

Wachmacher-Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Was gilt für $\sum_{k=0}^n 1^k$?

Lsg:

Vorbereitung:

$$n=0: \sum_{k=0}^0 1^k = 1^0 = 1 = \overset{n}{0} + 1$$

$$n=1: \sum_{k=0}^1 1^k = 1^0 + 1^1 = 1 + 1 = 2$$

$$\text{Allgemein: } \sum_{k=0}^n 1^k = \underbrace{1^0 + 1^1 + \dots + 1^n}_{(n+1) \text{ Summanden}} = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(n+1) \text{ Summanden}} = (n+1) \cdot 1 = n+1$$

Bsp Rechenregeln

$$4 \cdot \left(\sum_{k=1}^2 k^2 \right) = 4 \cdot (1^2 + 2^2) = 4(\overset{=5}{1+4}) = 20$$

$$\sum_{k=1}^2 (4k^2) = 4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 = 4 + 16 = 20$$

$$\sum_{k=1}^2 k^2 + \sum_{k=1}^2 (2k) = \sum_{k=1}^2 (k^2 + 2k)$$

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=1}^{4=n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \sum_{k=1+2}^{4+2=t} (k-2)^2$$

Anwendung: $\sum_{k=2}^5 k + \sum_{k=3}^6 k^2 \xrightarrow[\text{mit } t=1]{\substack{\text{Index-} \\ \text{verschiebung} \\ \text{1. Summe}}} \sum_{k=3}^6 (k-1) + \sum_{k=3}^6 k^2 = \sum_{k=3}^6 ((k-1) + k^2)$

Alternativ: $\sum_{k=2}^5 k + \sum_{k=3}^6 k^2 \xrightarrow[\text{2. Summe}]{t:=1 \text{ in}} \sum_{k=2}^5 k + \sum_{k=2}^5 (k+1)^2 = \sum_{k=2}^5 (k + (k+1)^2)$

Arithm. Summenformel

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \quad \text{Bsp: } \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot (101)}{2} = 5050$$

Idee zum Beweis:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ \oplus \quad n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ \hline (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ - mal}} = n \cdot (n+1) \end{array}$$

Geom. Summenformel:

$$\sum_{k=0}^n q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n$$

$$\text{Bsp: } \sum_{k=0}^5 2^k = \frac{1-2^6}{1-2} = \frac{2^6-1}{2-1} = \underline{\underline{2^6-1}} = 31$$

zu 3.7: $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} \stackrel{5 \geq 0}{=} 5$
 $\sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} \stackrel{-5 < 0}{=} -(-5) = 5$

zu 3.10 $8^{\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$
 $16^{-\frac{3}{4}} = (16^{\frac{1}{4}})^{-3} = (\sqrt[4]{16})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

zu 3.12: Quadratische Ergänzung

$$x^2 + px + q = 0 \quad | + (\frac{p}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 + q = (\frac{p}{2})^2 \quad | - q$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q = \frac{p^2}{4} - q = \frac{p^2 - 4q}{4} = \frac{D}{4}$$

$$\stackrel{D \geq 0}{\Leftrightarrow} x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$$

Binomische Formel:

$$(x + \frac{p}{2})^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + (\frac{p}{2})^2$$

$$= x^2 + px + (\frac{p}{2})^2$$

zu 3.13

Bsp: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Allgemein: $n!$ ist die Anzahl an Mgl. n Gegenstände anzuordnen

Bsp $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{20}{2} = 10$

Allgemein $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl an Mgl., aus n Elementen k Elemente auszuwählen (ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge, Schwarzlotto ($\frac{49}{6}$))

zu 3.15

Spezialfall $n=2$

$$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} x^k y^{2-k} = \binom{2}{0} x^0 y^{2-0} + \binom{2}{1} x^1 y^{2-1} + \binom{2}{2} x^2 y^{2-2}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y + 1 \cdot x^2 \cdot y^0 = y^2 + 2xy + x^2$$

$$(x+y)^3 = y^3 + 3y^2x + 3yx^2 + x^3$$

Bsp zu 4.3

$$x < y \Rightarrow x+3 < y+3$$

$$x < y \Rightarrow 4x < 4y$$

Bsp zu 4.4

$$2 < 4, \text{ aber } \overbrace{(-6) \cdot 2}^{-12} > \overbrace{(-6) \cdot 4}^{-24}$$