

Lineare dynamische Systeme

8. Übungsblatt, SoSe 2022

Die Aufgaben werden in der Übung am 01.06.2022 besprochen.

- 1) Es seien X ein Banachraum und $T: X \rightarrow X$ ein Operator. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
 - a) T hängt empfindlich von den Anfangsbedingungen ab.
 - b) $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|T^n\| = \infty$.
 - c) Es existiert ein $x \in X$, dessen Orbit unter T unbeschränkt ist.

Hinweis: Benutzen Sie das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit: Sind X, Y Banachräume, $\Gamma \subset L(X, Y)$ eine Menge von Operatoren mit $\sup_{T \in \Gamma} \|Tx\| < \infty$ für alle $x \in X$, so gilt $\sup_{T \in \Gamma} \|T\| < \infty$.

- 2) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $H(G)$ der Fréchetraum aller holomorphen Funktionen in G (siehe Beispiel 2.1.7 (c)) und D der Differentiationsoperator auf $H(G)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
 - a) D ist chaotisch.
 - b) D ist hyperzyklisch.
 - c) G ist einfach zusammenhängend, d.h. $\widehat{\mathbb{C}} \setminus G$ ist zusammenhängend.

Hinweis: Ist G einfach zusammenhängend, so sind die Polynome nach dem Rungeschen Approximationssatz dicht in $H(G)$.

- 3) Es seien D der Differentiationsoperator auf $H(\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass der Operator λD mischend ist.