 1 \\ (\Leftrightarrow) \quad -\frac{1}{2}x = 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = 2 \cdot (-2) = -4.$$

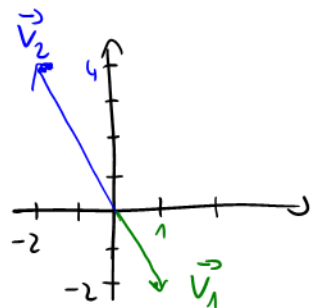
Notation / Konvention:



Es gibt auch andere Möglichkeiten für Koordinatensysteme.

Geben: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig

Beobachtung: $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sind Vielfache voneinander



Bsp: Die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn:

$$\underbrace{0}_{\alpha_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + \underbrace{a}_{\alpha_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für jedes } a \in \mathbb{R}, \text{ also insbesondere } a = 5 \neq 0$$

Bem: $\text{spann von } \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k = \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \left\{ \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$

Bsp: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathbb{R}^2$, denn

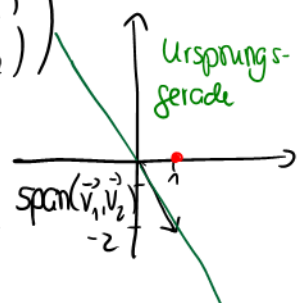
$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Bem: $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Bsp: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$, denn
Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (\alpha_1 - 2\alpha_2) \\ -2(\alpha_1 - 2\alpha_2) \end{pmatrix} \\ = \underbrace{(\alpha_1 - 2\alpha_2)}_{=: \alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Bem: $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ bilden keine Basis, da z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht im $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ liegt.



zu 3. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind zwar linear unabhängig, bilden aber keine Basis des $\mathbb{R}^3$, da sich z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ darstellen lässt, denn:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{v} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 = -1$$

$$0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 = -1$$

$$1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = -1$$

$$\alpha_2 = -1$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{da } \underbrace{-1}_{\alpha_1} + \underbrace{(-1)}_{\alpha_2} = -2 \neq 1$$

zu 4: $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$. Dann gilt:

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n$$

Kapitel 12

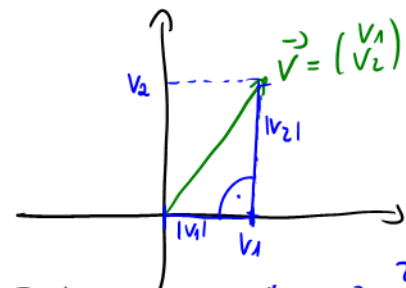
Bsp zu 12.1

$$1. \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 6 - 1 = 5$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

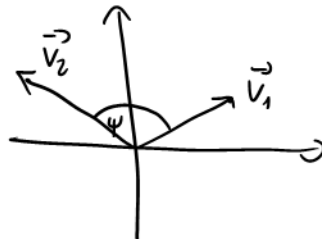
$$2. \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$



Pythagoras: $(\text{Länge}(\vec{v}))^2 = v_1^2 + v_2^2$

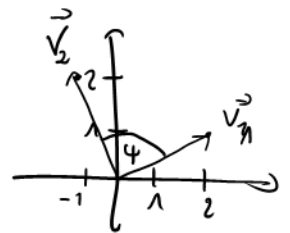
3.



$$\text{Bsp: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \psi = 0 \xrightarrow{\psi \in [0, \pi]} \psi = \frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$$

Allgemein: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow \cos \psi = 0 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$



$$\text{Bsp: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = -5$$

$$\Rightarrow \cos \psi = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-5}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \psi = \frac{3\pi}{4} \hat{=} 135^\circ$$

zu 12.2

$$4. \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (-b) \cdot a + ab = 0 \quad \text{Bsp: zu } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ steht } \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ senkrecht.}$$

Allgemein: Alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ stehen senkrecht auf $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Bsp: $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{v}$

Senkrecht dazu sind
alle Vektoren in einer
passenden Ebene.

