Wachmacher-Aufgabe 6

$(2^x)^y = 4$ und $2^{-x} = 64 \Rightarrow x = ?, y = ?$

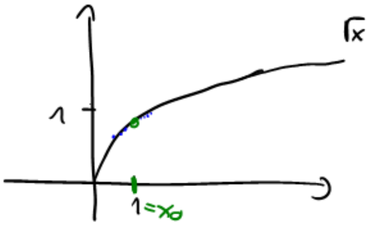
Lsg:

$$2^{-x} = \underbrace{64}_{2^6} = 2^6 \Rightarrow -x = 6 \Rightarrow x = -6.$$

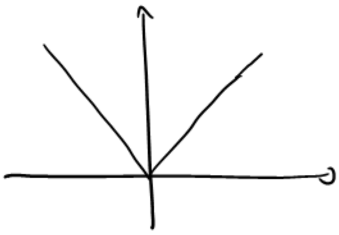
$$(2^x)^y = 4 \Leftrightarrow 2^{x\cdot y} = 2^2 \Rightarrow x\cdot y = 2 \overset{x=-6}{\Rightarrow} (-6)\cdot y = 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

zu 7.1

$f: [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$



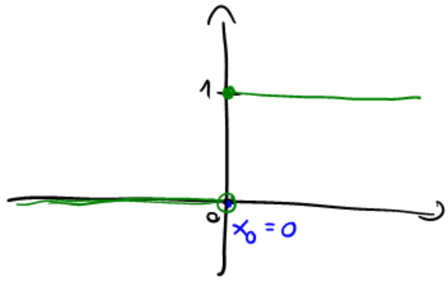

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = a = f(1)$, also ist $f$ in $x_0 = 1$ stetig



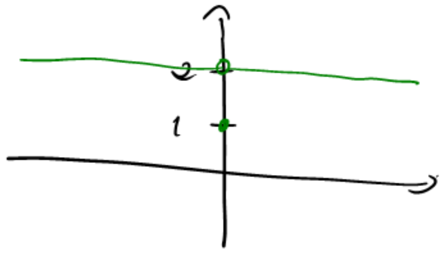
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$ ist stetig

Heaviside-Funktion

$\lim\limits_{x\to 0} H(x)$ existiert nicht! Insbesondere ist $H$ in $x_0 = 0$ nicht stetig



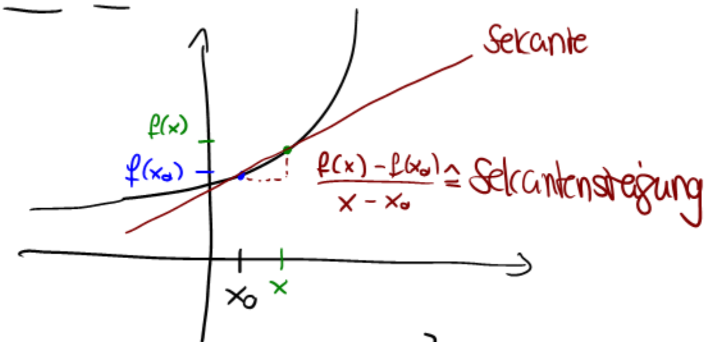

Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$



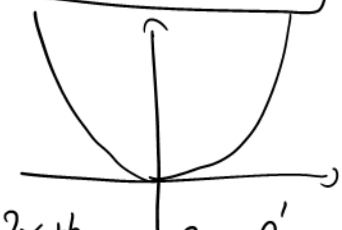

Dann gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2 \neq 1 = f(0)$

$\Rightarrow f$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig.

zu 7.2




$\boxed{\text{Damit: } f'(x_0) \hat{=} \text{ Steigung der Tangente an } f \text{ in } x_0}$



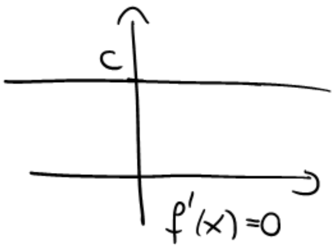
Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Dann ist

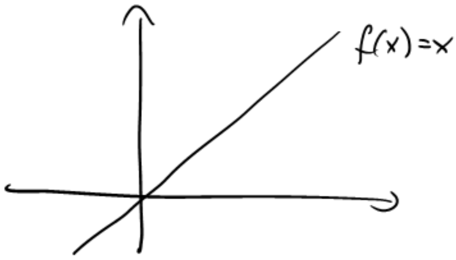
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0 \cancel{h} + h^{\cancel{2}} - \cancel{x_0^2}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0 + h}{1} = 2x_0 = f'(x_0)$$

zu 7.3

$$f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}}\cdot x \underbrace{- f'(x_0)x_0 + f(x_0)}_{\text{y-Achsen-Abschnitt}}$$

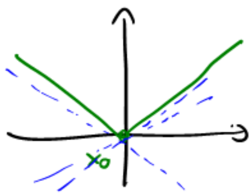
zu 7.4




Achtung: Ist $f$ in $x_0$ stetig, dann ist $f$ nicht automatisch auch in $x_0$ diffbar.

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist stetig, aber in $x_0 = 0$ nicht diffbar




Sekantensteigung für $x<0$: $-1$
// für $x>0$: $+1$ ↯

- Die Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^2$ ist differenzierbar, da $f(x) = |x|^2 = x^2$

zu Satz 7.6

1) $(4x^2)' = 4\cdot(x^2)' = 4\cdot 2x = 8x$
2) $(x+x^3)' = (x)' + (x^3)' = 1 + 3x^2$
3) $(\sin x\cdot\cos x)' = (\sin x)'\cos x + \sin x\cdot(\cos x)' = \cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x)$
$= \cos^2 x - \sin^2 x$
4) $\left(\dfrac{x-2}{x^2+1}\right)' = \dfrac{(x^2+1)\cdot(x-2)' - (x-2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1)-(x-2)\,2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2+4x}{(x^2+1)^2}$
$= \dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$

zu Satz 7.7

Bsp $(\sin(x^2))' = ?$

Hier: $g(x) = x^2$, $f(y) = \sin y$ mit $g'(x) = 2x$, $f'(y) = \cos y$

$\Rightarrow (\sin(x^2))' = f'(g(x))\cdot g'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x$

Bsp $(\sin^2(x))' = ?$

Hier: $g(x) = \sin x$, $f(y) = y^2$ mit $g'(x) = \cos x$, $f'(y) = 2y$

$\Rightarrow (\sin^2(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2 \cdot (\sin x) \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x$

Ableitung von $\frac{1}{f}$:

Es gilt: $\frac{1}{f(x)} = g(f(x))$ mit $g(y) = \frac{1}{y}$ mit $g'(y) = -\frac{1}{y^2}$

Kettenregel $\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{(f(x))^2} \cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$