

• $\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: n > x$ gilt

• $\forall n \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{R}: n > x$ gilt

$\exists x \in \mathbb{R}$

Bsp: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 2|x| - 1$

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

1. Fall: Für $x \geq 0$ gilt $|x| = x$. Dann gilt

$$x^2 \geq 2|x| - 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ gilt da Quadrate nichtnegativ sind.

2. Fall: Für $x < 0$ gilt $|x| = -x$. Dann gilt

$$x^2 \geq 2|x| - 1 \Leftrightarrow x^2 \geq -2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0 \quad \text{---} \quad \forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$$

Vorlesung 5

$$\neg (\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}: n > x)$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \neg (\forall x \in \mathbb{R}: n > x)$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{R}: \neg (n > x)$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{R}: n \leq x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} (\forall y \in \mathbb{R}: x + y = y + x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}: x + y = y + x$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}: x + y = y + x$$

Angenommen $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 7n$ ungerade
Widerlegung durch Beweis der Negation

$$\neg (\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 7n \text{ ungerade})$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 7n \text{ gerade}$$

Bew.: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$\text{1. Fall: } n \text{ gerade} \Rightarrow n^2 + 7n = \underbrace{n}_{\text{gerade}} \cdot \underbrace{(n+7)}_{\text{ungerade}}$$

$$\text{2. Fall: } n \text{ ungerade} \Rightarrow n^2 + 7n = \underbrace{n}_{\text{ungerade}} \cdot \underbrace{(n+7)}_{\text{gerade}}$$
$$\text{gerade}$$

Dg. n ist gerade.

Beh.: Die Menge der Primzahlen ist unendlich
Bew.: Angenommen die Menge sei endlich.

$$P = \{p_1, \dots, p_r\}, r \in \mathbb{N}_0$$

$$n := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1 \quad \text{prim}$$

$$n > p_k \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \Rightarrow n \notin P \wedge n \in P \quad \text{⚡}$$

$\Rightarrow$ Die Menge der Primzahlen ist unendlich.

$$\text{Beh: } \forall a, b \in \mathbb{R} : \underbrace{a \neq b}_A \Rightarrow \underbrace{\frac{a+b}{2} \neq a}_B$$

$$(\neg B \Rightarrow \neg A)$$

$$\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} : \frac{a+b}{2} = a \Rightarrow a = b$$

$$\frac{a+b}{2} = a \quad | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow a+b = 2a \quad | -a \quad \Leftrightarrow b = a$$

$$\Leftrightarrow a = b \quad \square$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}_0 : x^2 \geq n$$

Bew.: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $n = 0$

Dann gilt $n = 0 \in \mathbb{N}_0$ und $x^2 \geq 0 = n$. ✓

$$\forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{10 \text{ teilt } n}_A \Rightarrow \underbrace{5 \text{ teilt } n}_B$$

$$\text{indirekt: } [\neg B \Rightarrow \neg A] \Leftrightarrow [5 \text{ nicht } n \text{ teilt} \Rightarrow 10 \text{ nicht } n \text{ teilt}]$$

$$\text{Widerspruch: } \neg(\neg B \wedge A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(5 \text{ nicht } n \text{ teilt und } 10 \text{ } n \text{ teilt})$$

$$\Leftrightarrow 5 \text{ teilt } n \text{ oder } 10 \text{ teilt } n \text{ nicht.}$$

$$2. \underbrace{p \text{ Prim und } p > 2}_A \Rightarrow \underbrace{p \text{ ungerade}}_B$$

$$\text{indirekt: } [\neg B \Rightarrow \neg A]$$

$$\Leftrightarrow [p \text{ gerade} \Rightarrow p \text{ nicht prim oder } p \leq 2]$$

$$3. \underbrace{a^2 = 2}_A \Rightarrow \underbrace{a \notin \mathbb{Q}}_B$$

$$\neg(\neg B \wedge A) \Leftrightarrow \neg(a \in \mathbb{Q} \wedge a^2 = 2)$$

$$\Leftrightarrow a \notin \mathbb{Q} \vee a^2 \neq 2$$