

Wachmacher - Aufgabe 4

Für welche $p, q \in \mathbb{R}$ sind $x_1=2, x_2=4$ Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$?

Lösung:

1. Mgl.: Es muss gelten: $x^2 + px + q$ $\begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=4 \\ \text{sind Null-} \\ \text{stellen} \end{matrix}$ $(x-2)(x-4) = x^2 - 4x - 2x + 8$
 $= x^2 - \underbrace{6x}_{\tilde{p}} + \underbrace{8}_{\tilde{q}}$

2. Mgl.: Einsetzen von $x_1=2$ und $x_2=4$:

$$2^2 + p \cdot 2 + q = 0 \Leftrightarrow 2p + q = -4 \quad \text{I}$$

$$4^2 + p \cdot 4 + q = 0 \Leftrightarrow 4p + q = -16 \quad \text{II}$$

$$\text{I} - \text{II}: \quad 2p + q - (4p + q) = -4 - (-16)$$
$$\Leftrightarrow -2p = 12 \Leftrightarrow p = -6$$

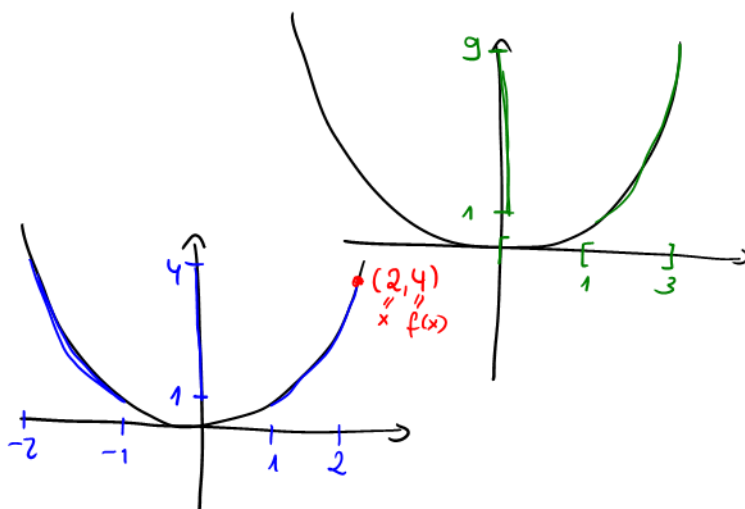
Einsetzen von $p = -6$ in I: $\underbrace{2 \cdot (-6)}_{=-12} + q = -4 \Leftrightarrow q = -4 + 12 = 8$

zu 5.3

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

Bsp: $f([1, 3]) = [1, 9]$

$$\begin{matrix} =: u \\ f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2] \end{matrix}$$

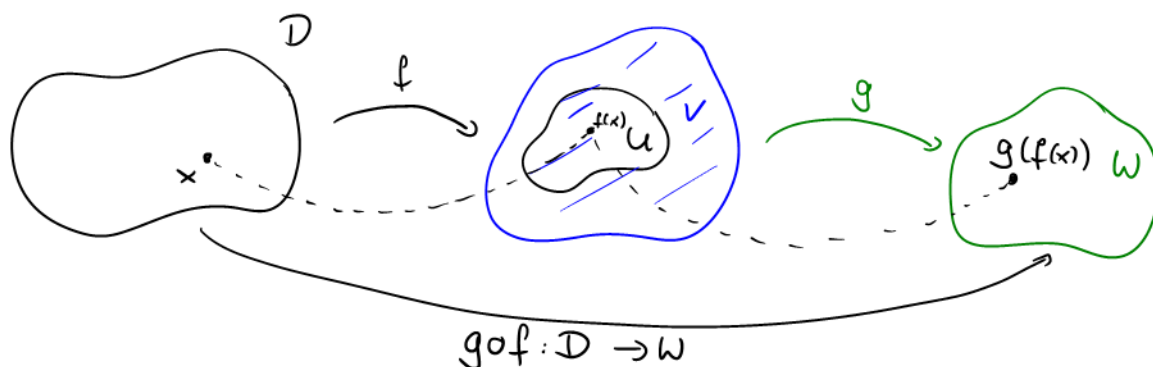


Bsp zu 5.3. 1.

$$S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad n \mapsto n+1$$

$$S(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^{\geq 2} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

zu 5.4



Bsp zu 5.4

• $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^2$
 $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \sqrt{y}$

Dann gilt:

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$f \circ g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

• $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
 $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \sqrt{y}$

Dann gilt: $g \circ f$ kann nicht gebildet werden, da $\mathbb{R} \not\subseteq [0, \infty)$

$f \circ g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g)(y) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^3 = y^{\frac{3}{2}}$

Wertebereich von f Definitionsbereich von g

Bsp zu 5.5

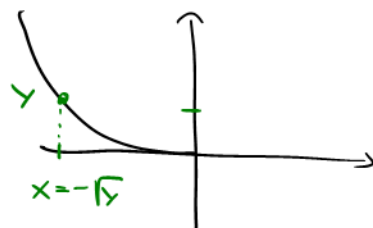
$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^2$

$g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), y \mapsto \sqrt{y}$

Dann gilt $f \circ g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), (f \circ g)(y) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y = \text{id}_{[0, \infty)}(y)$
 $g \circ f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), (g \circ f)(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| \stackrel{x \geq 0}{=} x = \text{id}_{[0, \infty)}(x)$
 $\Rightarrow g$ ist die Umkehrfunktion von f , also $g = f^{-1}$

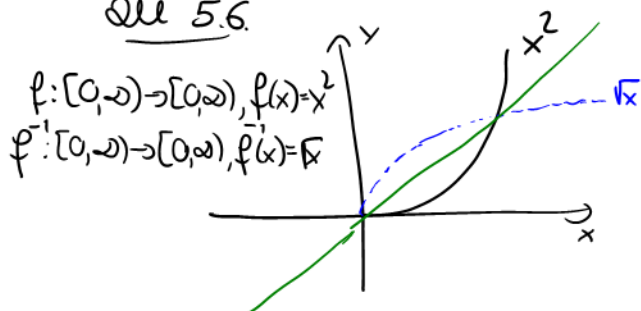
Bsp zu 5.5

• $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^2$
 $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0], y \mapsto -\sqrt{y}$



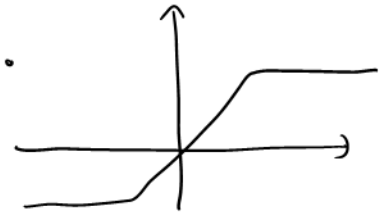
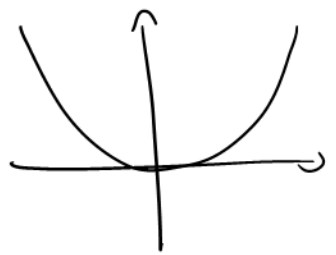
• $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^2$ besitzt keine Umkehrabbildung, da für $4 = y$ die Gleichung $x^2 = 4$ zwei Lösungen, $x_1 = 2, x_2 = -2$ hat.

zu 5.6



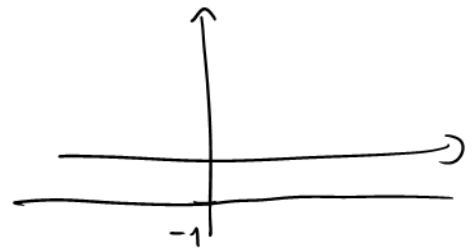
Bsp zu 5.7

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist weder mon. fallend noch wachsend
- $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist streng mon. wachsend
- $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ " " " fallend



mon. wachsend,
aber nicht streng monoton

- Die Fkt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -1$ ist mon. wachsend und mon. fallend, da für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt:
 $-1 = f(a) = f(b)$



Bsp zu 5.8

$$p(x) = -3x^4 - 6x + 36$$

$$\text{grad}(p) = 4, a_4 = -3, \text{ und } a_0 = 36, a_1 = -6, a_2 = a_3 = 0$$

$x_0 = -2$ ist Nullstelle von p .

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (-3x^4 - 6x + 36) : (x - (-2)) = \underbrace{-3x^3 + 6x^2 - 12x + 18}_{q(x)} \\ \ominus \quad -3x^4 - 6x^3 \\ \hline \quad 6x^3 \\ \ominus \quad 6x^3 + 12x^2 \\ \hline \quad \quad -12x^2 - 6x \\ \ominus \quad -12x^2 - 24x \\ \hline \quad \quad \quad 18x + 36 \\ \ominus \quad 18x + 36 \\ \hline \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$