

Wachmacher-Aufgabe 8

Bestimme $x < y$ mit $x+y=4$ und $x \cdot y=3$

Lsg: $x+y=4 \Rightarrow x=4-y$

Einsetzen in die 2. Gleichung: $(4-y) \cdot y=3 \Leftrightarrow -y^2+4y=3$

$$\Leftrightarrow y^2-4y=-3 \stackrel{+4}{\Leftrightarrow} \underbrace{y^2-4y+4}_{(y-2)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \pm 1 \Leftrightarrow y=3 \text{ oder } y=1$$

Für $y=3$: $x=4-3=1$, also $x < y$ ✓

Für $y=1$: $x=4-1=3$, also $x > y$ ✗

Damit lautet die Lsg $x=1, y=3$.

zu 9.1

Bsp: $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist Stammfkt von f , $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$ ebenfalls
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

zu Satz 9.2

Beweis von 2. Seien F und G zwei Stammfkt. von f . Dann gilt:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow G(x) - F(x) = C \text{ für ein } C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow G(x) = F(x) + C \quad " \quad "$$

Bsp: Alle Stammfkt von x^2 sind von der Form $\frac{1}{3}x^3 + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ beliebig.

zu 9.3 $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, mit $C \in \mathbb{R}$ (für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \cdot \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

Alternativ: $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C$
 $= 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

Erinnerung:
 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

zu 9.4

$$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C$$

zu Satz 9.6

Wissen bereits aus der Produktregel:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx = f(x)g(x) + C$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Alternative Argumentation/Schreibweise für $\int x \cdot \cos x dx$

$$\int \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\cos x} dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Achtung: $\int \underset{\uparrow}{x} \cdot \underset{\downarrow}{\cos x} dx = \int \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}x^2} \cdot \underset{\downarrow}{\cos x} dx = \int \frac{1}{2}x^2 (-\sin x) dx = \frac{1}{2}x^2 \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx$
 $\Rightarrow$ keine gute Idee

nach schwieriger
als das ursprüngl.
Integral.

Bsp $\int \underset{\downarrow}{x} (\underset{\uparrow}{x^2+x}) dx = x \cdot (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2) - \int 1 \cdot (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2) dx$
 $= \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - (\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3) + C$
 $= \frac{2}{12}x^4 + \frac{2}{12}x^3 + C = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$

Eleganter: $\int x(x^2+x) dx = \int (x^3+x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$

Fazit: Partielle Integration geht, ist aber umständlich.

zu 9.7

Beweis: $[F(g(x))] \overset{\text{Kettenregel}}{=} \underset{f}{F}'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \quad \checkmark$

zu 9.7

1. Substituiere $y = x+a$ mit $\frac{dy}{dx} = (x+a)' = 1 \Leftrightarrow dx = dy$

$$\Rightarrow \int f(x+a) dx \stackrel{y=x+a}{=} \int f(y) dy = F(y) + C \stackrel{y=x+a}{=} F(x+a) + C$$

Bsp: $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1} + C$

2. $\int \underset{\widetilde{g(x) \text{ mit } g'(x)=a}}{f(ax)} dx = \frac{1}{a} \int \underset{\widetilde{f(g(x))}}{f(ax)} \cdot \underset{g'(x)}{a} dx = \frac{1}{a} F(ax) + C \quad (\text{für } a \neq 0)$

3. $g(x) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ mit $f(y) = y = \text{id}_{\mathbb{R}}(y)$

Stammfkt zu f : $F(y) = \frac{1}{2}y^2$

$\Rightarrow \int g(x) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C = \frac{1}{2}(g(x))^2 + C$

Bsp: $\int \underbrace{\sin x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)} dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$

Alternativ: $\int \sin x \cdot \cos x dx = - \int \underbrace{(-\sin x)}_{g'(x)} \underbrace{\cos x}_{g(x)} dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + \tilde{C}$ mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$

Das ist kein Widerspruch, denn:

$\frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{2} \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 x$

Also: $\frac{1}{2} \sin^2 x + C = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 x + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + \underbrace{(C + \frac{1}{2})}_{=: \tilde{C}}$ mit $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist auch $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ beliebig

Bsp zu 4. $\int x \sin(x^2) dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$

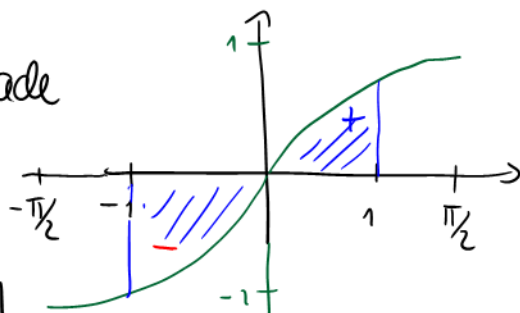
zu 9.9

Bsp: $\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3 = \frac{1}{3} 3^3 - \frac{1}{3} 0^3 = 9$

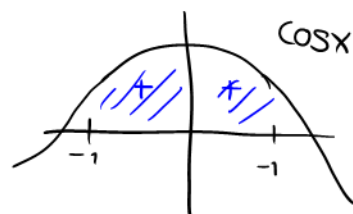
$\int_3^0 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_3^0 = \frac{1}{3} 0^3 - \frac{1}{3} 3^3 = -9$

Generell: $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

Bsp: $\int_{-1}^1 \sin(x) dx = 0$, da $\sin x$ eine ungerade Funktion ist und $[-1, 1]$ ein symmetrisches Intervall ist



Bsp: $\int_{-1}^1 \cos x dx = \int_0^1 \cos x dx + \int_{-1}^0 \cos x dx = 2 \int_0^1 \cos x dx$
 $= \int_{-1}^1 \cos x dx$, da $\cos x$ gerade



zu 9.10

4. $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$
 $= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = F(t) \Big|_{g(a)}^{g(b)}$

Bsp $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x \, dx$ $\begin{matrix} g(x)=1+x^2 \\ g'(x)=2x \end{matrix}$ $\int_{1+0^2}^{1+1^2} \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt = 2\sqrt{t} \Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 2$

Alternativ: Substituiere $y=1+x^2$ mit $\frac{dy}{dx}=2x \Leftrightarrow dy=2x \, dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x \, dx \stackrel{y=1+x^2}{=} \int_{1+0^2}^{1+1^2} \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy = \dots$$