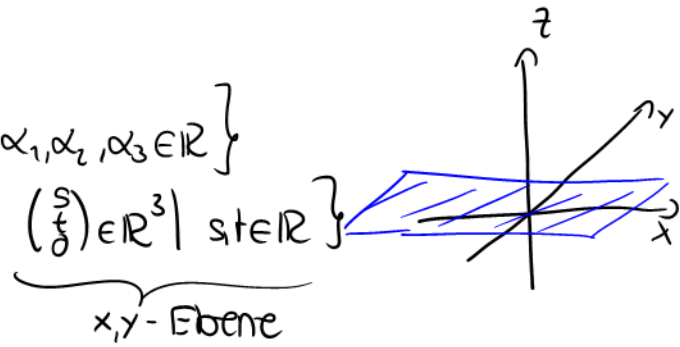


Wachmacher - Aufgabe 11

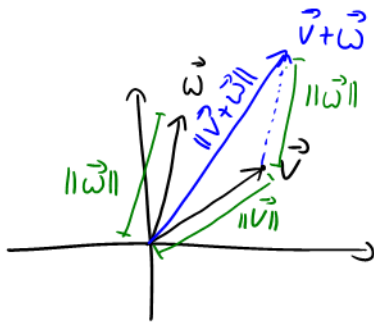
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$



zu 12.3

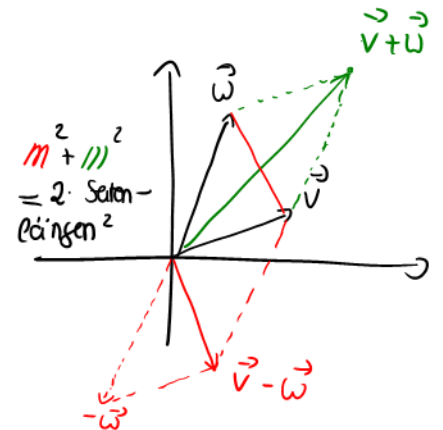


zu 12.4

Rechnerisch:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$



Bsp zu 12.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

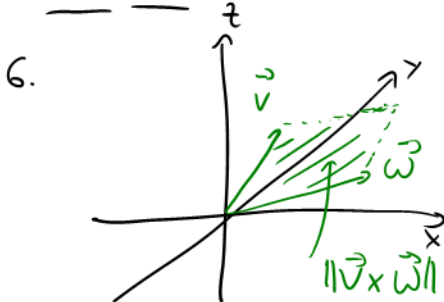
$\vec{v}$ $\vec{w}$

Beobachtung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

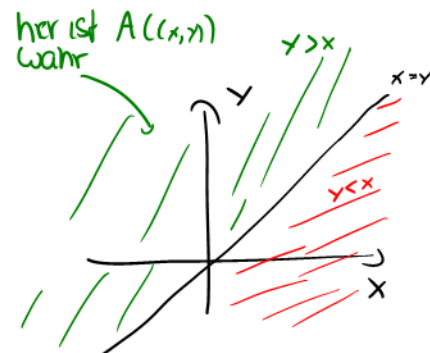
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -12 + 30 - 18 = 0$$

Satz 12.6



13 Aussageformen

13.1: $G = \mathbb{R}^2$, $A((x,y))$ sei die Aussage $x < y$
 $A(1,2)$ ist wahr, $A(2,1)$ ist falsch



Bsp zu 13.2

$G = \mathbb{R}$, $A(x)$ die Aussage $x^2 = 4$. Dann ist

$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 = 4$ ist falsch (denn z.B. für $x=3$ gilt $x^2 = 9 \neq 4$)

$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 4$ ist wahr (denn z.B. für $x=2$ gilt $x^2 = 4$)

• $G = \mathbb{R}$, $A(x)$ die Aussage $x < x+1$. Dann gilt

$\forall x \in \mathbb{R}: x < x+1$ ist wahr, denn $x < x+1 \Leftrightarrow 0 < 1$ ist wahr

$\exists x \in \mathbb{R}: x < x+1$ ist wahr, denn z.B. für $x=1$ gilt $1 < \underbrace{1+1}_{=2}$

zu 13.3

- $x^2 = 4$ ist für $x \in \mathbb{R}$ erfüllbar, aber nicht allgemeingültig
- $x < x+1$ ist für $x \in \mathbb{R}$ allgemeingültig und automatisch auch erfüllbar
- $x = x+1$ ist für $x \in \mathbb{R}$ ist nicht erfüllbar und automatisch auch nicht allgemeingültig.

Bsp: $G = \mathbb{R}$, $A(x) \hat{=} (x^2 > 4 \Rightarrow x > 2)$ ist

- erfüllbar, denn z.B. für $x=3$ gilt $(\underbrace{3^2}_9 > 4 \Rightarrow 3 > 2)$ ist wahr
- nicht allgemeingültig, denn für $x=-3$ gilt $(\underbrace{(-3)^2}_9 > 4 \Rightarrow -3 > 2)$ ist falsch

Sprechweisen:

4. $\exists! x \in \mathbb{N}: x^2 = 4$ ist wahr

Bsp zu 13.4

$\exists x \in \mathbb{Z}: x > 2 \wedge x \leq 4$ ist wahr (z.B. $x=3$ erfüllt $3 > 2 \wedge 3 \leq 4$)

$\neg (\exists x \in \mathbb{Z}: x > 2 \wedge x \leq 4) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}: \neg (x > 2 \wedge x \leq 4)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}: (x \leq 2 \vee x > 4)$ ist falsch