technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Masterarbeit

vorgelegt von
Marco Sobiech

Der Wittkern einer separablen Körpererweiterung vom Grad vier von quadratischen Formen über Körpern der Charakteristik zwei

Fakultät für Mathematik
Lehrstuhl für Algebra
TU Dortmund

unter der Betreuung von
Prof. Dr. Detlev Hoffmann

September 2013

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Die Theorie der quadratischen Formen begann zunächst als Teilgebiet der Zahlentheorie und auch schon in dieser Zeit wurden viele interessante Aussagen über quadratische Formen getroffen. Ein algebraischer Zugang zur Theorie entstand aber erst im Jahr 1936, als Ernst Witt seine Arbeit „Theorie der quadratischen Formen über beliebigen Körpern“[28] im Journal für die reine und angewandte Mathematik veröffentlichte. In dieser Arbeit wurde zum ersten mal der Wittring beschrieben, welcher dann ein zentraler Punkt der Forschung auf diesem Gebiet wurde. Dabei ist das Wort „beliebig“ jedoch mit Vorsicht zu genießen, da auch schon Witt seinen Ring nur über Körpern der Charakteristik ungleich zwei konstruierte. Von diesem Zeitpunkt an wurde auf dem Gebiet der quadratischen Formen intensiv geforscht, doch auch als Cahit Arf seine Arbeit „Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2 (Teil I.)“[5] kurze Zeit später im Jahr 1941 veröffentlichte, in der er wichtige Grundlagen für die Theorie in Körpern der Charakteristik zwei schaffte, wurde die meiste Arbeit in Körpern der Charakteristik ungleich zwei geleistet und fast alle Bücher über quadratische Formen beginnen mit den Worten „Sei F stets ein Körper mit $\operatorname{Char} F \neq 2$“. Dabei haben natürlich alle Körper eine Daseinsberechtigung und auch in manchen Anwendungen, wie zum Beispiel der Codierungstheorie, spielen Körper der Charakteristik zwei eine wichtige Rolle. Aus diesem Grund wollen wir uns in dieser Arbeit ausschließlich mit Körpern der Charakteristik zwei befassen und definieren für die gesamte Arbeit den Körper F als einen Körper der Charakteristik zwei. Knebusch beginnt sein Buch „Specialization of Quadratic and Symmetric Bilinear Forms“[18] mit dem schönen Limerick

A Mathematician Said Who
Can Quote Me a Theorem that's True?
For the ones that I Know
Are Simply not So,
When the Characteristic is Two!

Ein Teilziel dieser Arbeit wird es sein zu zeigen, dass dieses kleine Gedicht, zumindest in der Theorie der quadratischen Formen, nicht der Wahrheit entspricht, denn viele der bekannten Aussagen bleiben auch in Charakteristik korrekt. Wir wollen damit beginnen zunächst, eine grundlegende Theorie aufzubauen, die alle wichtigen, zum Fall Charakteristik ungleich zwei analogen, grundlegende Aussagen beinhaltet. Dabei werden wir unter anderem die Wittzerlegung, den Wittring bzw. die Wittgruppe, den Satz von Cassels-Pfister und den dritten Darstellungssatz formulieren und beweisen. Anschließend wollen wir uns mit Pfisterformen in Charakteristik zwei befassen, welche im Wesentlichen die selben, sehr nützlichen Eigenschaften erfüllen wie in der üblichen Theorie. Ziel dieser Arbeit wird es dann in den Kapiteln 6 und 7 sein, sich mit verschiedenen Wittkernen, das heißt mit den Kernen der Einbettungen $\iota : W_q(F) \longrightarrow W_q(K)$ wobei $K : F$ eine Körpererweiterung ist, zu befassen. Dazu werden wir in Kapitel 6 die bereits bekannten Wittkerne berechnen und anschließend in Kapitel 7 einen noch unbekannten Wittkern konstruieren, nämlich den einer separablen Erweiterung vom Grad vier. Dazu werden zeigen, dass eine solche Erweiterung stets als $F(\theta) : F$ angenommen werden kann, wobei θ Nullstelle des irreduziblen Polynoms $p = t^4 + at^3 + bt + c$ mit $a, b, c \in F$ und $a, c \neq 0$ ist. Mit diesen Werten werden dann zeigen, dass der Wittkern dieser Erweiterung erzeugt ist durch die 2-fachen Pfisterformen $\langle\langle\, ad^3 + abd + b^2 + a^2c, \frac{d}{a^2}]]$ für ein $d \in F$ und die 1-fachen Pfisterformen $[1, e]$ mit $e \in F$, wobei $F(\wp^{-1}(e))$ ein echter Zwischenkörper von $F(\theta) : F$ ist. Mit den in diesem Abschnitt verwendeten Methoden sind wir dann auch in der Lage, den bereits bekannten Wittkern der Erweiterung $F(\sqrt[4]{d}) : F$ auf eine kürzere und weniger technische Weise zu konstruieren.

Danke an Prof. Dr. Hoffmann für die Themenstellung und die Betreuung dieser Arbeit.

Teil I

Einführung in die Theorie der quadratischen Formen über Körpern der Charakteristik zwei

1 Grundlagen

In diesem ersten Kapitel wollen wir eine grundlegende Theorie für bilineare und quadratische Formen über Körpern mit Charakteristik zwei aufbauen. Dabei wollen wir uns ausschließlich auf diesen Fall konzentrieren und nur gelegentlich einige kleine Aussagen für den Fall von Charakteristik ungleich zwei treffen.

Dieser Abschnitt ist im Wesentlichen dafür gedacht, dem Leser eine Grundlage dieser Theorie zu vermitteln, da sich diese in manchen, aber doch sehr wichtigen Punkten, von der Theorie über Körpern mit Charakteristik ungleich zwei unterscheidet. So ist es zum Beispiel nicht mehr möglich symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen als ein und das selbe Objekt zu betrachten. Auch die Diagonalisierung, die man von quadratischen Formen über Körpern mit Charakteristik ungleich zwei gewohnt ist, ist hier nicht mehr möglich. Alle Aussagen in diesem Kapitel sind Standardaussagen und wir beziehen uns hauptsächlich auf die Literaturen [7], [10], [25] und [26].

Doch wie wir noch sehen werden sind trotz dieser elementaren Unterschiede viele der bekannten Aussagen auch in Charakteristik zwei korrekt, auch wenn sich die Beweise und eventuell auch die Beweismethoden vom Fall Charakteristik ungleich zwei unterscheiden.

Wie schon in der Einleitung erwähnt sei nun für die gesamte Arbeit F ein Körper der Charakteristik zwei und alle auftretenden Vektorräume, meist mit U, V und W bezeichnet, stets von endlicher Dimension.

Manche der nachfolgenden Aussagen sind zwar auch für Vektorräume mit unendlicher Dimension gültig, dennoch werden wir in dieser Arbeit nicht auf diese eingehen.

1.1 Grundlegende Definitionen

Definition 1.1 ([10] Def. 1.1, Def. 7.1)
Es seien V und W zwei Vektorräume über dem Körper F.

(a) Eine Abbildung $\mathfrak{b} : V \times V \longrightarrow F$ heißt **Bilinearform über** V, wenn sie in jeder Komponente linear ist. Weiter heißt eine Bilinearform **symmetrisch**, wenn für alle $v, w \in V$ stets $\mathfrak{b}(v, w) = \mathfrak{b}(w, v)$ gilt und das Paar $(\mathfrak{b}, V)$ heißt dann **symmetrischer bilinearer Raum**.

(b) Eine Abbildung $\varphi : W \longrightarrow F$ heißt **quadratische Form über** W, wenn für alle $v, w \in W$ und $\lambda \in F$ gilt
- $\varphi(\lambda v) = \lambda^2 \varphi(v)$
- $\mathfrak{b}_\varphi : W \times W \longrightarrow F$, mit $\mathfrak{b}_\varphi(v, w) := \varphi(v + w) + \varphi(v) + \varphi(w)$ ist eine (symmetrische) Bilinearform auf W.

Das Paar (φ, W) heißt dann **quadratischer Raum**.

(c) Eine Bilinearform $\mathfrak{b}$ heißt **alternierend**, wenn für alle $v \in V$ stets $\mathfrak{b}(v, v) = 0$ gilt.

(d) Ist $(\mathfrak{b}, V)$ bzw. (φ, W) ein bilinearer Raum bzw. ein quadratischer Raum, so schreiben wir für die Dimensionen kurz $\dim \mathfrak{b} := \dim V$ bzw. $\dim \varphi := \dim W$.

In Charakteristik ungleich zwei ist man gewohnt die Theorie von alternierenden und symmetrischen Bilinearformen zu trennen, da alternierende Formen stets schiefsymmetrisch sind und damit die einzige alternierende und symmetrische Form die Nullform ist. In Charakteristik zwei ist dies aber nicht der Fall, da alternierende Formen wegen $0 = \mathfrak{b}(v + w, v + w) = \mathfrak{b}(v, w) + \mathfrak{b}(w, v)$ symmetrisch sind. Die beiden Begriffe widersprechen sich also nicht mehr und eine symmetrische Bilinearform kann durchaus auch alternierend sein, oder auch einen alternierenden Unterraum beinhalten.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die Menge der bilinearen Formen und die Menge der quadratischen Formen auf einem F-Vektorraum V mit der für Abbildungen üblichen Addition und skalaren Multiplikation einen F-Vektorraum bilden, insbesondere ist also mit $\mathfrak{b}$ bzw. φ auch $a\,\mathfrak{b}$ bzw. $a\,\varphi$ eine bilineare bzw. quadratische Form für ein $a \in F$.

Aus jeder symmetrischen Bilinearform $\mathfrak{b}$ kann man durch $\varphi_{\mathfrak{b}}(v) := \mathfrak{b}(v, v)$ für $v \in V$ eine quadratische Form gewinnen und nach 1.1 (b) auch aus jeder quadratischen Form eine symmetrische Bilinearform. Im Fall Charakteristik ungleich zwei kann man die jeweiligen Formen auch wieder zurückgewinnen, was beide Theorien identisch macht. Dies ist hier aber nicht der Fall, da für alle $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{\varphi_\mathfrak{b}}(v,w) &= \varphi_\mathfrak{b}(v+w) + \varphi_\mathfrak{b}(v) + \varphi_\mathfrak{b}(w) = \mathfrak{b}(v+w,v+w) + \mathfrak{b}(v,v) + \mathfrak{b}(w,w) \\ &= 2\,(\mathfrak{b}(v,w) + \mathfrak{b}(v,v) + \mathfrak{b}(w,w)) = 0 \quad \text{und} \\ \varphi_{\mathfrak{b}_\varphi}(v) &= \mathfrak{b}_\varphi(v,v) = \varphi(v+v) + \varphi(v) + \varphi(v) = 4\,\varphi(v) + 2\,\varphi(v) = 0.\end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt auch sofort, dass jede aus einer quadratischen Form entstehende symmetrische Bilinearform stets alternierend ist. Die auf diese Weise aus den Formen $\mathfrak{b}$ bzw. φ entstehenden Formen $\varphi_\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{b}_\varphi$ heißen die **polare Formen** von $\mathfrak{b}$ bzw. φ.

Ist V ein n-dimensionaler F-Vektorraum, so kann man mit Hilfe einer festen Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V zu jeder Bilinearform $\mathfrak{b}$ auf V eine Matrix durch

$$B_{\{e_1,\dots,e_n\}} := B := (\mathfrak{b}_{ij})_{1\le i,j\le n} \text{ mit } b_{ij} := \mathfrak{b}(e_i, e_j)$$

definieren. Diese Matrix nennt man die **Grammatrix** von $\mathfrak{b}$. Schreibt man die Vektoren $v, w \in V$ in der gegebenen Basis durch $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ und $w = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ und setzt $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ und $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, so gilt $\mathfrak{b}(v,w) = x^T B y$ und offensichtlich ist eine Bilinearform genau dann symmetrisch, wenn es ihre Grammatrix ist. Zwischen (symmetrischen) Bilinearformen auf einem n-dimensionalen Vektorraum und (symmetrischen) $n\times n$-Matrizen über F herrscht auf diese Weise, bei einer fest gewählten Basis, eine eins zu eins Korrespondenz. Damit können wir auch jeder Bilinearform eine Determinante zuordnen, die Determinante ihrer Grammatrix. Diese ist jedoch nur bis auf Quadrate eindeutig, da sich bei einer anderen Basiswahl die Grammatrix B von $\mathfrak{b}$ zu $S^T BS$ ändert, für ein $S \in \mathrm{GL}(n, F)$ und damit für eine wohldefinierte Abbildung $\det \mathfrak{b} = \det \mathfrak{b} \det S^2$ gelten muss.

Mit Hilfe obiger Matrizen kann man also anstatt einer koordinatenfreien Definition wie 1.1 eine Bilinearform auch definieren als ein Polynom der Form

$$\mathfrak{b}((X_1 \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X_i Y_j \in F[X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n].$$

Für quadratische Formen ist eine solche eins zu eins Korrespondenz zwischen den Formen und passenden Matrizen nicht möglich. Wählt man eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V und schreibt ein $v \in V$ durch $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ und setzt $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, so nennen wir jede $n \times n$-Matrix Q, die $\varphi(v) = x^T Q x$ erfüllt, eine **Matrix von φ bezüglich der Basis** $\{e_1, \dots, e_n\}$. Eine solche Matrix existiert immer in oberer Dreiecksgestalt. Dieses mögliche Q ist zum Beispiel gegeben durch

$$Q_{\{e_1,\dots,e_n\}} = Q = (q_{ij})_{1\le i,j\le n} \text{ mit } q_{ij} := \begin{cases} \varphi(e_j) & , \ i = j \\ \mathfrak{b}_\varphi(e_i, e_j) & , \ i < j \\ 0 & , \ i > j \end{cases}$$

Diese Matrix Q ist jedoch nicht eindeutig bestimmt, denn jede andere Matrix von der Form $Q' = Q + A$ mit einer alternierenden $n \times n$-Matrix A ist ebenfalls eine Matrix von φ bezüglich der selben Basis. Wir sehen also, dass die Matrix von φ als obere Dreiecksmatrix eindeutig bestimmt ist. Im Gegensatz zu der koordinatenfreien Definition wie in 1.1, kann man also auch quadratische Formen als Polynome der Gestalt

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} X_i X_j \in F[X_1, \dots, X_n]$$

definieren. Hat man eine Matrix Q von φ gegeben, so erhält man die Grammatrix B von $\mathfrak{b}_\varphi$ durch Berechnung von $B = Q + Q^T$. Dabei ist B eindeutig, da auch für $Q' = Q + A$ mit $A \in \mathrm{Alt}(n, F)$ gilt $Q' + Q'^T = Q + Q^T + A + A^T = Q + Q^T = B$.

Natürlich gilt auch für quadratische Formen, dass ein Basiswechsel zu einer anderen Matrix der Form S^TQS mit $S \in \mathrm{GL}(n, F)$ führt. Dabei geht allerdings die obere Dreiecksgestalt verloren und aus diesem Grunde ist eine Betrachtung von Matrizen von quadratischen Formen in Körpern der Charakteristik 2 nicht hilfreich und wir werden im weiteren Verlauf der Arbeit weitestgehend darauf verzichten.

Definition 1.2 ([10] S. 11 und S. 40)
Zwei bilineare Räume $(\mathfrak{b}_i, V_i)$ bzw. zwei quadratische Räume (φ_i, V_i), $i = 1, 2$ heißen **isometrisch**, falls es einen F-linearen Isomorphismus $L : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ gibt, sodass gilt

$$\mathfrak{b}_1(v, w) = \mathfrak{b}_2(L(v), L(w)) \text{ für alle } v, w \in V_1 \text{ bzw. } \varphi_1(v) = \varphi_2(L(v)) \text{ für alle } v \in V_1.$$

Man schreibt dann $(\mathfrak{b}_1, V_1) \cong (\mathfrak{b}_2, V_2)$ bzw. $(\varphi_1, V_1) \cong (\varphi_2, V_2)$ oder kurz $\mathfrak{b}_1 \cong \mathfrak{b}_2$ bzw. $\varphi_1 \cong \varphi_2$. Dabei ist jede Isometrie zwischen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ auch eine Isometrie von $\varphi_{\mathfrak{b}_1}$ und $\varphi_{\mathfrak{b}_2}$ und umgekehrt jede Isometrie zwischen φ_1 und φ_2 auch eine von $\mathfrak{b}_{\varphi_1}$ und $\mathfrak{b}_{\varphi_2}$.

Die Isometrie von bilinearen und quadratischen Formen erfüllt offensichtlich die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation. Existiert zu zwei bilinearen Räumen $(\mathfrak{b}_i, V_i)$ bzw. zu zwei quadratischen Räumen (φ_i, V_i), $i = 1, 2$ ein $a \in F$, sodass $\mathfrak{b}_1 \cong a\,\mathfrak{b}_2$ bzw. $\varphi_1 \cong a\,\varphi_2$ gilt, so nennen wir $\mathfrak{b}_1$ **ähnlich** zu $\mathfrak{b}_2$ und φ_1 **ähnlich** zu φ_2. Offensichtlich erfüllt auch Ähnlichkeit die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

Nach dieser neuen Definition gilt also für isometrische bilineare Formen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ stets $\det \mathfrak{b}_1 = \det \mathfrak{b}_2$ in F^*/F^{*2}.

Für zwei beliebige Mengen $S, T \subseteq V$ im symmetrischen bilinearen Raum $(\mathfrak{b}, V)$ nennen wir S **orthogonal** zu T und schreiben $S \perp T$, falls $\mathfrak{b}(s,t) = 0$ für alle $s \in S$ und $t \in T$ gilt. Weiter setzen wir $S^\perp := \{v \in V \mid \mathfrak{b}(v,s) = 0 \text{ für alle } s \in S\}$. Offensichtlich folgt dabei aus $S \subseteq T$ stets $T^\perp \subseteq S^\perp$. Ist die Summe von zwei Unterräumen U, W von V direkt und gilt zusätzlich $U \subseteq W^\perp$ (oder äquivalent $W \subseteq U^\perp$), so schreiben wir $U \perp W$ für $U \oplus W$.

Ist $(\mathfrak{b}, V)$ ein bilinearer Raum und $V = U \perp W$ für Unterräume $U, W \subseteq V$, so schreiben wir $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{|U} \perp \mathfrak{b}_{|W}$ und nennen $\mathfrak{b}$ **(innere) orthogonale Summe** von $\mathfrak{b}_{|U}$ und $\mathfrak{b}_{|W}$. Analoges gilt für einen quadratischen Raum, wobei sich die Orthogonalität auf die symmetrische Bilinearform $\mathfrak{b}_\varphi$ der quadratischen Form φ bezieht. Neben der inneren orthogonalen Summe benötigen wir im Laufe dieser Arbeit auch noch die **(äußere) orthogonale Summe**. Diese ist für zwei bilineare Räume $(\mathfrak{b}_1, V_1), (\mathfrak{b}_2, V_2)$ definiert durch

$$(\mathfrak{b}_1, V_1) \perp (\mathfrak{b}_2, V_2) := (\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_2, V_1 \oplus V_2) \quad \text{mit}$$
$$(\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_2)(v_1 + v_2, w_1 + w_2) := \mathfrak{b}_1(v_1, w_1) + \mathfrak{b}_2(v_2, w_2) \text{ für alle } v_1, w_1 \in V_1\ v_2, w_2 \in V_2.$$

In diesem Falle ist dann natürlich auch $V_1 \oplus V_2 = V_1 \perp V_2$. Analog definieren wir für zwei quadratische Räume $(\varphi_1, V_1), (\varphi_2, V_2)$ die Summe durch

$$(\varphi_1, V_1) \perp (\varphi_2, V_2) := (\varphi_1 \perp \varphi_2, V_1 \oplus V_2) \quad \text{mit}$$
$$(\varphi_1 \perp \varphi_2)(v_1 + v_2) := \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2) \text{ für alle } v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Auch hier gilt dann natürlich ebenfalls $V_1 \oplus V_2 = V_1 \perp V_2$. Für diese Summen schreiben wir dann kurz $\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_2$ und $\varphi_1 \perp \varphi_2$.

Ist dabei B_1 eine Grammatrix der Bilinearform $\mathfrak{b}_1$ der Dimension n_1 und B_2 Grammatrix der Bilinearform $\mathfrak{b}_2$ der Dimension n_2, so ist die Matrix $B \in F^{((n_1+n_2)\times(n_1+n_2))}$ definiert durch

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

eine Grammatrix von $\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_2$.

Definition 1.3 ([10] S. 13 und S. 42)
Sei $(\mathfrak{b}, V)$ ein symmetrischer bilinearer Raum und (φ, W) ein quadratischer Raum. Wir

definieren das **Radikal** einer Bilinearform durch

$$\operatorname{rad}\mathfrak{b} := \operatorname{rad}(\mathfrak{b}, V) := V^{\perp} = \{u \in V \mid \mathfrak{b}(u,v) = 0 \text{ für alle } v \in V\}.$$

Für das **quadratische Radikal** einer quadratischen Form setzten wir

$$\operatorname{rad}\varphi := \operatorname{rad}(\varphi, W) := \{w \in \operatorname{rad}\mathfrak{b}_\varphi \mid \varphi(w) = 0\}.$$

Weiter nennen wir $\mathfrak{b}$ **nicht ausgeartet**, wenn $\operatorname{rad}\mathfrak{b} = \{0\}$ gilt und wir nennen φ

- **nicht singulär**, wenn $\operatorname{rad}\mathfrak{b}_\varphi = \{0\}$ ist, sonst **singulär**;
- **total singulär**, wenn $\operatorname{rad}\mathfrak{b}_\varphi = W$ ist;
- **regulär** oder **ohne Defekt**, wenn $\operatorname{rad}\varphi = \{0\}$ ist.

Das Radikal einer symmetrischen Bilinearform $\mathfrak{b}$ kann auch betrachtet werden als der Kern der Abbildung

$$d_{\mathfrak{b}} : V \longrightarrow V^* \ , \ v \longmapsto \mathfrak{b}(v, \cdot).$$

Damit ist dann sofort klar, dass $\operatorname{rad}\mathfrak{b}$ ein Unterraum von V ist. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die nicht Ausgeartetheit einer Bilinearform äquivalent dazu ist, dass die Grammatrix von $\mathfrak{b}$ vollen Rang besitzt. Analoges gilt dabei nicht für quadratische Formen, denn betrachten wir zum Beispiel die Form φ, die das Polynom $\varphi((X,Y)) = XY$ auf dem Vektorraum F^2 besitzt, so besitzt diese die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit Rang eins. Jedoch ist die Form φ nicht singulär und damit kann eine ähnliche Äquivalenz wie bei den Bilinearformen nicht gelten, was einen weiteren Grund liefert auf Matrizen von quadratischen Formen zu verzichten.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass Isometrien von Formen stets Radikale auf Radikale abbilden, das heißt sind $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ bzw. φ_1, φ_2 zwei bilineare bzw. quadratische Formen über F und L eine Isometrie zwischen ihnen, so gilt $L(\operatorname{rad}\mathfrak{b}_1) = \operatorname{rad}\mathfrak{b}_2$ bzw. $L(\operatorname{rad}\mathfrak{b}_{\varphi_1}) = \operatorname{rad}\mathfrak{b}_{\varphi_2}$ und $L(\operatorname{rad}\varphi_1) = \operatorname{rad}\varphi_2$.

Weiter gilt natürlich $\operatorname{rad}\varphi \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{b}_\varphi$. Im Fall Charakteristik ungleich zwei fallen $\operatorname{rad}\varphi$ und $\operatorname{rad}\mathfrak{b}_\varphi$ stets zusammen, aber in Charakteristik zwei muss das nicht der Fall sein. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 1.4
Über dem Körper $F = \mathbb{F}_2(X,Y)$ betrachten wir die quadratische Form φ auf dem dreidimensionalen Vektorraum $V = eF \perp fF \perp gF$ mit Basis e, f, g und $\varphi(e) = X, \varphi(f) = Y, \varphi(g) = X^3 + Y^3$. Diese Form ist offensichtlich total singulär, das heißt

es gilt $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi = V$. Der Vektor $g + Xe + Yf$ liegt dabei in $\operatorname{rad} \varphi$, aber da $\varphi(e) \neq 0$ gilt, ist hier $\{0\} \subsetneq \operatorname{rad} \varphi \subsetneq \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi$.

Lemma 1.5 ([10] Lemmata 1.4 und 7.12)
Seien $(\mathfrak{b}, V)$ ein symmetrischer bilinearer Raum bzw. (φ, V) ein quadratischer Raum. Für jedes Komplement W von $\operatorname{rad} \mathfrak{b}$ bzw. $\operatorname{rad} \varphi$ gilt dann stets $V = \operatorname{rad} \mathfrak{b} \oplus W = \operatorname{rad} \mathfrak{b} \perp W$ bzw. $V = \operatorname{rad} \varphi \oplus W = \operatorname{rad} \varphi \perp W$. Weiter ist $\mathfrak{b}_{|W}$ nicht ausgeartet bzw. $\varphi_{|W}$ regulär und es gilt

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{|\operatorname{rad} \mathfrak{b}} \perp \mathfrak{b}_{|W} = 0_{|\operatorname{rad} \mathfrak{b}} \perp \mathfrak{b}_{|W} \quad \textit{bzw.} \;\; \varphi = \varphi_{|\operatorname{rad} \varphi} \perp \varphi_{|W} = 0_{|\operatorname{rad} \varphi} \perp \varphi_{|W} \,.$$

Weiter gilt $\mathfrak{b}_{|W} \cong \bar{\mathfrak{b}}$, dabei ist $\bar{\mathfrak{b}} : (V/\operatorname{rad} \mathfrak{b}) \times (V/\operatorname{rad} \mathfrak{b}) \longrightarrow F$ die reduzierte Form von $\mathfrak{b}$. Insbesondere ist $\mathfrak{b}_{|W}$ bis auf Isometrie eindeutig bestimmt und Analoges gilt auch für $\varphi_{|W}$ und der reduzierten Form $\bar{\varphi} : V/\operatorname{rad} \varphi \longrightarrow F$.

Lemma 1.5 zeigt also, dass es ausreicht nicht ausgeartete symmetrische Bilinerarformen und reguläre quadratische Formen zu klassifizieren.

1.2 Diagonalisierung von Bilinearformen

Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass symmetrische Bilinearformen bis auf wenige Ausnahmen stets diagonalisierbar sind. Zunächst beginnen wir mit einer kurzen Wiederholung.

Definition 1.6 ([26] S. 265)
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Bilinearform $\mathfrak{b}$.

(a) Eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V heißt **orthogonal**, wenn $\mathfrak{b}(e_i, e_j) = 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ gilt. Existiert eine solche Basis, so nennen wir $\mathfrak{b}$ **diagonalisierbar**.

(b) Sei $\dim V = 2n$, dann heißt eine Basis $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$ von V **symplektisch**, wenn für $i = 1, \ldots, n$ stets $\mathfrak{b}(e_i, e_i) = \mathfrak{b}(f_i, f_i) = 0$, $\mathfrak{b}(e_i, f_i) = 1 = -\mathfrak{b}(f_i, e_i)$ und für $i \neq j$ stets $\mathfrak{b}(e_i, f_j) = \mathfrak{b}(f_j, e_i) = \mathfrak{b}(e_i, e_j) = \mathfrak{b}(f_i, f_j) = 0$ gilt. Wir nennen die Form $\mathfrak{b}$ **symplektisch**, wenn es eine symplektische Basis von V gibt.

Für die Grammatrix B einer Bilinearform $\mathfrak{b}$ in einer orthogonalen Basis gilt dann also $B = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i = \mathfrak{b}(e_i, e_i)$ und dafür wollen wir dann kurz $\mathfrak{b} \cong \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_b$ schreiben. Der Index b an der Form soll darauf hinweisen, dass es sich hierbei um eine bilineare Form handelt und Verwirrungen vorbeugen, wenn später eine analoge Schreibweise für quadratische Formen eingeführt wird. Da wir den Fall Charakteristik zwei betrachten, ist jede symplektische Form auch symmetrisch und besitzt damit eine Grammatrix der Gestalt $\operatorname{diag}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \ldots, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Im weiteren Verlauf der Arbeit sei von nun an mit Bilinearform stets eine symmetrischen Bilinearform gemeint. Manche der nachfolgenden Aussagen gelten zwar auch für nicht symmetrische Formen, diese wollen wir aber hier nicht betrachten.

Lemma 1.7 ([10] Prop. 1.5)
Es sei $\mathfrak{b}$ *eine Bilinearform auf* V *und* $W \subseteq V$ *ein Unterraum von* V*. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(a) Es ist $\operatorname{rad}\mathfrak{b} \cap W = \{0\}$,
(b) Die Abbildung $d_{\mathfrak{b}} : V \longrightarrow W^* = \operatorname{Hom}(W, F),\ v \longmapsto \mathfrak{b}(v, \cdot)$ *ist surjektiv,*
(c) Es ist $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.

Mit diesem Lemma zeigt man dann den wichtigen folgenden Zerlegungssatz.

Satz 1.8 ([10] Prop. 1.6)
Es sei $\mathfrak{b}$ *eine Bilinearform auf* V, $U \subseteq V$ *ein Unterraum von* V *und* $\mathfrak{b}_{|U}$ *nicht ausgeartet. Dann gilt*

$$V = U \oplus U^{\perp} = U \perp U^{\perp} \quad \text{und damit} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{|U} \perp \mathfrak{b}_{|U^{\perp}}.$$

Ist dabei $\mathfrak{b}$ *nicht ausgeartet, so ist auch* $\mathfrak{b}_{|U^{\perp}}$ *nicht ausgeartet.*

Definition 1.9 ([25] S. 34)
Eine zweidimensionale bilineare Form $\mathfrak{b}$ mit Basis e, f heißt **hyperbolische Ebene**, wenn für die Basis $\mathfrak{b}(e,e) = \mathfrak{b}(f,f) = 0$ und $\mathfrak{b}(e,f) = \mathfrak{b}(f,e) = 1$ gilt. Die Basis e, f heißt dabei **hyperbolisches Paar** und wir bezeichnen diese Form mit $\mathbb{H}_b$. Offensichtlich ist $\mathbb{H}_b$ ein nicht ausgearteter Raum.

Da wir in Charakteristik zwei arbeiten, können wir also die hyperbolische Ebene auch als eine zweidimensionale symplektische Bilinearform beschreiben. Dies ist jedoch nur in Charakteristik zwei möglich, da man sonst zwischen der symmetrischen hyperbolischen Ebene $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und der alternierenden/symplektischen Ebene $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ unterscheiden muss.

Wie wir noch sehen werden sind im Gegensatz zum Fall von Charakteristik ungleich zwei die bilinearen hyperbolischen Ebenen nicht diagonalisierbar. Wir wollen an dieser Stelle noch eine weitere Notation einführen, bevor wir die alternierenden bilinearen Räume klassifizieren. Für $n \in \mathbb{N}$ und eine Bilinearform $\mathfrak{b}$ setzen wir $n \times \mathfrak{b} := \mathfrak{b} \perp \ldots \perp \mathfrak{b}$, die n-fache orthogonale Summe von $\mathfrak{b}$. Damit ergibt sich der folgende Satz.

Satz 1.10 ([10] Prop. 1.8)
Es sei $\mathfrak{b}$ eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform auf V. Dann ist $\dim V = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{b} \cong n \times \mathbb{H}_b$.

Satz 1.10 sagt also aus, dass jede alternierende Bilinearform eine symplektische Basis besitzt und des Weiteren auch, dass jede nicht singuläre quadratische Form φ gerade Dimension haben muss, da $\mathfrak{b}_\varphi$ eine nicht ausgeartete alternierende Form ist. Nun sind wir in der Lage eine Normgestalt einer Bilinearform zu bestimmen.

Satz 1.11 ([10] Coro. 1.9)
Es sei $\mathfrak{b}$ eine Bilinearform auf dem Vektorraum V. Dann ist

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{|\mathrm{rad}\,\mathfrak{b}} \perp \mathfrak{b}_{V_1} \perp \ldots \perp \mathfrak{b}_{|V_s} \perp \mathfrak{b}_{|W},$$

dabei sind die V_i eindimensionale nicht ausgeartete Unterräume von V für $i = 1, \ldots, s$ und $\mathfrak{b}_{|W}$ eine nicht ausgeartete alternierende Form auf dem Unterraum W von V.

Im Fall Charakteristik ungleich zwei müsste $\mathfrak{b}_{|W}$ sowohl alternierend als auch symmetrisch sein, was $W = \{0\}$ implizieren würde und man erhält die bekannte Aussage, dass jede symmetrische Bilinearform diagonalisierbar ist. Da $\mathfrak{b}_{|W}$ nach Satz 1.10 eine symplektische Basis besitzt, haben wir also nun gezeigt, dass jede (symmetrische) Bilinearform $\mathfrak{b}$ über einem Körper der Charakteristik zwei isometrisch ist zu einer Form der Gestalt

$$\mathfrak{b} \cong r \times \langle\, 0 \,\rangle_b \perp \langle\, a_1, \ldots, a_s \,\rangle_b \perp t \times \mathbb{H}_b,$$

für passende $r, s, t \in \mathbb{N}_0$. Dabei ist $r = \dim \mathrm{rad}\,\mathfrak{b}$, die Form $t \times \mathbb{H}_b$ alternierend und die $a_i \in F^*$. Allerdings gilt für alle $a \in F^*$ die Isometrie

$$\langle\, a \,\rangle_b \perp \mathbb{H}_b \cong \langle\, a, a, a \,\rangle_b, \tag{1.1}$$

denn ist e, f, g eine Basis von $\langle\, a \,\rangle_b \perp \mathbb{H}_b$, so erhält man eine Basis von $\langle\, a, a, a \,\rangle_b$ durch $e + g, e + af, e + af + g$. Für eine abschließende Aussage über die Diagonalisierbarkeit von bilinearen Formen benötigen wir noch das folgende Lemma, welches auch als der erster Darstellungssatz bekannt ist.

Lemma 1.12 ([10] Remark 1.12)
Es sei $\mathfrak{b}$ eine Bilinearform auf V und $v \in V$ mit $\mathfrak{b}(v, v) = a \neq 0$. Dann existiert eine weitere bilineare Form $\mathfrak{b}_1$, sodass gilt

$$\mathfrak{b} \cong \langle\, a \,\rangle_b \perp \mathfrak{b}_1\,.$$

Nutzen wir nun Satz 1.11 zusammen mit Lemma 1.12 und der Isometrie aus Gleichung (1.1), so erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 1.13 ([10] Prop. 1.17)
Ist $\mathfrak{b}$ eine bilineare Form auf V und existiert ein $v \in V$ mit $\mathfrak{b}(v, v) \neq 0$, so ist $\mathfrak{b}$ diagonalisierbar. Insbesondere ist eine von null verschiedene Bilinearform $\mathfrak{b}$ genau dann diagonalisierbar, wenn sie nicht alternierend, das heißt wenn sie keine Summe von bilinearen hyperbolischen Ebenen ist.

1.3 Zerlegung von quadratischen Formen

Nun wollen wir auch auch für quadratische Formen eine möglichst einfache Normgestalt bestimmen. Dazu nutzen wir die bereits für bilineare Formen gezeigten Aussagen und wollen auch einige der Notationen aus Abschnitt 1.2 übernehmen. So schreiben wir in dem Fall, dass der einer quadratischen Form φ zugrundeliegende Vektorraum V eine orthogonale Basis $e_1, \ldots, e_n$ bezüglich $\mathfrak{b}_\varphi$ besitzt, auch $\varphi \cong \langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle$ mit $a_i = \varphi(e_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und nennen dann auch φ **diagonalisierbar**. Da wir uns in dieser Arbeit hauptsächlich mit quadratischen Formen beschäftigen werden, verzichten wir auf einen Index, der kennzeichnet, dass es sich dabei um eine quadratische Form handelt. Nun zu der eben schon erwähnten Normgestalt.

Satz 1.14 ([25] S. 13-14 Theo. 4.3)
Sei φ eine quadratische Form auf V und $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $V = \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi \perp U$.

(a) Es ist $\varphi_{|\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi} \cong \langle\, d_1, \ldots, d_s \,\rangle$ mit $\dim(\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi) = s \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi$ Summe von s eindimensionalen orthogonalen Räumen und damit diagonalisierbar.

(b) Der Unterraum U ist orthogonale Summe von zweidimensionalen nicht singulären quadratischen Räumen.

Die in Satz 1.14(b) beschriebenen zweidimensionalen Räume besitzen eine Basis v, w für die dann $\varphi(v) = a', \varphi(w) = c'$ und $\mathfrak{b}_\varphi(v, w) = b'$ mit $a', b', c' \in F$ gilt. Dabei ist $b' \neq 0$, da der Raum nicht singulär ist. Staucht man nun zum Beispiel den zweiten Basisvektor mit $\frac{1}{b'}$, haben wir gezeigt, dass jeder zweidimensionale nicht singuläre Raum V eine Basis e, f mit $\varphi(e) = a, \varphi(f) = b \in F$ und $\mathfrak{b}_\varphi(e, f) = 1$ besitzt. Einen solchen Raum wollen wir mit $[a, b]$ bezeichnen. Nutzen wir nun Satz 1.14, so haben wir insgesamt gezeigt, dass jede quadratische Form φ isometrisch ist zu einer Form der Gestalt

$$\varphi \cong [a_1, b_1] \perp \ldots \perp [a_r, b_r] \perp \langle\, d_1, \ldots, d_s \,\rangle,$$

mit passenden $a_i, b_i, d_j \in F,\ i = 1, \dots, r\ j = 1, \dots, s$. Dies entspricht einem wie auf Seite 6 beschrieben Polynom der Gestalt

$$\varphi(X_1, Y_1, \dots, X_r, Y_r, Z_1, \dots, Z_s) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2 + X_i Y_i + b_i Y_i^2 + \sum_{j=1}^{s} c_j Z_j^2.$$

Dabei ist $\langle\, d_1, \dots, d_s \,\rangle$ bis auf Isometrie eindeutig bestimmt, der nicht singuläre Anteil $[a_1, b_1] \perp \dots \perp [a_r, b_r]$ jedoch nicht, wie wir beides später noch sehen werden. Das Tupel $(r, s) \in \mathbb{N}_0^2$ heißt der **Typ** von φ und ist ebenfalls eindeutig bestimmt. Dabei ist $\dim \varphi = 2r + s$ und $\langle\, d_1, \dots, d_s \,\rangle \cong \varphi_{|\mathrm{rad}\, \mathfrak{b}_\varphi}$ heißt der **quasi-lineare Anteil** von φ und wird mit $\mathrm{ql}(\varphi)$ bezeichnet. Die Definitionen aus 1.3 lassen sich nun wie folgt umschreiben: Eine quadratische Form vom Typ (r, s) heißt nicht singulär, wenn $s = 0$ gilt, sie heißt singulär, wenn $s > 0$ gilt und sie heißt total singulär, wenn $r = 0$ gilt. Mit der eben erlangten Zerlegung, erhalten wir auch sofort die folgende Bemerkung.

Bemerkung 1.15 ([10] Remark 7.24)
Es sei φ eine quadratische Form auf V, dann ist φ genau dann total singulär, wenn sie diagonalisierbar ist.

Es ist auch klar, dass wir jede total singuläre quadratische Form $\varphi \cong \langle\, d_1, \dots, d_s \,\rangle$ auf V stets als polare Form einer bilinearen Form $\mathfrak{b} \cong \langle\, d_1, \dots, d_s \,\rangle_b$ auf V auffassen können. Aus diesem Grund sind Aussagen, die für diagonalisierbare bilineare Formen gezeigt werden, auch für total singuläre Formen gültig. Die Umkehrung ist natürlich falsch, da die polare Form einer quadratischen total singulären Form stets die Nullform ist.

Zum Schluss dieses Abschnittes formulieren wir noch eine Definition und ein sehr nützliches Lemma, auf die wir im weiteren Verlauf der Arbeit immer wieder zurückgreifen werden.

Definition 1.16 ([10] Def. 1.11 und S. 16, S. 41, S. 52)
Es sei $\mathfrak{b}$ bzw. φ eine bilineare bzw. quadratische Form auf V über dem Körper F.

(a) Ein $a \in F$ wird durch $\mathfrak{b}$ bzw. φ **dargestellt**, falls es ein $v \in V$ gibt mit $\mathfrak{b}(v, v) = a$ bzw. $\varphi(v) = a$.
(b) $D_F(\mathfrak{b}) := \{\mathfrak{b}(v, v) \mid v \in V,\ \mathfrak{b}(v, v) \neq 0\}$ bzw. $D_F(\varphi) := \{\varphi(v) \mid v \in V,\ \varphi(v) \neq 0\}$ ist die Menge der von $\mathfrak{b}$ bzw. φ **dargestellten Elemente**.
(c) Wir nennen $\mathfrak{b}$ bzw. φ **universell**, wenn $D_F(\mathfrak{b}) = F^*$ bzw. $D_F(\varphi) = F^*$ gilt.
(d) Die Form $\mathfrak{b}$ bzw. φ heißt **isotrop**, wenn es ein $v \in V$ gibt mit $\mathfrak{b}(v, v) = 0$ bzw. $\varphi(v) = 0$, ansonsten **anisotrop**.

Mit diesen Definitionen ist sofort klar, dass $D_F(\mathfrak{b}) = D_F(\varphi_{\mathfrak{b}})$ gilt und offensichtlich stellen isometrische Formen die selben Elemente dar. Für die in 1.9 definierte bilineare hyperbolische Ebene gilt dann $D_F(\mathbb{H}_b) = \emptyset$.

Nun wollen wir noch eine zu Lemma 1.12 analoge Aussage für quadratische Formen formulieren.

Lemma 1.17 ([6] Lemma 3.1)
Sei φ eine nicht singuläre quadratische Form auf V der Dimension $2r$ und $v_1, \dots, v_t \in V$ mit $t \in \mathbb{N}$, $t \leq r$, $\varphi(v_i) = a_i \in F^*$ für $i = 1, \dots, t$ und $\mathfrak{b}_\varphi(v_i, v_j) = 0$ für $i, j \in \{1, \dots, t\}$ mit $i \neq j$. Sind die Vektoren $v_1 \dots, v_t$ linear unabhängig, so existieren $b_1, \dots, b_t \in F$ und eine nicht singuläre quadratische Form φ' der Dimension $2(r-t)$ mit

$$[a_1, b_1] \perp \dots \perp [a_t, b_t] \perp \varphi' \cong \varphi\,.$$

Insbesondere existiert für ein $a \in F^*$ und eine nicht singuläre quadratische Form φ genau dann ein passendes $b \in F$ und eine passende nicht singuläre quadratische Form ψ mit $\varphi \cong [a, b] \perp \psi$, wenn $a \in D_F(\varphi)$ gilt.

Beweis: Wir beweisen die Aussage mit Induktion über t. Für $t = 1$ existiert zu $v_1 \neq 0$ ein linear unabhängiges $w_1 \in V$ mit $\mathfrak{b}_\varphi(v_1, w_1) \neq 0$, also passend skaliert $\mathfrak{b}_\varphi(v_1, w_1) = 1$. Setzt man nun $b_1 := \varphi(w_1)$ und $U := \mathrm{sp}(v_1, w_1)$, so enthält φ den orthogonalen Summanden $\varphi_{|U} \cong [a_1, b_1]$ und die Aussage ist mit $\varphi' := \varphi_{|U^\perp}$ gezeigt. Sei also nun $t \geq 2$. Da die $v_1, \dots, v_t$ linear unabhängig sind, ist $\mathrm{sp}(v_1) \not\subseteq \mathrm{sp}(v_2, \dots, v_t)$ und damit dann $\mathrm{sp}(v_2, \dots, v_t)^\perp \not\subseteq \mathrm{sp}(v_1)^\perp$. Sei $w_1 \in \mathrm{sp}(v_2, \dots, v_t)^\perp$ mit $w_1 \notin \mathrm{sp}(v_1)^\perp$. Dann ist der Unterraum $\mathrm{sp}(v_1, w_1)$ nicht singulär, da $\mathfrak{b}_\varphi(v_1, w_1) \neq 0$ gilt und es folgt $V = \mathrm{sp}(v_1, w_1) \perp \mathrm{sp}(v_1, w_1)^\perp$. Nach passendem Skalieren von w_1 gilt wieder $\varphi_{|\mathrm{sp}(v_1, w_1)} = [a_1, b_1]$ mit $b_1 := \varphi(w_1)$ und die Behauptung folgt durch Anwenden der Induktionsvoraussetzung auf $\varphi_{|\mathrm{sp}(v_1, w_1)^\perp}$. $\square$

Bemerkung 1.18
Eine ähnliche Aussage wie Lemma 1.17 lässt sich dabei auch für beliebige quadratische Formen φ formulieren. Ist $a \in D_F(\varphi)$, so gibt es stets eine Darstellung $\varphi \cong [a_1, b_1] \perp \dots \perp [a_r, b_r] \perp \langle c_1, \dots, c_s \rangle$ mit $a_i, b_i, c_j \in F$ für $i = 1, \dots, r$ und $j = 1, \dots, s$, in der mindestens eines der a_i, b_i oder c_j gleich a ist.

1.4 Metabolische Formen und Wittzerlegung von bilinearen Formen

Aus dem Fall Charakteristik ungleich zwei wissen wir, dass jede zweidimensionale isotrope bilineare Form eine hyperbolische Ebene ist. Im Fall Charakteristik zwei muss man die isotropen zweidimensionalen Formen noch etwas genauer unterscheiden. Dazu machen wir zunächst die folgenden Definitionen.

Definition 1.19 ([10] S. 17)
Es sei $\mathfrak{b}$ eine bilineare Form auf V.

(a) Ein Unterraum $U \subseteq V$ von V heißt **total isotrop**, wenn $\mathfrak{b}_{|U} = 0$ ist, das heißt wenn $U \subseteq U^{\perp}$ gilt.
(b) Ist $\mathfrak{b}$ nicht ausgeartet, so nennen wir $\mathfrak{b}$ **metabolisch**, wenn es einen total isotropen Unterraum U der Dimension $\dim U = \frac{1}{2} \dim V$ gibt. Diesen Unterraum nennen wir **Lagrangian**.

Da nach Lemma 1.7 $\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$ gilt, ist also für total isotrope Unterräume $U \subseteq V$ stets $\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V$ und ein Lagrangian ist damit ein maximaler total isotroper Unterraum von V.

Wir sehen also auch sofort, dass jeder metabolische Raum eine gerade Dimension besitzt und offensichtlich ist auch die orthogonale Summe von metabolischen Formen wieder metabolisch. Auch die bilineare hyperbolische Ebene $\mathbb{H}_b$ aus Definition 1.9 ist eine metabolische Form.

Definition 1.20 ([25] S. 34 Notationen)
Eine **metabolische Ebene** ist ein zweidimensionaler bilinearer, nicht ausgearteter isotroper Raum und wird mit $\mathbb{M}$ bezeichnet.

Ist $\mathbb{M}$ eine metabolische Ebene mit isotropen Vektor $u \in \mathbb{M}$, dann existiert ein $v \in \mathbb{M}$ mit $\mathfrak{b}(u,v) \neq 0$, da $\mathbb{M}$ nicht ausgeartet ist und die Vektoren u, v sind linear unabhängig, denn wäre $v = \alpha u$ für ein $\alpha \in F$, so folgt der Widerspruch $\mathfrak{b}(u,v) = \alpha\, \mathfrak{b}(u,u) = 0$. Passend skaliert gilt also $\mathfrak{b}(u,v) = 1$ und $\mathfrak{b}(v,v) = a \in F$. Dann hat $\mathfrak{b}$ bezüglich der Basis v, u die Gestalt $\mathfrak{b} \cong \left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Ist dabei $a = 0$, so ist $\mathbb{M} \cong \mathbb{H}_b$ eine hyperbolische Ebene. Ist jedoch $a \neq 0$, so hat $\mathfrak{b}$ bezüglich der Basis $\{v, au + v\}$ die Gestalt $\mathfrak{b} \cong \langle\, a, a \,\rangle_b$ und wir wollen diese Form mit $\mathbb{M}(a)$ bezeichnen. Sie ist offensichtlich nicht isometrisch zu $\mathbb{H}_b$, da $D_F(\mathbb{H}_b) = \emptyset$ und wegen $\mathbb{M}(a)((X,Y),(X,Y)) = aX^2 + aY^2 = a(X+Y)^2$ dann $D_F(\langle\, a, a \,\rangle_b) = aF^{*2}$ gilt. In Charakteristik zwei ist also nicht zwangsläufig jede isotrope zweidimensionale bilineare Form eine hyperbolische Ebene, sondern lediglich eine metabolische Ebene und die einzige nicht diagonalisierbare metabolische Ebene ist $\mathbb{H}_b$. Die Isometrie von metabolischen Ebenen ist jedoch leicht zu klassifizieren.

Lemma 1.21 ([10] Remark 1.15 (3))
Zwei metabolische Ebenen $\langle\, a, a \,\rangle_b$ und $\langle\, c, c \,\rangle_b$ mit $a, c \in F^*$ sind isometrisch, genau dann wenn $aF^{*2} = cF^{*2}$ gilt.

Wir kommen nun zu dem aus Charakteristik ungleich zwei bekanntem Abspalten von isotropen zweidimensionalen Räumen. Dazu wollen wir eine bilineare Form $\mathfrak{b}_1$ **Unterform** von der Form $\mathfrak{b}$ nennen, wenn es eine weitere bilineare Form $\mathfrak{b}_2$ gibt, sodass $\mathfrak{b} \cong \mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_2$ gilt. Dies benutzen wir im folgenden Lemma.

Lemma 1.22 ([10] Lemma 1.23)
Es sei $\mathfrak{b}$ eine isotrope nicht ausgeartete bilineare Form auf V. Dann liegt jeder isotrope Vektor in einer zweidimensionalen metabolischen Unterform von $\mathfrak{b}$. Insbesondere spaltet jede isotrope Form eine metabolische Ebene ab.

Korollar 1.23 ([10] Coro. 1.24)
Jede metabolische Form ist orthogonale Summe von metabolischen Ebenen. Insbesondere gilt für jede metabolische Form $\mathfrak{b}$ stets $\det \mathfrak{b} \in F^{*2}$.

Wir wollen nun eine abschließende Wittzerlegung für bilineare Formen formulieren. Dazu benötigen noch das folgende Lemma.

Lemma 1.24 ([10] Lemma 1.26)
Es seien $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ Bilinearformen. Sind $\mathfrak{b} \perp \mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{b}'$ metabolisch, so ist auch $\mathfrak{b}$ metabolisch.

Theorem 1.25 *Bilineare Wittzerlegung* ([10] Theo. 1.27)
Es sei $\mathfrak{b}$ eine nicht ausgeartete Bilinearform auf V. Dann existieren Unterräume $U_1, U_2 \subseteq V$ von V, sodass $\mathfrak{b}_{|U_1}$ anisotrop ist, $\mathfrak{b}_{|U_2}$ metabolisch ist und $\mathfrak{b} \cong \mathfrak{b}_{|U_1} \perp \mathfrak{b}_{|U_2}$ gilt. Dabei ist $\mathfrak{b}_{|U_1}$ bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.

Beweis: Die Existenz der Zerlegung zeigen wir mit Induktion über $\dim \mathfrak{b}$. Da jede von null verschiedene eindimensionale Form anisotrop ist, wählt man für $\dim \mathfrak{b} = 1$ die Unterräume als $U_1 = V$ und $U_2 = \{0\}$. Sei nun $\dim \mathfrak{b} = n$ und $\mathfrak{b}$ isotrop, da für anisotrope Formen wieder $U_1 = V$ und $U_2 = \{0\}$ gewählt werden kann. Nach Lemma 1.22 ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{|\mathbb{M}} \perp \mathfrak{b}_{|\mathbb{M}^\perp}$ für eine metabolische Ebene $\mathbb{M}$. Wendet man nun die Induktionsvoraussetzung auf $\mathfrak{b}_{|\mathbb{M}^\perp}$ an, folgt die Behauptung.
Zur Eindeutigkeit des anisotropen Teils nehmen wir an, dass $\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_2 \cong \mathfrak{b}'_1 \perp \mathfrak{b}'_2$ gilt mit $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}'_1$ anisotrop und $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}'_2$ metabolisch. Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{b}_1 \cong \mathfrak{b}'_1$ folgt. Die Form

$$\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}'_1 \perp \mathfrak{b}_2 \cong \mathfrak{b}'_1 \perp \mathfrak{b}'_1 \perp \mathfrak{b}'_2$$

ist metabolisch, da sowohl $\mathfrak{b}'_1 \perp \mathfrak{b}'_1$ (vergleiche dazu 2.5) als auch $\mathfrak{b}_2$ metabolisch sind. Nach Lemma 1.24 ist damit auch $\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}'_1$ metabolisch. Sei $W \subseteq V_1 \perp V'_1$ ein Lagrangian von $\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}'_1$, wobei V_1 bzw. V'_1 der $\mathfrak{b}_1$ bzw. $\mathfrak{b}'_1$ zugrundeliegende Vektorraum ist. Da

$\mathfrak{b}_1$ anisotrop ist, ist $W \cap V_1 = \{0\}$. Folglich ist die Projektion $p' : W \longrightarrow V_1'$ injektiv und damit folgt $\dim W \leq \dim \mathfrak{b}_1'$. Analog folgert man aus der Anisotropie von $\mathfrak{b}_1'$, dass auch $\dim W \leq \dim \mathfrak{b}_1$ gelten muss. Da aber W ein Lagrangian von $\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_1'$ ist, ist $\dim W = \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{b}_1 + \dim \mathfrak{b}_1'\right)$ und damit folgt dann $\dim \mathfrak{b}_1 = \dim \mathfrak{b}_1' = \dim W$. Die Projektionen $p : W \longrightarrow V_1$ und $p' : W \longrightarrow V_1'$ sind also Isomorphismen. Es seien nun $w_1 = v + v', w_2 = u + u' \in W$ mit $v, u \in V_1$ und $v', u' \in V_1'$ gegeben. Aus der Gleichung $0 = (\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_1')(w_1, w_2) = \mathfrak{b}_1(v, u) + \mathfrak{b}_1'(v', u')$ folgt nun $\mathfrak{b}_1(v, u) = \mathfrak{b}_1'(v', u')$. Damit ist also $p' \circ p^{-1} : V_1 \longrightarrow V_1'$ eine Isometrie zwischen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_1'$ und die Behauptung ist gezeigt. □

Zusammen mit Satz 1.11 und Lemma 1.23 haben wir also gezeigt, dass jede (symmetrische) Bilinearform für passende $q, r, s \in \mathbb{N}_0$ und $a_1 \ldots, a_r \in F$ isometrisch zu einer Form der Gestalt

$$\mathfrak{b} \cong q \times \langle\, 0 \,\rangle_b \perp \langle\, a_1, \ldots, a_r \,\rangle_b \perp s \times \mathbb{M},$$

wobei $\langle\, a_1, \ldots, a_r \,\rangle_b$ anisotrop ist. In dieser Zerlegung nennen wir die Form $\mathfrak{b}_{|U_1} = \langle\, a_1, \ldots, a_r \,\rangle_b =: \mathfrak{b}_{an}$ den **anisotropen Teil** von $\mathfrak{b}$ und den Wert $\frac{1}{2} \dim \mathfrak{b}_{|U_2} =: i(\mathfrak{b})$ den **Wittindex** von $\mathfrak{b}$. Er gibt für eine nicht ausgeartete Form die Dimension eines größt möglichen total isotropen Unterraums von V an.

Wir haben bereits auf Seite 11 gesehen, dass in Charakteristik zwei zwar $\langle\, 1, 1, 1 \,\rangle_b \cong \langle\, 1 \,\rangle_b \perp \mathbb{H}_b$ gilt, aber $\mathbb{H}_b$ nicht isometrisch zu der Form $\langle\, 1, 1 \,\rangle_b$ ist. Dieses einfache Beispiel zeigt einerseits, dass der metabolische Anteil in der Zerlegung aus Theorem 1.25 nicht eindeutig ist, und andererseits auch, dass der Witt'sche Kürzungssatz für bilineare Formen im Allgemeinen nicht richtig ist. Es gilt jedoch die nachfolgende abgeschwächte Version des Satzes.

Korollar 1.26 *Bilinearer Witt'scher Kürzungssatz* ([10] Coro. 1.28)
Es seien $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ nicht ausgeartete Bilinearformen mit $\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b} \cong \mathfrak{b}_2 \perp \mathfrak{b}$. Sind $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ anisotrop, so gilt $\mathfrak{b}_1 \cong \mathfrak{b}_2$.

Beweis: Es ist $\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b} \perp \mathfrak{b} \cong \mathfrak{b}_2 \perp \mathfrak{b} \perp \mathfrak{b}$, dabei ist $\mathfrak{b} \perp \mathfrak{b}$ metabolisch und die Formen $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ anisotrop. Nach Theorem 1.25 folgt dann $\mathfrak{b}_1 \cong \mathfrak{b}_2$. □

1.5 Wittzerlegung und Witt'scher Kürzungssatz für quadratische Formen

Analog zum vorherigen Abschnitt wollen wir nun auch für quadratische Formen eine Strukturzerlegung beweisen, die uns nachher helfen wird die Wittgruppe mit zugehöriger Wittäquivalenz zu definieren.

Definition 1.27 ([25] S. 36, [10] S. 40)

(a) Eine nicht singuläre zweidimensionale quadratische Form φ heißt **hyperbolische Ebene**, wenn sie von der Form $[0,0]$ ist, das heißt eine Basis e, f besitzt für die $\varphi(e) = \varphi(f) = 0$ und $\mathfrak{b}_\varphi(e,f) = 1$ gilt. Diese wird mit $\mathbb{H}$ bezeichnet und die Vektoren e, f heißen **hyperbolisches Paar**.

(b) Eine quadratische Form heißt **hyperbolisch**, wenn sie Summe von hyperbolischen Ebenen ist.

In der polynomiellen Darstellung hat eine hyperbolische Ebene folglich die Gestalt $\varphi(X,Y) = XY$ und ist damit offensichtlich universell.

Satz 1.28 ([10] Prop. 7.13)
Ist φ eine reguläre isotrope quadratische Form auf V, so existiert ein zweidimensionaler Unterraum $U \subseteq V$ von V mit $\varphi_{|U} \cong \mathbb{H}$. Insbesondere spaltet jede isotrope reguläre quadratische Form eine hyperbolische Ebene ab.

Beweis: Sei $0 \neq v \in V$ ein isotroper Vektor von φ. Da $\operatorname{rad}\varphi = \{0\}$ gilt, ist $v \notin \operatorname{rad}\mathfrak{b}_\varphi$. Also existiert ein $u \in V$ mit $\mathfrak{b}_\varphi(v,u) \neq 0$, passend skaliert gilt also $\mathfrak{b}_\varphi(v,u) = 1$. Betrachten wir nun den zweidimensionalen nicht singulären Raum $U := Fv \oplus Fu$, so hat $\varphi_{|U}$ in der Basis $v, u + \varphi(u)v$ die Gestalt $\varphi_{|U} \cong [0,0] \cong \mathbb{H}$. □

Mit diesem Beweis ist auch sofort klar, dass jede reguläre zweidimensionale isotrope quadratische Form eine hyperbolische Ebene ist. Eine Unterscheidung in metabolisch und hyperbolisch wie bei den bilinearen Formen ist bei den quadratischen Formen also nicht nötig. Wie auch schon bei den bilinearen Formen ist der Witt'sche Kürzungssatz nicht im Allgemeinen gültig. Betrachten wir dazu die dreidimensionale quadratische Form $[1,1] \perp \langle 1 \rangle$ in der Basis e, f, g. In der Basis $e+g, f, g$ hat diese Form die Gestalt $[0,1] \perp \langle 1 \rangle$ und da $[0,1]$ offensichtlich isotrop ist, ist diese Form damit isometrisch zu $\mathbb{H} \perp \langle 1 \rangle$. Nun ist aber $[1,1]$ zum Beispiel über dem Körper $\mathbb{F}_2$ anisotrop, wie man sehr leicht nachrechnen kann, also $[1,1] \ncong \mathbb{H}$. Dieses simple Beispiel zeigt bereits, dass man das Wittkürzen nicht wie in Charakteristik ungleich zwei verwenden kann. Es zeigt zudem auch, dass der nicht singuläre Anteil einer quadratischen Form im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist. Um nun aber dennoch eine Charakteristik zwei Version des Kürzungssatzes formulieren zu können betrachten wir für einen anisotropen Vektor $v \in V$ einer quadratischen Form φ auf V die involutorische Abbildung

$$\tau_v : (\varphi, V) \longrightarrow (\varphi, V), w \longmapsto w - \frac{\mathfrak{b}_\varphi(v,w)}{\varphi(v)} v.$$

Diese ist offensichtlich eine Isometrie von φ und gilt für zwei Vektoren $v, v' \in V$ $\varphi(v) = \varphi(v')$ und ist $\bar{v} := v - v'$ ein anisotroper Vektor von φ, so lässt sich leicht nachrechnen, dass $\tau_{\bar{v}}(v) = v'$ gilt.

Die Abbildungen τ_v werden wir für unsere nachfolgenden Sätze benötigen. Das nun folgende Lemma klärt zunächst den Fall, falls $\bar{v}$ kein anisotroper Vektor ist.

Lemma 1.29 ([10] Lemma 8.2)
Sei φ eine quadratische Form auf V, $v, v' \in V$ mit $\varphi(v) = \varphi(v')$ und $\bar{v} := v - v'$ sei ein isotroper Vektor. Ist $w \in V$ anisotroper Vektor, der $\mathfrak{b}_\varphi(w, v), \mathfrak{b}_\varphi(w, v') \neq 0$ erfüllt, so ist $w' = v - \tau_w(v')$ ein anisotroper Vektor und es gilt $(\tau_w \circ \tau_{w'})(v) = v'$.

Insbesondere gibt es zu zwei Vektoren $v, v' \in V$ mit $\varphi(v) = \varphi(v')$ stets eine Isometrie τ von φ mit $\tau(v) = v'$.

Dieses Lemma nutzt man nun, um die folgenden Aussage zu beweisen.

Theorem 1.30 *Witterweiterung* ([10] Theo. 8.3)
Es seien φ und φ' isometrische quadratische Formen auf V bzw. V' und $W \subseteq V$ bzw. $W' \subseteq V'$ Unterräume von V bzw. V' mit $W \cap \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi = \{0\}$ und $W' \cap \operatorname{rad} \mathfrak{b}_{\varphi'} = \{0\}$. Gibt es eine Isometrie $\alpha : \varphi_{|W} \longrightarrow \varphi'_{|W'}$, so existiert eine Isometrie $\tilde{\alpha} : \varphi \longrightarrow \varphi'$ mit $\tilde{\alpha}_{|W} = \alpha$.

Sind dabei insbesondere φ und φ' isometrische nicht singuläre quadratische Formen, so lässt sich eine Isometrie auf Unterräumen $W \subseteq V$ und $W' \subseteq V'$ stets erweitern zu einer Isometrie von φ und φ'.

Mit Hilfe dieses Erweiterungssatzes können wir nun auch das Kürzen von quadratischen Formen formulieren und leicht beweisen.

Theorem 1.31 *Quadratischer Witt'scher Kürzungssatz* ([10] Theo. 8.4)
Es seien φ und φ' zwei beliebige quadratische Formen und ψ eine nicht singuläre quadratische Form mit $\varphi \perp \psi \cong \varphi' \perp \psi$. Dann folgt $\varphi \cong \varphi'$.

Wir können also den Witt'schen Kürzungssatz nicht im Allgemeinem verwenden, aber für nicht singulären Formen ist er gültig. Für eine abschließende Wittzerlegung benötigen wir noch ein letztes Lemma.

Lemma 1.32 ([13] Prop. 2.6)
Es seien φ und φ' zwei reguläre quadratische Formen der selben Dimension mit $\varphi \perp j \times \langle\, 0 \,\rangle \cong \varphi' \perp j \times \langle\, 0 \,\rangle$. Dann gilt $\varphi \cong \varphi'$.

Theorem 1.33 *Quadratische Wittzerlegung* ([13] Prop. 2.4)
Es sei φ eine quadratische Form über dem Körper F. Dann existieren Unterräume $U_1, U_2 \subseteq V$, sodass $\varphi_{|U_1} =: \widetilde{\varphi}_r$ nicht singulär ist, $\varphi_{|U_2} =: \widetilde{\varphi}_s$ total singulär ist, $\widetilde{\varphi}_r \perp \widetilde{\varphi}_s$ anisotrop ist und $\varphi \cong i \times \mathbb{H} \perp \widetilde{\varphi}_r \perp \widetilde{\varphi}_s \perp j \times \langle\, 0 \,\rangle$ gilt. Die Werte $i, j \in \mathbb{N}$ und die Form $\widetilde{\varphi}_r \perp \widetilde{\varphi}_s$ sind dabei bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.

Beweis: Die Existenz einer solchen Zerlegung folgt sofort aus Lemma 1.5 zusammen mit Satz 1.28.

Nun zur Eindeutigkeit der Zerlegung. Bei obiger Zerlegung ist $\widetilde{\varphi}_s \perp j \times \langle\, 0 \,\rangle$ der diagonalisierbare und damit total singuläre Anteil von φ und damit folgt sofort, dass $j = \dim \operatorname{rad} \varphi$ ist. Also ist j eindeutig bestimmt und damit ist auch $\widetilde{\varphi}_s$ bis auf Isometrie eindeutig. Es reicht also zu zeigen, dass aus

$$\varphi \cong i \times \mathbb{H} \perp \widetilde{\varphi}_r \perp \widetilde{\varphi}_s \perp j \times \langle\, 0 \,\rangle \cong i' \times \mathbb{H} \perp \widetilde{\varphi}'_r \perp \widetilde{\varphi}_s \perp j \times \langle\, 0 \,\rangle \tag{1.2}$$

mit nicht singulären Formen $\widetilde{\varphi}_r, \widetilde{\varphi}'_r$ und anisotropen Formen $\widetilde{\varphi}_r \perp \widetilde{\varphi}_s, \widetilde{\varphi}'_r \perp \widetilde{\varphi}_s$ stets $\widetilde{\varphi}_r \perp \widetilde{\varphi}_s \cong \widetilde{\varphi}'_r \perp \widetilde{\varphi}_s$ folgt. Nach Lemma 1.32 folgt aus Gleichung (1.2) dann zunächst $i \times \mathbb{H} \perp \widetilde{\varphi}_r \perp \widetilde{\varphi}_s \cong i' \times \mathbb{H} \perp \widetilde{\varphi}'_r \perp \widetilde{\varphi}_s$ und da $\mathbb{H}$ nicht singulär ist, mit 1.31 schließlich $i = i'$ und $\widetilde{\varphi}_r \perp \widetilde{\varphi}_s \cong \widetilde{\varphi}'_r \perp \widetilde{\varphi}_s$. □

In der Zerlegung aus 1.33 nennen wir $\widetilde{\varphi}_r \perp \widetilde{\varphi}_s =: \varphi_{an}$ den **anisotropen Teil** von φ. Die Werte i bzw. j heißen der **Wittindex** von φ, bzw. der **Defekt** von φ und sie werden mit $i_W(\varphi) := i$ und $i_{ql}(\varphi) := j$ bezeichnet und die Form $i \times \mathbb{H} \perp \varphi_{an}$ heißt **regulärer** oder **nicht defekter Anteil** von φ.

Der Wert $i_W(\varphi) + i_{ql}(\varphi) =: i_{ti}(\varphi)$ heißt **totaler Isotropie Index von** φ und entspricht genau der Dimension eines maximalen total isotropen Unterraums von φ, wie wir in Kapitel 1.7 noch sehen werden.

1.6 Nützliche Isometrien und die Arf-Invariante

In diesem Kapitel wollen wir uns nun mit einigen im weiteren Verlauf der Arbeit nützlichen Isometrien befassen und dazu noch zwei Invarianten der Isometrieklassen von nicht singulären quadratischen Formen und nicht ausgearteten bilinearen Formen einführen. Im Fall Charakteristik ungleich zwei nutze man die Determinante als Invariante, aber da eine Zuordnung von quadratischen Formen und Matrizen nicht möglich ist, scheidet diese für Charakteristik zwei als Invariante von quadratischen Formen aus. Wie man dieses Problem umgeht werden wir gleich betrachten, zunächst wollen wir jedoch einige sehr nützliche Isometrien für quadratische und bilineare Formen formulieren, auf die wir von nun an immer wieder zurückgreifen werden.

Satz 1.34 ([13] S. 4022)
Für alle $a, b, c, d \in F$ und $x \in F^*$ gilt

(a) $\langle a \rangle_b \cong \langle x^2 a \rangle_b$, $\langle a \rangle \cong \langle x^2 a \rangle$, $[a, b] \cong [x^2 a, x^{-2} b]$
(b) $\langle a, b \rangle \cong \langle a, a + b \rangle \cong \langle b, a \rangle$, $[a, b] \cong [a, a + b + 1] \cong [b, a]$
(c) $[a, b] \perp \langle c \rangle \cong [a + c, b] \perp \langle c \rangle \cong [a, b + c] \perp \langle c \rangle$
(d) $[a, b] \perp [c, d] \cong [a + c, b] \perp [c, b + d]$
(e) $[a, b] \cong a[1, ab]$
(f) *Für jede bilineare Form $\mathfrak{b}$ und jede quadratische Form φ ist $a^2\, \mathfrak{b} \cong \mathfrak{b}$ und $a^2\, \varphi \cong \varphi$.*

Dabei wird in (e) und (f) benutzt, dass mit φ auch $a\,\varphi$ eine quadratische Form ist.

Mit diesen Isometrien kann man nun sofort sehen, dass für eine quadratische Form $[a, b]$ stets gilt

$$[a, b] \perp [a, b] \overset{(d)}{\cong} [0, b] \perp [a, 0] \overset{1.28}{\cong} \mathbb{H} \perp \mathbb{H}\,.$$

Wir haben bereits in den ersten Kapiteln gesehen, dass, wenn wir die Determinante einer bilinearen Form in F^*/F^{*2} definieren, diese dann wohldefiniert und damit eine Invariante der Isometrieklasse einer bilinearen Form ist. Nutzen wir dies nun zusammen mit Lemma 1.12 aus, so erhalten wir das folgende Lemma.

Lemma 1.35 ([10] Lemma 4.1)
Ist $\langle a, b \rangle_b$ eine anisotrope bilineare Form über F mit $a, b \in F$, so gilt

$$\langle a, b \rangle_b \cong \langle a + b, ab(a + b) \rangle_b\,.$$

Die Frage ob zwei gegebene quadratische Formen isometrisch sind, ist im Allgemeinen nicht leicht zu beantworten. Sie reduziert sich jedoch im Falle von total singulären Formen auf die Frage nach Erzeugendensystemen und Basen. Dies liegt an der Tatsache, dass für jeden Körper F der Charakteristik zwei die Menge F^2 ein Unterkörper von F ist, was sich auf die Additivität der Frobeniusabbildung zurückführen lässt, das heißt für alle $a, b \in F$ gilt stets $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Also können wir den Körper F als Vektorraum über dem Körper F^2 auffassen und dies liefert den folgenden Satz.

Satz 1.36 ([13] S. 4023)
Es seien $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\psi = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ zwei total singuläre quadratische Formen

der selben Dimension über dem Körper F. Dann ist

$$\varphi \cong \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{sp}_{F^2}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{sp}_{F^2}(b_1, \dots, b_n).$$

Dabei entspricht $\mathrm{sp}_{F^2}(a_1, \dots, a_n)$ genau der Menge $D_F(\varphi) \cup \{0\}$ und analoges gilt natürlich für ψ. Zwei total singuläre Formen der selben Dimension sind also genau dann isometrisch, wenn sie die selben Elemente darstellen. Dies kann man auch nutzen, um bei einer gegeben total singulären Form den Defekt zu bestimmen. Dieser entspricht dann genau $i_{ql}(\varphi) = \dim_F \varphi - \dim_{F^2}(\mathrm{sp}_{F^2}(a_1, \dots, a_n))$. Analog kann man Satz 1.36 auch nutzen, um das folgende Korollar zu beweisen.

Korollar 1.37 ([21] Lemma 2.1)
Es sei $\varphi = \langle\, a_1, \dots, a_n \,\rangle$ eine n-dimensionale total singuläre quadratische Form über F und $b_1, \dots, b_s \in D_F(\varphi)$ für $s \leq n$. Ist die Form $\langle\, b_1, \dots, b_s \,\rangle$ anisotrop, so existiert eine total singuläre anisotrope quadratische Form χ über F mit $\langle\, b_1, \dots, b_s \,\rangle \perp \chi \cong \varphi_{an}$.

Zusammenfassend gilt also das folgende Korollar.

Korollar 1.38 ([13] Prop. 8.1)
Es existiert ein Bijektion zwischen der Menge {Isometrieklassen von total singulären Formen} und der Menge {endlich dimensionale F^2 Vektorräumen in F} $\times \mathbb{N}_0$ gegeben durch

$$\begin{gathered} \varphi \longrightarrow (D_F(\varphi) \cup \{0\}, i_{ql}(\varphi)) \\ \langle\, a_1, \dots, a_n \,\rangle \perp m \times \langle\, 0 \,\rangle \longleftarrow (V, m) \textit{ mit einer } F^2-\textit{Basis } \{a_1, \dots, a_n\} \textit{ von } V. \end{gathered}$$

Wir kommen nun zu der angesprochen Invarianten von nicht singulären quadratischen Formen. Dazu betrachten wir die **Artin-Schreier Abbildung**

$$\wp : F \longrightarrow F \quad , \quad x \longmapsto x^2 + x.$$

In Körpern der Charakteristik zwei ist dies ein additiver Homomorphismus und die Menge $\wp(F)$ ist damit eine Untergruppe von $(F, +)$. Zu jedem Element $\alpha \in F \setminus \wp(F)$ existiert dann ein β im algebraischen Abschluss von F, dass $\beta^2 + \beta = \alpha$, das heißt $\wp^{-1}(\alpha) = \beta$ erfüllt. Dieses liefert dann durch $F(\wp^{-1}(\alpha))$ eine separable Körpererweiterung vom Grad zwei, erzeugt durch das über F irreduzible Polynom $X^2 + X + \alpha \in F[X]$.

Wir wollen nun mit Hilfe der Menge $\wp(F)$ die sogenannte Arf-Invariante einer nicht singulären quadratischen Form definieren. Wie schon die Determinante bei den Bilinearformen nur bis auf Quadrate eindeutig war, so wird die Arf-Invariante nur eindeutig bis auf Elemente aus $\wp(F)$ sein. Dazu die folgende Definition.

Satz und Definition 1.39 ([26] S. 340 Theo. 4.2 und Def. 4.3)
Es sei φ eine nicht singuläre quadratische Form, die bezüglich der Basis $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$ die Gestalt $\varphi = [a_1, b_1] \perp \ldots \perp [a_n, b_n]$ hat. Dann ist die **Arf-Invariante** *$\Delta(\varphi)$ definiert durch*

$$\Delta(\varphi) := \varphi(e_1)\,\varphi(f_1) + \ldots + \varphi(e_n)\,\varphi(f_n) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \in F/\wp(F).$$

Diese ist eine Invariante der Isometrieklasse von φ und damit unabhängig von der Wahl der Basis $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$.

Für die Arf-Invariante gilt offensichtlich $\Delta(\varphi_1 \perp \varphi_2) = \Delta(\varphi_1) + \Delta(\varphi_2)$ und für hyperbolische φ gilt stets $\Delta(\varphi) = 0$. Sie wurde von Cahit Arf in seiner Arbeit „Untersuchungen über quadratische Formen über Körpern der Charakteristik 2 (Teil I.)“ [5] eingeführt, in der er viele Grundlagen der heutigen Theorie schuf. Die Arf-Invariante ist das Charakteristik zwei Analogon zur Diskriminanten, die in Charakteristik zwei, wie schon gesagt, nicht wohldefiniert ist.

Mit Hilfe dieser Invarianten können wir nun die Isometrieklassen von zweidimensionale Formen klassifizieren. Dazu das folgende Lemma.

Lemma 1.40 ([26] S. 341 Lemma 4.4)

(a) Es seien φ_1 und φ_2 zweidimensionale nicht singuläre quadratische Formen. Dann gilt

$$\varphi_1 \cong \varphi_2 \Longleftrightarrow \Delta(\varphi_1) = \Delta(\varphi_2) \in F/\wp(F) \text{ und } D_F(\varphi_1) \cap D_F(\varphi_2) \neq \emptyset.$$

(b) Für $a, b \in F$ ist $[1, a] \cong [1, b]$ genau dann, wenn $a = b \in F/\wp(F)$ gilt.

(c) Ist φ eine zweidimensionale nicht singuläre quadratische Form, so ist $\varphi \cong \mathbb{H}$ genau dann, wenn $\Delta(\varphi) = 0$ gilt.

(d) Es sei $a \in F^*$ und φ eine nicht singuläre quadratische Form über F, dann ist $\Delta(a\,\varphi) = \Delta(\varphi)$.

Beweis: In (a) ist die Richtung ($\Rightarrow$) offensichtlich wahr. Beweisen wir also die umgekehrte Richtung. Sei φ_1 eine Form auf dem Vektorraum V_1, φ_2 Form auf V_2 und $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ Vektoren mit $\varphi_1(v_1) = \varphi_2(v_2) = \alpha$. Ist $\alpha = 0$, so sind beide Formen isotrop, damit isometrisch zu $\mathbb{H}$ und es ist nichts zu zeigen. Also sei $\alpha \neq 0$. Da die Formen nicht singulär sind, kann man Basen v_i, w_i von V_i für $i = 1, 2$ wählen, in denen die Formen die Gestalt $\varphi_1 = [\alpha, \beta_1]$ bzw. $\varphi_2 = [\alpha, \beta_2]$ besitzen. Nach Voraussetzung existiert dann ein $\gamma \in F$ mit $\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2 + \gamma^2 + \gamma$. Ersetzt man nun w_2 durch den Vektor $w_2' := \frac{\gamma}{\alpha} v_2 + w_2 \in V_2$, so ergibt sich $\mathfrak{b}_{\varphi_2}(v_2, w_2) = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot 0 + 1 = 1$ und $\varphi_2(w_2') = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\alpha + \beta_2 + 1 \cdot \frac{\gamma}{\alpha} = \beta_1$. Damit ist also $\varphi_2 \cong [\alpha, \beta_1] = \varphi_1$.

Die Aussage (b) folgt sofort mit (a).

In (c) ist wegen $\Delta([0, 0]) = 0$ die erste Richtung sofort klar. Die Umkehrung folgt aus (a), zusammen mit der Tatsache, dass $\mathbb{H}$ universell ist.

Für (d) sei $\varphi = [a_1, b_1] \perp \ldots \perp [a_n, b_n]$ mit $\Delta(\varphi) = \sum_{i=1}^r a_i b_i$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\Delta(a\,\varphi) &= \Delta(a\,([a_1, b_1] \perp \ldots \perp [a_n, b_n])) \\
&\overset{1.34}{=} \Delta([aa_1, \frac{b_1}{a}] \perp \ldots \perp [aa_n, \frac{b_n}{a}]) \\
&= \sum_{i=1}^r aa_i \frac{b_i}{a} = \sum_{i=1}^r a_i b_i = \Delta(\varphi).
\end{aligned}$$

□

Aus Lemma 1.40(b) folgt damit sofort $[1, a] \cong [1, a^2]$ für alle $a \in F$, da in F die Gleichung $a = a^2 + a^2 + a$ gilt. Dabei gilt natürlich auch für bilineare Formen die folgende zu Lemma 1.40 analoge und allgemein bekannte Aussage.

Lemma 1.41 ([10] Ex. 1.10)

(a) Es seien $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ zweidimensionale nicht hyperbolische bilineare Formen. Dann gilt

$$\mathfrak{b}_1 \cong \mathfrak{b}_2 \iff \det \mathfrak{b}_1 = \det \mathfrak{b}_2 \in F^*/F^{*2} \text{ und } D_F(\mathfrak{b}_1) \cap D_F(\mathfrak{b}_2) \neq \emptyset.$$

(b) Für $a, b \in F$ ist $\langle 1, a \rangle_b \cong \langle 1, b \rangle_b$ genau dann, wenn $a = b \in F^*/F^{*2}$ gilt.

(c) Ist $\mathfrak{b}$ eine zweidimensionale bilineare Form, so ist $\mathfrak{b}$ metabolisch genau dann, wenn $\det \mathfrak{b} \in F^{*2}$ ist.

Mit Hilfe der Arf-Invarianten können wir nun schon einige quadratische Formen klassifizieren, wenn wir noch zusätzliche Anforderungen an den Grundkörper F stellen.

Satz 1.42 ([26] S. 342 Theo. 4.5)
Es sei F ein perfekter Körper (das heißt es gilt $F^2 = F$), φ eine nicht singuläre quadratische Form auf dem Vektorraum V der Dimension $\dim \varphi = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\Delta(\varphi)$

die Arf-Invariante von φ. Dann ist

$$\varphi \cong (n-1) \times \mathbb{H} \perp [1, \Delta(\varphi)].$$

Insbesondere sind quadratische Formen über perfekten Körpern eindeutig bestimmt durch ihre Dimension und ihre Arf-Invariante.

Beweis: Ist $a \in D_F(\varphi)$, so existiert ein $u \in V$ mit $\varphi(u) = a$. Da F perfekt ist, ist $a = c^2$ für ein $c \in F^*$. Damit folgt dann $\varphi(\frac{1}{c}u) = \frac{1}{c^2}a = 1$ und wir können annehmen, dass φ die 1 darstellt.

Es sei nun $n = 1$ und $\varphi(v) = 1$ für $v \in V$. Dann folgt aus Lemma 1.17 und Dimensionsgründen $\varphi \cong [1, \Delta(\varphi)]$.

Sei also nun $\dim \varphi = 2n \geq 4$. Da weiterhin φ das Element 1 darstellt, kann man nach 1.17 einen Unterraum der Form $[1, d]$ abspalten, mit $d \in F$. Dies ist aus Dimensionsgründen noch mindestens ein weiteres Mal möglich, sodass man eine Zerlegung der Form $\varphi \cong [1, d] \perp [1, e] \perp \varphi'$ mit $e \in F$ und einer nicht singulären quadratischen Form φ' erhält. Nach Satz 1.34 ist dann

$$\varphi \cong [0, d] \perp [1, d+e] \perp \varphi' \cong \mathbb{H} \perp [1, d+e] \perp \varphi' \cong \mathbb{H} \perp \varphi'',$$

mit einer weiteren quadratischen Form φ'' der Dimension $2n-2$, die $\Delta(\varphi'') = \Delta(\varphi)$ erfüllt. Induktion über n liefert dann die Behauptung. $\square$

Dies wird uns helfen im nächsten Kapitel die Wittgruppe für endliche Körper zu bestimmen, da diese natürlich perfekt sind. Mit Hilfe der Arf-Invarianten können noch weitere Aussagen getroffen werden, etwa über die Clifford Algebra einer quadratischen Form. Dies würde aber an dieser Stelle zu weit von unserem Ziel wegführen und darum soll es hier nicht gezeigt werden. Vergleiche dazu etwa [26, S. 342].

1.7 Total isotrope Unterräume von quadratischen Formen

Wir haben bereits in dem Abschnitt über die bilineare Wittzerlegung gesehen, dass der Wittindex einer bilinearen Form genau der Dimension eines maximalen metabolischen Unterraums entspricht. Eine ähnliche Aussage wollen wir nun zum Abschluss dieses Kapitels auch für quadratische Formen zeigen. Dazu machen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 1.43 ([10] S. 41)
Es sei φ eine quadratische Form auf dem Vektorraum V und $W \subseteq V$ ein Unterraum von V. Der Raum W heißt **total isotrop**, wenn $\varphi(w) = 0$ für alle $w \in W$ gilt.

Natürlich gilt, analog zu den bilinearen Formen, dass ein total isotroper Unterraum $U \subseteq V$ des regulären quadratischen Raumes (φ, V) maximal die Dimension $\frac{1}{2} \dim \varphi$ besitzen kann.

Lemma 1.44 ([10] Lemma 8.10)
Es sei φ eine reguläre quadratische Form auf V und $W \subseteq V$ ein total isotroper Unterraum der Dimension m. Weiter sei ψ die quadratische Form auf $W^\perp/W$, die durch Restriktion von φ auf $W^\perp/W$ entsteht. Dann ist $\varphi \cong \psi \perp m \times \mathbb{H}$.

Insbesondere enthält eine reguläre quadratische Form genau dann einen total isotropen Unterraum der Dimension $\frac{1}{2} \dim \varphi$, wenn sie hyperbolisch (und damit nicht singulär) ist.

Satz 1.45 ([10] Prop. 8.11)
Es sei φ eine quadratische Form auf V. Dann ist jeder total isotrope Unterraum in einem total isotropen Unterraum der Dimension $i_{ti}(\varphi) = i_W(\varphi) + i_{ql}(\varphi)$ enthalten. Insbesondere ist die maximale Dimension eines total isotropen Unterraums gegeben durch $i_{ti}(\varphi)$.

Eine Basis eines maximalen total isotropen Unterraums einer quadratischen Form erhält man dann wie folgt. Ist $e_1, f_1, \ldots, e_t, f_t$ eine Basis des hyperbolische Anteils $t \times \mathbb{H}$ einer quadratischen Form φ, so ist $e_1, \ldots, e_t$ zusammen mit jeder Basis von $\operatorname{rad} \varphi$ eine Basis eines total isotropen Unterraums der Dimension $i_{ti}(\varphi)$.

2 Der Wittring und die Wittgruppe

Wie wir schon in Kapitel 1 gesehen haben, ist die Theorie der bilinearen Formen und der quadratischen Formen über einen Körper der Charakteristik zwei zu trennen. Da man in Charakteristik ungleich zwei das Produkt von zwei quadratischen Formen über ihre zugehörigen Bilinearformen definiert, ist ein solches multiplizieren in unserem Fall nicht möglich. Darum werden wir auch hier zwei verschiedene Konstrukte für die Bilinearformen und die quadratischen Formen benötigen.

Für den Rest der Arbeit seinen die Bilinearformen, zusätzlich zur Symmetrie, wenn nicht anders beschrieben, noch stets nicht ausgeartet und die quadratischen Formen von nun an stets regulär. Damit sind insbesondere von nun an alle total singulären Formen anisotrop. Im Laufe der Arbeit werden wir an geeigneten Stellen durch eingeklammerte Formulierungen diese Voraussetzungen noch einmal betonen.

2.1 Definition des Wittrings und der Wittgruppe

Definition 2.1 ([7] S. 5 Def. 2.2, Def. 2.3)

(a) Es seien $(\mathfrak{b}_1, V_1), (\mathfrak{b}_2, V_2)$ zwei bilineare Räume. Das Produkt $(\mathfrak{b}_1, V_1) \otimes (\mathfrak{b}_2, V_2) := (\mathfrak{b}_1 \otimes \mathfrak{b}_2, V_1 \otimes V_2)$ ist definiert durch

$$(\mathfrak{b}_1 \otimes \mathfrak{b}_2)\left(\sum_i x_i \otimes y_i, \sum_j v_j \otimes w_j\right) := \sum_{i,j} \mathfrak{b}_1(x_i, v_j) \cdot \mathfrak{b}_2(y_i, w_j).$$

Die Form $\mathfrak{b}_1 \otimes \mathfrak{b}_2$ ist offensichtlich wieder eine symmetrische Bilinearform auf dem Vektorraum $V_1 \otimes V_2$.

(b) Es sei $(\mathfrak{b}, V_1)$ ein bilinearer Raum und (φ, V_2) ein quadratischer Raum. Wir definieren das Produkt $(\mathfrak{b}, V_1) \otimes (\varphi, V_2) := (\mathfrak{b} \otimes \varphi, V_1 \otimes V_2)$ durch

$$(\mathfrak{b} \otimes \varphi)\,(v \otimes w) := \mathfrak{b}(v, v)\,\varphi(w).$$

Dabei ist die zugehörige bilineare Form gegeben durch $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{b}_\varphi$ und diese nutzt man zur Definition von $\mathfrak{b} \otimes \varphi$ auf Summen von Tensoren. Offensichtlich ist die auf diese Weise definierte Form $\mathfrak{b} \otimes \varphi$ wieder eine quadratische Form auf dem Vektorraum $V_1 \otimes V_2$.

Diese Definition ist zwar auch für ausgeartete Bilinearformen und nicht reguläre quadratische Formen möglich, aber wir werden sie hauptsächlich im Falle von nicht ausgearteten

Bilinearformen bzw. nicht singulären quadratischen Formen verwenden, darum brauchen wir uns diesbezüglich keine Gedanken zu machen.

Es ist leicht zu sehen, dass beide eben definierten Verknüpfungen assoziativ und distributiv bezüglich der orthogonalen Summe sind. Das Produkt von Bilinearformen ist dabei noch kommutativ.

Ein Produkt wie in Charakteristik ungleich zwei von zwei quadratischen Formen ist dabei nicht möglich, da man um das Produkt von φ_1 und φ_2 zu bestimmen 2.1(a) auf die zugehörigen polaren Formen anwendet und dann wieder zur quadratischen Form übergeht. Da aber $\mathfrak{b}_{\varphi_1}$ und $\mathfrak{b}_{\varphi_2}$ alternierend sind, wäre dieses Produkt stets die Nullform.

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass falls $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthogonalbasis von $(\mathfrak{b}_1, V_1)$ und $f_1, \ldots, f_m$ eine Orthogonalbasis von $(\mathfrak{b}_2, V_2)$ ist, so ist $\{e_i \otimes f_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ eine orthogonale Basis von $V_1 \otimes V_2$. Insbesondere gilt also das Folgende.

Bemerkung und Notation 2.2 ([7] S. 17 Coro. 4.7)
Es seien $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ zwei Bilinearformen und φ eine nicht singuläre quadratische Form.

(a) Ist $\mathfrak{b}_1 = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_b$, $\mathfrak{b}_2 = \langle c_1, \ldots, c_m \rangle_b$ und $\varphi = [d_1, e_1] \perp \ldots \perp [d_r, e_r]$ für passende $a_i, c_j, d_k, e_k \in F$ mit $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, r$ so gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_1 \otimes \mathfrak{b}_2 &\cong \langle a_1c_1, \ldots, a_1c_m, a_2c_1, \ldots, \ldots, a_nc_m \rangle_b \qquad \text{und} \\ \mathfrak{b}_1 \otimes \varphi &\cong a_1[d_1, e_1] \perp \ldots \perp a_n[d_1, e_1] \perp a_1[d_2, e_2] \perp \ldots \perp \\ &\quad \perp a_n[d_2, e_2] \perp \ldots \perp \ldots \perp a_n[d_r, e_r]. \end{aligned}$$

(b) Für eine bilineare oder quadratische Form ξ setzen wir $\langle a \rangle_b \otimes \xi =: a\xi$.

(c) Es ist $\dim(\mathfrak{b}_1 \otimes \mathfrak{b}_2) = \dim \mathfrak{b}_1 \cdot \dim \mathfrak{b}_2$ und $\dim(\mathfrak{b}_1 \otimes \varphi) = \dim \mathfrak{b}_1 \cdot \dim \varphi$.

(d) Ist $\mathfrak{b}_1$ isotrop, so ist auch $\mathfrak{b}_1 \otimes \mathfrak{b}_2$ isotrop. Analog folgt aus der Isotropie von φ oder der von $\mathfrak{b}_1$ auch die Isotropie von $\mathfrak{b}_1 \otimes \varphi$.

(e) Ist $\mathfrak{b}_1$ oder $\mathfrak{b}_2$ metabolisch, so ist auch $\mathfrak{b}_1 \otimes \mathfrak{b}_2$ metabolisch und ist φ hyperbolisch oder $\mathfrak{b}_1$ metabolisch, so ist auch $\mathfrak{b}_1 \otimes \varphi$ hyperbolisch.

Wir wollen nun mit Hilfe des in 2.1 definierten Produktes und der in Kapitel 1 definierten Summe eine Ring- bzw. eine Gruppenstruktur konstruieren. Dazu betrachten wir zunächst die folgende Definition.

Definition 2.3 ([25] S. 35 Def. 4.3(2) und S. 36 bzw. S.22 Def. 1.7)

(a) Zwei bilineare Formen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ über F heißen **wittäquivalent**, wenn es metabolische Räume M_1, M_2 gibt, sodass $\mathfrak{b}_1 \perp M_1 \cong \mathfrak{b}_2 \perp M_2$ gilt. Wir schreiben dann kurz $\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2$.

(b) Zwei nicht singuläre quadratische Formen φ_1 und φ_2 über F heißen **wittäquivalent**, wenn es hyperbolische Räume H_1, H_2 gibt, sodass $\varphi_1 \perp H_1 \cong \varphi_2 \perp H_2$ gilt. Wir schreiben dann kurz $\varphi_1 \sim \varphi_2$.

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf den Isometrieklassen der bilinearen bzw. der nicht singulären quadratischen Formen über F. Die Äquivalenzklasse von $\mathfrak{b}$ bzw. φ heißt **Wittklasse** und wird mit $[\mathfrak{b}]$ bzw. $[\varphi]$ bezeichnet.

Satz und Definition 2.4 *Wittring und Wittgruppe* ([25] S. 35-37 bzw. S.23 Theo. 1.9)

(a) Wir definieren auf der Menge $W(F) := \{[\mathfrak{b}] \mid \mathfrak{b}$ (nicht ausgeartete symmetrische) Bilinearform über $F\}$ die Verknüpfungen "+" und "$\cdot$" durch

$$[\mathfrak{b}_1] + [\mathfrak{b}_2] := [\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_2]$$

$$[\mathfrak{b}_1] \cdot [\mathfrak{b}_2] := [\mathfrak{b}_1 \otimes \mathfrak{b}_2]$$

*Diese Operationen sind wohldefiniert und $W(F)$ wird damit zu einem kommutativen Ring mit $1 = [\langle 1 \rangle_b]$ und $0 = [\mathbb{M}]$. Dieser heißt der **Wittring** von F.*

(b) Wir definieren auf der Menge $W_q(F) := \{[\varphi] \mid \varphi$ nicht singuläre quadratische Form über $F\}$ die Verknüpfung "+" durch

$$[\varphi_1] + [\varphi_2] := [\varphi_1 \perp \varphi_2]$$

*Diese Operation ist wohldefiniert und $W_q(F)$ wird damit zu einer abelschen Gruppe mit $0 = [\mathbb{H}]$ und heißt die **Wittgruppe** von F.*

(c) Mit der in 2.1(b) definierten Verknüpfung des Produktes, wird die Gruppe $W_q(F)$ zu einem $W(F)$-Modul. Dieses Produkt wollen wir ebenfalls mit "$\cdot$" bezeichnen.

Lemma 2.5 ([25] S. 35 Notes (2) und S. 36 Ex. 4.5)

(a) Für jede Bilinearform $\mathfrak{b}$ ist $\mathfrak{b} \perp \mathfrak{b}$ metabolisch, das heißt es ist $[\mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}] = 0$ für alle $[\mathfrak{b}] \in W(F)$.

(b) Ist φ eine quadratische Form vom Typ (r, s), so enthält $\varphi \perp \varphi$ einen total isotropen Unterraum der Dimension $2r + s$. Insbesondere gilt also für $[\varphi] \in W_q(F)$ stets $[\varphi] + [\varphi] = 0$.

Beweis: Zu (a): Ist $\mathfrak{b}$ hyperbolisch, das heißt Summe von bilinearen hyperbolischen Ebenen, so ist die Aussage klar. Sei also $\mathfrak{b} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_b$ mit $a_1, \ldots, a_n \in F$. Dann ist

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_b \perp \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_b \cong \langle a_1, a_1 \rangle_b \perp \ldots \perp \langle a_n, a_n \rangle_b \cong \mathbb{M}(a_1) \perp \ldots \perp \mathbb{M}(a_n).$$

Zu (b): Sei $\varphi = [a_1, c_1] \perp \ldots \perp [a_r, c_r] \perp \langle d_1, \ldots, d_s \rangle$ mit $a_i, c_i, d_j \in F$ für $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$. Mit $\mathrm{sp}_{F^2}(d_1, d_1 \ldots, d_s, d_s) = \mathrm{sp}_{F^2}(d_1, \ldots, d_s)$ und Satz 1.34 ergibt sich dann die Isometrie

$$\begin{aligned}\varphi \perp \varphi &\cong [a_1, c_1] \perp [a_1, c_1] \perp \ldots \perp [a_r, c_r] \perp [a_r, c_r] \perp \langle\, d_1, \ldots, d_s, d_1, \ldots, d_s \,\rangle \\ &\cong [0, c_1] \perp [a_1, 0] \perp \ldots \perp [0, c_r] \perp [a_r, 0] \perp \langle\, d_1, \ldots, d_s \,\rangle \perp s \times \langle\, 0 \,\rangle \\ &\cong (2r) \times \mathbb{H} \perp \langle\, d_1, \ldots, d_s \,\rangle \perp s \times \langle\, 0 \,\rangle\,.\end{aligned}$$

Da wegen der Regularität von φ die Form $\langle\, d_1, \ldots, d_s \,\rangle$ anisotrop ist, sieht man an dieser Darstellung, dass $i_{ti}(\varphi \perp \varphi) = 2r + s = \frac{1}{2}\dim(\varphi \perp \varphi)$ ist und mit Lemma 1.44 folgt der Rest der Behauptung. $\square$

Wie auch in Charakteristik ungleich zwei sieht man sofort, dass für zwei Bilinearformen $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ und zwei nicht singuläre quadratische Formen φ_1, φ_2 gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}_2 \Longleftrightarrow &\quad \mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_2 \text{ ist metabolisch} \Longleftrightarrow \quad (\mathfrak{b}_1)_{an} \cong (\mathfrak{b}_2)_{an}\,, \\ \varphi_1 \sim \varphi_2 \Longleftrightarrow &\quad \varphi_1 \perp \varphi_2 \text{ ist hyperbolisch} \Longleftrightarrow \quad (\varphi_1)_{an} \cong (\varphi_2)_{an}\,.\end{aligned}$$

Damit ist dann klar, dass die anisotropen Formen ein Repräsentantensystem der Wittklassen bilden. Wir können also stets davon ausgehen, dass ein nicht triviales Element aus $W(F)$ von der Gestalt $[\langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle_b]$ ist, wobei $\langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle_b$ eine anisotrope bilineare Form ist und dass ein nicht triviales Element aus $W_q(F)$ stets von der Form $[[b_1, c_1] \perp \ldots \perp [b_r, c_r]]$ ist, wobei $[b_1, c_1] \perp \ldots \perp [b_r, c_r]$ eine anisotrope nicht singuläre quadratische Form ist.

Nun wollen wir noch für einige Körper den Wittring und die Wittgruppe bestimmen. Dazu betrachten wir die Artin-Schreier Abbildung von Seite 22. Über jedem Körper F ist $\mathrm{Kern}(\wp) = \{0, 1\}$ und damit gilt mit dem Homomorphiesatz $F/(\{0,1\}, +) \cong \wp(F)$. Ist dabei F ein endlicher Körper, das heißt $F = \mathbb{F}_q$ mit $q = 2^s$, so wissen wir also, dass $|\wp(F)| = \frac{1}{2}|F|$ gilt.

Beispiel 2.6 ([25] S. 37 Ex. 4.7)

(a) **$W(F)$ und $W_q(F)$ eines endlichen Körpers $\mathbb{F}_q$**
Beginnen wir zunächst mit der Wittgruppe und betrachten den endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q = 2^s$. Für diesen ist die Frobeniusabbildung ein Automorphismus, dass heißt es gilt $\mathbb{F}_q^2 = \mathbb{F}_q$ und damit ist $\mathbb{F}_q$ perfekt. Wir können also Satz 1.42 anwenden und wissen, dass jede nicht triviale Wittklasse einen Vertreter von der Gestalt $[1, a]$ mit $a \in \mathbb{F}_q \backslash \wp(\mathbb{F}_q)$ besitzt, denn wäre $a \in \wp(\mathbb{F}_q)$, so hätte $[1, a]$ eine triviale Arf-Invariante und wäre nach Lemma 1.40 eine hyperbolische Ebene. Sind nun $[1, a]$ und $[1, c]$ zwei quadratische Formen über F mit $a, c \notin \wp(\mathbb{F}_q)$, so wissen wir aus der Algebra, dass

dann $a - c = a + c \in \wp(\mathbb{F}_q)$ gilt, da der Index $[\mathbb{F}_q : \wp(\mathbb{F}_q)] = 2$ ist. Damit ist also $a = c$ in $F/\wp(\mathbb{F}_q)$ und mit Lemma 1.40 folgt dann $[1, a] \cong [1, c]$. Insgesamt haben wir also $W_q(\mathbb{F}_q) = \{[\mathbb{H}], [[1, a]]\}$ für ein $a \notin \wp(\mathbb{F}_q)$ gezeigt und aus der Algebra folgt dann schließlich

$$(W_q(\mathbb{F}_q), +) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +).$$

Kommen wir nun zum Wittring $W(\mathbb{F}_q)$. Da jedes Element ein Quadrat ist, kann man in jeder diagonalisierten Form $\mathfrak{b} = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle_b$ das Element a_2 durch ein Quadrat so skalieren, dass $x^2 a_2 = a_1$ für ein $x \in \mathbb{F}_q$ gilt. Damit gilt dann $\mathfrak{b} \cong \langle a_1, a_1, \ldots \rangle_b \cong \mathbb{M}(a_1) \perp \mathfrak{b}'$ für eine weitere Bilinearform $\mathfrak{b}'$. Damit muss also jeder Vertreter in $W(F)$ eine Dimension echt kleiner als zwei haben, da aber alle eindimensionalen Formen isometrisch sind, ist schließlich

$$W(\mathbb{F}_q) = \{[\mathbb{M}], [\langle 1 \rangle_b]\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot).$$

(b) **$W(F)$ und $W_q(F)$ eines quadratischen abgeschlossen Körpers F**
Sei F nun ein quadratisch abgeschlossener Körper, das heißt F besitzt keine quadratischen Erweiterungen. Das bedeutet, dass jedes quadratische Polynom in $F[X]$ schon über F zerfällt. Damit ist insbesondere jedes Element ein Quadrat und für den Wittring der bilinearen Formen erhalten wir den selben wie in (a).
Betrachten wir nun die Wittgruppe von F. Da jede quadratische Gleichung über F lösbar ist, ist insbesondere $\wp(F) = F = F^2$. Also ist F wieder perfekt und analog zu (a) müsste $[1, a]$ ein Vertreter einer nicht trivialen Wittklasse sein. Dabei erhalten wir jedoch den Widerspruch $a \in F \setminus \wp(F) = \emptyset$ und damit ist die Wittgruppe gegeben durch $W_q(F) = \{[\mathbb{H}]\} = \{0\}$.

(c) **$W_q(F)$ eines separabel abgeschlossen Körpers**
Sei F in diesem Beispiel ein separabel abgeschlossener Körper. Da jedes irreduzible Polynom der Art $X^2 + X + \alpha \in F[X]$ eine separable Erweiterung erzeugen würde, sind diese Polynome stets reduzibel, das heißt jedes $\alpha \in F$ liegt in $\wp(F)$, also gilt $F = \wp(F)$. Damit ist jede zweidimensionale Form $[a, b]$ hyperbolisch, da ihre Arf-Invariante $\Delta([a, b]) = ab \in F = \wp(F)$ trivial ist. Also ist jede nicht singuläre Form hyperbolisch und es folgt $W_q(F) = \{[\mathbb{H}]\} = \{0\}$.

Ziel dieser Arbeit ist es, dass Verhalten der Wittgruppe unter verschiedenen Körpererweiterungen zu studieren. Dazu setzen wir die folgende Definition.

Definition 2.7 ([10] S. 42 und Remark 8.18)
Es sei $K : F$ eine beliebige Erweiterung des Körper F und φ eine nicht notwendigerweise

reguläre quadratische Form auf V. Wir definieren die quadratischen Form φ_K durch

$$\varphi_K := (\varphi, V)_K := (\varphi \otimes K, V \otimes_F K),$$

das heißt φ_K ist die quadratische Form über dem Körper K, die durch Erweiterung des Skalarbereichs von φ entsteht.

Weiter bezeichnen wir den Kern der kanonischen Abbildung $W_q(F) \longrightarrow W_q(K)$ mit $W_q(K/F)$ und nennen ihn den **quadratischen Wittkern** der Erweiterung $K : F$, oder kurz den **Wittkern** der Erweiterung $K : F$. Eine analoge Definition gilt dabei auch für bilineare Formen.

Der Wittkern wird noch ein wichtige Rolle in den Kapiteln 6 und 7 spielen, in denen eben dieser für bestimmte Erweiterungen klassifiziert werden soll. Um dies zu tun, fehlt uns zu diesem Zeitpunkt noch die nötige Theorie und aus diesem Grund wollen wir zunächst nur ein Beispiel betrachten.

Beispiel 2.8
Wie wir in 2.6 (a) gesehen haben ist die Wittgruppe von $\mathbb{F}_2$ gegeben durch $W_q(\mathbb{F}_2) = \{[\mathbb{H}], [[1,1]]\}$. Betrachten wir nun der Erweiterungskörper $K = \mathbb{F}_2(\wp^{-1}(1)) \cong \mathbb{F}_4$, so liegt natürlich die Wittklasse von $[1,1]$ im Wittkern und damit folgt

$$W_q(\mathbb{F}_4 / \mathbb{F}_2) = W_q(\mathbb{F}_2) = W(\mathbb{F}_2) \otimes [1,1].$$

2.2 Invarianten und Fundamentalideal

Wir wollen uns in diesem Abschnitt noch mit einigen weiteren Invarianten der Wittklassen befassen, da die Dimension zwar eine Invariante der Isometrieklassen von bilinearen und quadratischen Formen ist, aber wegen $[\mathfrak{b}] = [\mathfrak{b} \perp \mathbb{H}_b]$ und $[\varphi] = [\varphi \perp \mathbb{H}]$ für jede bilineare Form $\mathfrak{b}$ bzw. nicht singuläre quadratische Form φ keine Invariante der Wittklassen mehr sein kann. Aus diesem Grund betrachten wir nun die folgenden Abbildungen.

Satz und Definition 2.9 ([10] S. 25)

(a) Wir definieren die Abbildungen

$$e_0 : W(F) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad [\mathfrak{b}] \longmapsto \dim \mathfrak{b} \mod 2$$
$$e_1 : W(F) \longrightarrow F^*/F^{*2}, \quad [\mathfrak{b}] \longmapsto \det \mathfrak{b} \cdot F^{*2}$$

Dann sind e_0 und e_1 Invarianten der Wittklasse von $\mathfrak{b}$.

(b) Wir definieren die Abbildung

$$\Delta : W(F) \longrightarrow F/\wp(F), \ [\varphi] \longmapsto \Delta(\varphi) + \wp(F)$$

Dann ist Δ eine Invariante der Wittklasse von φ.

Beweis: Zu (a): Da $\dim(\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_2) = \dim \mathfrak{b}_1 + \dim \mathfrak{b}_2$ für alle Bilinearformen $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ gilt und metabolische Formen stets gerade Dimension haben, ist e_0 eine Invariante der Wittklasse. Für die Determinante gilt $\det(\mathfrak{b}_1 \perp \mathfrak{b}_2) = \det \mathfrak{b}_1 \cdot \det \mathfrak{b}_2$ und nach Korollar 1.23 hat jede metabolische Ebene ein Quadrat als Determinante. Da die Determinante eine Invariante der Isometrieklasse ist, ist damit auch e_1 eine Invariante der Wittklasse.

Zu (b): Die Aussage folgt sofort aus der Additivität der Arf-Invarianten, ihrer Invarianz unter Isometrie und der Tatsache, dass jede hyperbolische Form die Arf-Invariante 0 besitzt. $\square$

Die Abbildung e_1 entspricht dabei der Diskriminanten im Fall Charakteristik ungleich zwei. Jedoch ist der Faktor $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ mit $n = \dim \mathfrak{b}$ in Charakteristik zwei irrelevant. Eine Abbildung wie e_0 würde für quadratische Formen keinen Sinn machen, da alle Formen in $W_q(F)$ nicht singulär sind und damit eine gerade Dimension besitzen.

Analog zum Fall Charakteristik ungleich zwei wollen wir nun noch das Fundamentalideal für bilineare und quadratische Formen definieren. Um die Erzeuger dieser Ideale beschreiben zu können, machen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 2.10 ([10] S. 24 und S. 53)
Wir nennen eine bilineare Form $\mathfrak{b}$ über F eine **bilineare n-fache Pfisterform**, oder auch **bilinearer n-Pfister**, falls

$$\mathfrak{b} \cong \langle\, 1, a_1 \,\rangle_b \otimes \ldots \otimes \langle\, 1, a_n \,\rangle_b$$

gilt und schreiben dann kurz $\mathfrak{b} \cong \langle\!\langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle\!\rangle_b$.

Ist φ die polare Form einer n-fachen bilinearen Pfisterform, so schreiben wir für diese kurz $\varphi =: \langle\!\langle\, a_1, \ldots, a_n \,\rangle\!\rangle$ und nennen φ eine **n-fache quasi-Pfisterform**.

Eine **n-fache quadratische Pfisterform** φ, oder auch **quadratischer n-Pfister**, ist eine quadratische Form der Art

$$\varphi \cong \langle\, 1, a_1 \,\rangle_b \otimes \ldots \otimes \langle\, 1, a_{n-1} \,\rangle_b \otimes [1, b] =: \langle\!\langle\, a_1, \ldots, a_{n-1}, b]].$$

Die Form $\langle\!\langle\, b]] := [1, b]$ ist dabei eine 1-fache Pfisterform.

Schließlich definieren wir die Mengen

- $P_n^b(F) := \{\mathfrak{b}$ bilineare Form über $F \mid \mathfrak{b}$ ist isometrisch zu einer n-fachen bilinearen Pfisterform $\}$,
- $P_n(F) := \{\varphi$ eine quadratische Form über $F \mid \varphi$ ist isometrisch zu einer n-fachen quadratischen Pfisterform $\}$,
- $GP_n^b(F) := \{\mathfrak{b}$ bilineare Form über $F \mid$ es existiert ein $a \in F$, sodass $a\cdot\mathfrak{b} \in P_n^b(F)$ ist $\}$,
- $GP_n(F) := \{\varphi$ eine quadratische Form über $F \mid$ es existiert ein $a \in F$, sodass $a\cdot\varphi \in P_n(F)$ ist $\}$.

Dabei ist anzumerken, dass es zwei leicht verschiedene Definitionen von quadratischen Pfisterformen gibt, denn manche Literaturen bezeichnen Formen der Art $\langle\langle a_1, \ldots, a_n, b]]$ als quadratische n-fache Pfisterform. Das liefert bei verschiedenen Folgerungen andere Werte, jedoch ist unsere Definition näher am Fall Charakteristik ungleich zwei, denn nun haben sowohl in Charakteristik zwei, also auch in Charakteristik ungleich zwei n-fache Pfisterformen stets die Dimension 2^n.

Da wir uns im weiteren Verlauf der Arbeit hauptsächlich mit quadratischen Formen beschäftigen werden, wird mit dem Begriff Pfisterform stets eine quadratischen Pfisterform gemeint sein. Mit Hilfe dieser neuen und in den späteren Kapiteln sehr wichtigen Formen können wir nun weitere Aussagen treffen.

Satz und Definition 2.11 ([10] S. 24,25)
Die Abbildung $e_0 : W(F) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit Kern

$$\mathrm{Kern}(e_0) =: I(F) = \{[\mathfrak{b}] \in W(F) \mid \dim \mathfrak{b} \equiv_2 0\}.$$

Der Kern $I(F)$ heißt **Fundamentalideal** *von $W(F)$ und wird erzeugt von den Wittklassen der 1-fachen bilinearen Pfisterformen. Insbesondere ist also $W(F)/I(F) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Korollar 2.12 ([9] S. 51)

(a) Ist $I(F)$ das Fundamentalideal von $W(F)$, so wird $I^n(F) := (I(F))^n$ von den Wittklassen der n-fachen bilinearen Pfisterformen erzeugt und es gilt die Inklusionskette

$$W(F) \supset I(F) \supset I^2(F) \supset \ldots$$

(b) Setzt man $I_q^n(F) := I^{n-1}(F) \otimes W_q(F)$ und $I_q^1(F) := I_q(F) := W_q(F)$, so wird der Untermodul $I_q^n(F)$ des $W(F)$-Moduls $W_q(F)$ von den Klassen der n-fachen Pfisterformen erzeugt und es gilt die Inklusionskette

$$W_q(F) = I_q(F) \supset I_q^2(F) \supset \ldots$$

Beweis: Die Aussage (a) ist klar. Zu (b): Da jedes Element in $W_q(F)$ die Gestalt

$$\begin{aligned}\Big[[a_1,b_1] \perp \ldots \perp [a_n,b_n]\Big] &= a_1\Big[[1,a_1,b_1]\Big] + \ldots + a_n\Big[[1,a_nb_n]\Big]\\ &= a_1\Big[\langle\!\langle\, a_1b_1]]\Big] + \ldots + a_n\Big[\langle\!\langle\, a_nb_n]]\Big]\end{aligned}$$

besitzt, ist $W_q(F)$ erzeugt von den 1-fachen Pfisterformen. Der Rest folgt aus (a). □

Von besonderem Interesse sind vor allem die beiden Quotienten $I^n(F)/I^{n+1}(F)$ und $I_q^n(F)/I_q^{n+1}(F)$. Wir wollen zunächst diese Quotienten für $n = 1$ bis auf Isomorphie bestimmen. Dazu der folgende Satz.

Satz 2.13 ([9] S. 51 und [10] Prop. 4.13)

(a) Die Abbildung $e_{1|I(F)} =: d : I(F) \longrightarrow F^*/F^{*2}$ *ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit* $\mathrm{Kern}(d) = I^2(F)$*. Insbesondere gilt* $I(F)/I^2(F) \cong F^*/F^{*2}$*.*

(b) Die Abbildung $\Delta : W_q(F) \longrightarrow F/\wp(F)$ *ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit* $\mathrm{Kern}(\Delta) = I_q^2(F)$*. Insbesondere gilt* $I_q(F)/I_q^2(F) \cong F/\wp(F)$*.*

Beweis: Zu (a): Die Surjektivität und die Homomorphieeigenschaft sind klar. Bestimmen wir also den Kern von d.

($\supseteq$) Sei $[\mathfrak{b}] \in I^2(F)$, dann ist $[\mathfrak{b}]$ nach Korollar 2.12 eine Kombination von Klassen der Art $[\langle 1, a\rangle_b \otimes \langle 1, c\rangle_b] = [\langle 1, a, c, ac\rangle_b]$ mit $d\left([\langle\!\langle a, c\rangle\!\rangle_b]\right) = acac \in F^{*2}$.

($\subseteq$) Sei nun $[\mathfrak{b}] \in \mathrm{Kern}(d)$ mit $d([\mathfrak{b}]) = 1 \cdot F^{*2}$ und $\dim \mathfrak{b} \equiv_2 0$. Für $\dim \mathfrak{b} = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\dim \mathfrak{b} = 2$, das heißt für passende $a, c \in F$ ist $\mathfrak{b} \cong \langle a, c\rangle_b$ mit $ac \in F^{*2}$. Nach Lemma 1.41 ist $\langle a, c\rangle_b$ metabolisch und damit folgt $[\langle a, c\rangle_b] = 0 \in I^2(F)$. Sei nun $\dim \mathfrak{b} = 4$, also für passende $a, c, d, e \in F$ ist $\mathfrak{b} \cong \langle a, c, d, e\rangle_b$ mit $acde \in F^{*2}$. Dann ist

$$[\mathfrak{b}] = [\langle a, c, d, e\rangle_b] = [a\langle 1, ac, ad, cd\rangle_b] = a[\langle\!\langle ac\rangle\!\rangle_b \otimes \langle\!\langle ad\rangle\!\rangle_b] \in I^2(F).$$

Für $\dim \mathfrak{b} > 4$ gilt dann für passende $a, c, d \in F$

$$[\mathfrak{b}] = [\langle a, c, d\rangle_b] + [\mathfrak{b}'] = [\langle a, c, d, acd\rangle_b] + [\langle acd\rangle_b \perp \mathfrak{b}'].$$

Da $d([\mathfrak{b}]) = d([\langle a, c, d, acd\rangle_b]) = 1 \in F/F^{*2}$ ist, folgt auch $d([\langle acd\rangle_b \perp \mathfrak{b}']) = 1 \in F/F^{*2}$ und da $\dim(\langle acd\rangle_b \perp \mathfrak{b}') = \dim \mathfrak{b} - 2$ gilt, folgt die Behauptung mit Induktion über $\dim \mathfrak{b}$.

Zu (b): Auch hier ist die Surjektivität und die Homomorphieeigenschaft klar. Bestimmen wir nun den Kern von Δ.

($\supseteq$) Sei $[\,\varphi\,] \in I_q^2(F)$, dann ist $[\,\varphi\,]$ Kombination von Klassen von 2-fachen Pfisterformen $[\langle\!\langle a, c]]] = [[1,c] \perp a[1,c]]$ und für diese gilt $\Delta([[1,c] \perp a[1,c]]) \overset{1.40}{=} c + c = 0$, also $[\varphi] \in \operatorname{Kern}(\Delta)$.

($\subseteq$) Sei nun $[\varphi] \in \operatorname{Kern}(\Delta)$. Ist $\dim \varphi = 0$, so ist nichts zu zeigen. Für $\dim \varphi = 2$ ist für passende $a, b \in F$ dann $[\varphi] = [[a,b]]$ mit $\Delta([\varphi]) = ab = 0 \in F/\wp(F)$ und nach 1.40 folgt dann $[\varphi] = [\mathbb{H}] \in I_q^2(F)$. Sei nun $\dim \varphi = 4$ und für passende $a, b, c, d \in F^*$ dann $\varphi \cong [a,b] \perp [c,d]$ mit $\Delta([\varphi]) = ab + cd = 0$, das heißt $ab = cd$ in $F/\wp(F)$. Nach 1.40 sind dann die Formen $[1, ab]$ und $[1, cd]$ isometrisch und es folgt

$$\begin{aligned}
[\varphi] &= \Big[[a,b] \perp [c,d]\Big] = a \cdot \Big[[1,ab] \perp [\frac{c}{a}, ad]\Big] \\
&= a \cdot \Big[[1,ab] \perp \frac{c}{a}[1, \frac{c}{a}ad]\Big] = a \cdot \Big[[1,cd] \perp \frac{c}{a}[1,cd]\Big] \\
&= a \cdot \Big[\langle\!\langle \frac{c}{a}, cd]]\Big] \in I_q^2(F).
\end{aligned}$$

Für $\dim \varphi = 6$ existieren dann $a, b, c, d, e, f \in F$ mit $\varphi = a[1,b] \perp c[1,d] \perp e[1,f]$ mit $b + d + f = 0 \in F/\wp(F)$, das heißt es ist $[1,f] \cong [1, b+d]$ und damit gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle a, b]] \perp \langle\!\langle c, d]] \perp \langle\!\langle e, f]] &\cong [1,b] \perp a[1,b] \perp [1,d] \perp c[1,d] \perp [1,f] \perp e[1,f] \\
&\cong \varphi \perp [1,b] \perp [1,d] \perp [1, b+d] \\
&\cong \varphi \perp [0,b] \perp [1,b+d] \perp [1,b+d] \\
&\cong \varphi \perp 3 \times \mathbb{H}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist dann $[\varphi] = [\langle\!\langle a, b]]] + [\langle\!\langle c, d]]] + [\langle\!\langle e, f]]] \in I_q^2(F)$.

Ist nun $\dim \varphi > 6$, so schreibe für passende $a, b, c, d \in F$ und eine nicht singuläre quadratische Form φ' über F

$$[\varphi] = [[a,b] \perp [c,d] \perp \varphi'] = [[a,b] \perp [c,d] \perp [1, ab+cd]] + [[1, ab+cd] \perp \varphi'].$$

Dann ist $\Delta([\varphi]) = 0$ und $\Delta([[a,b] \perp [c,d] \perp [1, ab+cd]]) = ab + cd + ab + cd = 0$ in $F/\wp(F)$, damit dann auch $\Delta([[1, ab+cd] \perp \varphi']) = 0$ in $F/\wp(F)$ und die Behauptung folgt mit Induktion über $\dim \varphi$. □

Insbesondere haben wir im gerade geführten Beweis das folgende Korollar bewiesen.

Korollar 2.14

(a) Ist $[\mathfrak{b}] \in I^2(F)$*, das heißt* $\det \mathfrak{b} \in F^{*2}$ *und ist* $\dim \mathfrak{b} = 4$*, so folgt* $\mathfrak{b} \in GP_2^b(F)$*.*

(b) Ist $[\varphi] \in I_q^2(F)$*, das heißt* $\Delta(\varphi) \in \wp(F)$ *und ist* $\dim \varphi = 4$*, so folgt* $\varphi \in GP_2(F)$*.*

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden wir nun an den Stellen, an denen klar ist ob über die bilineare bzw. quadratische Form oder ihre jeweilige Wittklasse gesprochen wird, die Schreibweisen $[\mathfrak{b}]$ bzw. $[\varphi]$ vereinfachen zu $\mathfrak{b}$ und φ.

Exkurs: Der Arason-Pfister Hauptsatz und die Milnorvermutung

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir noch einige Aussagen formulieren, die thematisch in dieses Kapitel passen, sich aber mit der bisher eingeführten Theorie nicht beweisen lassen. Wir beginnen mit dem Arason-Pfister Hauptsatz, welcher von Baeza in Charakteristik zwei in [6] bewiesen wurde.

Theorem 2.15 *Arason-Pfister Hauptsatz* ([6] Sätze 4.1 und 4.2)
Es sei φ eine anisotrope nicht singuläre quadratische Form über F mit $[\varphi] \in I_q^n(F)$ und $\dim \varphi > 0$. *Dann ist* $\dim \varphi \geq 2^n$ *und insbesondere gilt*

$$\bigcap_{n \geq 1} I_q^n(F) = \{0\}.$$

Wir haben bereits die Quotienten $I^n(F)/I^{n+1}(F)$ und $I_q^n(F)/I_q^{n+1}(F)$ angesprochen und für $n = 1$ in Satz 2.13 klassifiziert. Im Jahr 1970 stellte der amerikanische Mathematiker John Willard Milnor die Vermutung auf, dass im Falle Charakteristik ungleich zwei der Quotient $I^n(F)/I^{n+1}(F)$ isomorph ist zur n-ten Galoiskohomologie. Diese Vermutung wurde im Jahr 1996 von dem russischen Mathematiker Vladimir Voevodsky bewiesen.

In Charakteristik zwei hingegen konnte die analoge Vermutung bereits 14 Jahre früher vom Mathematiker Kazuya Kato im Jahr 1982 bewiesen werden. Dies ist eine der wenigen Aussagen, die sowohl in Charakteristik zwei als auch in Charakteristik ungleich zwei korrekt ist, aber zuerst in Charakteristik zwei bewiesen wurde. Der Vollständigkeit halber wollen wir nun noch die von Kato bewiesene Aussage formulieren, auch wenn sie mit den bisher in dieser Arbeit gesetzten Definitionen und Aussagen noch nicht zu verstehen ist.

Theorem 2.16 ([16] Theorem)

(a) *Es sei F^2 die Quadratgruppe des Körpers F der Charakteristik 2, A die Untergruppe von $F \otimes_{F^2} F$, die von den Elementen der Form $x \otimes y + y \otimes x$ erzeugt ist und g der Homomorphismus $g : F \otimes_{F^2} F \longrightarrow (F \otimes_{F^2} F)/A$, $x \otimes y \longmapsto x^2 y \otimes y + x \otimes y$. Dann existiert eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow W(F) \longrightarrow F \otimes_{F^2} F \xrightarrow{g} (F \otimes_{F^2} F)/A \longrightarrow W_q(F) \longrightarrow 0.$$

(b) *Sei Ω_F^n die n-te äußere Potenz des absoluten Differential Moduls $\Omega^1_{F/\mathbb{Z}}$ und $d(\Omega_F^{n-1})$ das Bild der äußeren Ableitung $d : \Omega_F^{n-1} \longrightarrow \Omega_F^n$. Weiter sei der Kern bzw. der Kokern des Homomorphismuses*

$$\Omega_F^n \longrightarrow \Omega_F^n/d(\Omega_F^{n-1})\ ,\ x\frac{dy_1}{y_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dy_n}{y_n} \longmapsto (x^2+x)\frac{dy_1}{y_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dy_n}{y_n}$$

mit $\nu(n)_F$ bzw. H^{n+1} bezeichnet. Dann gilt

- $I^n(F)/I^{n+1}(F) \cong \nu_F(n)$ *für* $n \geq 0$,
- $I_q^n(F)/I_q^{n+1}(F) \cong H^{n+1}$ *für* $n \geq 0$.

3 Darstellbarkeit von Polynomen

Auch wenn einige der nachfolgenden Sätze sowohl für quadratische als auch für bilineare Formen korrekt sind, werden wir uns in der Formulierung und auch in der Beweisführung von nun an auf quadratische Formen beschränken, da es das Ziel dieser Arbeit ist, einen Wittkern für quadratische Formen zu bestimmen. An geeigneten Stellen werden wir dennoch kurz skizzieren, welche Aussagen ebenfalls für bilineare Formen gelten.

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, welche Werte eine gegebene reguläre quadratische Form φ vom Typ $(r,s) \in \mathbb{N}_0^2$ annehmen kann, wenn man sie nicht über dem Körper F sondern über bestimmten Körpererweiterungen betrachtet. Anschließend wollen wir eine Charakteristik zwei Version des dritten Darstellungssatzes formulieren, welches wir in den folgenden Kapiteln in verschiedenen Beweisen immer wieder benötigen werden. Der in diesem Satz auftauchende Begriff Unterform ist in Charakteristik zwei nicht exakt genug, weswegen wir vorher noch den Begriff der Dominanz einführen wollen. Grundlage dieses Kapitels sind die Literaturen [10], [13] und [25].

Zunächst beginnen wir jedoch mit einigen Notationen, die im Folgenden sehr hilfreich sein werden und auf die wir auch in späteren Kapiteln immer zurückgreifen werden.

Notation 3.1 ([10] Not. 17.2)
Für ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n)$ von n unabhängigen Variablen setzen wir

$$F[T] := F[T_1, \ldots, T_n] \text{ und } F(T) := F(T_1, \ldots, T_n).$$

Für den endlich dimensionalen F-Vektorraum V setzen wir

$$V[T] := F[T] \otimes_F V \text{ und } V(T) := V_{F(T)} := F(T) \otimes_F V.$$

Dabei ist $V(T)$ die Lokalisierung von $V[T]$ an der Stelle $F[T] \setminus \{0\}$. Insbesondere gibt es also zu jedem $v \in V(T)$ stets $w, u \in V[T]$ mit $u \neq 0$, sodass $v = \frac{w}{u}$ gilt. Dabei ist diese Division koordinatenweise zu verstehen, das heißt sie wird auf den Koeffizienten der Basis durchgeführt.

Um die Sätze von Cassels-Pfister formulieren zu können, greifen wir nun noch auf die Notationen aus Definition 2.7 zurück, das heißt wir schreiben φ_K, wenn wir die quadratische Form φ über dem Körper K betrachten und setzen $D_K(\varphi) := D_K(\varphi_K)$.

Bevor wir nun beginnen verschiedene Aussagen über quadratische Formen bei Körpererweiterungen zu treffen, sollten wir zunächst überprüfen, ob die grundlegenden Eigenschaften einer quadratischen Form bei Körpererweiterungen erhalten bleiben.

Eine diagonalisierte Form φ über F bleibt natürlich diagonalisierbar bei einer Erweiterung $K : F$ und nach Bemerkung 1.15 ist mit φ auch φ_K eine total singuläre Form. Für eine beliebige quadratische Form φ vom Typ (r, s) in Normgestalt ist die Grammatrix B von $\mathfrak{b}_\varphi$ nach Kapitel 1 gegeben durch $B = \operatorname{diag}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \dots \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0 \dots, 0\right)$, wobei die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ genau r mal und die Nullen in der Diagonalisierung genau s mal auftreten. Dabei ist B natürlich auch eine Grammatrix von $\mathfrak{b}_{\varphi_K}$ und damit gilt dann $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_{\varphi_K} = (\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi)_K$. Insbesondere bleiben also nicht singuläre Formen bei Körpererweiterungen nicht singulär.

Da wir uns bisher hauptsächlich mit regulären Formen beschäftigt haben, bleibt noch zu klären, ob auch die Regularität bei Körpererweiterungen erhalten bleibt. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel 3.2
Wir betrachten die total singuläre quadratische Form $\varphi = \langle\, 1, d \,\rangle$ über dem Körper F, wobei $d \in F^* \setminus F^{*2}$ ist. Diese Form ist anisotrop über F, denn nehmen wir an sie sei isotrop, so müssten $a, b \in F$, nicht beide Null, mit $a^2 1 + b^2 d = 0$ existieren. Wäre $a = 0$, so folgt $d = 0$, ist $b = 0$, so folgt $a = 0$ und sind schließlich $a, b \neq 0$, so folgt $d = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \in F^2$. Wir haben also in allen drei Fällen einen Widerspruch und die Form φ ist anisotrop und damit insbesondere regulär. Betrachten wir nun die Erweiterung $K := F(\sqrt{d}) : F$, so ist

$$\operatorname{sp}_{K^2}(1, d) = \operatorname{sp}_{K^2}(1, \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)^2 d) = \operatorname{sp}_{K^2}(1, 1) = \operatorname{sp}_{K^2}(1)$$

und damit ist nach Satz 1.36 $\langle\, 1, d \,\rangle \cong \langle\, 1, 0 \,\rangle$ über K und φ_K ist nicht regulär.

Wir können also nicht davon ausgehen, dass mit einer quadratischen Form φ auch die Form φ_K regulär ist, das heißt es gilt $(\operatorname{rad} \varphi)_K \subseteq \operatorname{rad}(\varphi_K)$, aber eine Gleichheit muss dabei nicht gelten. In [10, Def. 7.17] werden reguläre Formen, die über allen Körpererweiterungen regulär bleiben als **nicht ausgeartet** bezeichnet. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass dies genau für die Formen φ der Fall ist, die $\dim \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi \leq 1$ erfüllen. Vergleiche dazu etwa [10, Lemma 7.16]. Aus eben diesem Grund müssen wir einige der nachfolgenden Sätze in Charakteristik zwei auf nicht singuläre Formen einschränken (auf nicht ausgeartete Formen wäre teilweise auch möglich), um so dem möglichen Verlust der Regularität zu entgehen. Wir werden im Folgenden noch sehen, dass es durchaus Körpererweiterungen gibt, bei denen die Regularität erhalten bleibt.

3.1 Der Satz von Cassels-Pfister

In diesem Abschnitt betrachten wir eine n-dimensionale quadratische Form φ über dem Körper F stets als ein Polynom in $X = (X_1, \ldots, X_n)$ der Form

$$\varphi(X) := \varphi(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} X_i X_j \in F[X].$$

Wir setzen also voraus, dass die in diesem Abschnitt betrachteten n-dimensionalen Vektorräume stets von der Form $V = F^n$ sind.

Lemma 3.3 ([25] S. 16 bzw. S. 6 Lemma 2.1)
Es sei φ eine quadratische Form über F und $K = F(t)$ eine transzendente Körpererweiterung von F. Ist φ anisotrop, so ist auch φ_K anisotrop.

Eine analoge Aussage gilt dabei auch für bilineare Formen.

Beweis: Angenommen φ_K wäre isotrop, das heißt es existiert ein $0 \neq f = (f_1, \ldots, f_n) \in K^n$ mit $\varphi(f) = 0$. Für $i = 1, \ldots, n$ schreibe nun $f_i = \frac{g_i}{g_0}$ mit einem gemeinsamen Hauptnenner g_0 der f_i und $g_0, g_1, \ldots, g_n \in F[t]$. Für $0 \neq g := (g_1, \ldots, g_n)$ ist dann $\varphi(g) = g_0^2\, \varphi(f) = 0$. Sei nun $d \in F[t] \setminus \{0\}$ der größte gemeinsame Teiler der $g_1, \ldots, g_n$. Dann ist $g_i = dh_i$ für $h_i \in F[t]$ mit $i = 1, \ldots, n$. Setze nun $0 \neq h = (h_1, \ldots, h_n)$, dann ist $\varphi(g) = d^2\, \varphi(h) = 0$ und da $F[t]$ als Integritätsbereich nullteilerfrei ist, folgt also auch $\varphi(h) = 0$. Setze nun $c_i = h_i(0) \in F$ für $i = 1, \ldots, n$ und $c = (c_1, \ldots, c_n)$. Die c_i sind nicht alle Null, denn sonst hätten die h_i den gemeinsamen Teiler t. Also ist $\varphi(c) = 0$ und $c \neq 0$, das heißt φ ist isotrop und wir erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Wir sind nun schon in der Lage den Satz von Cassels-Pfister zu formulieren, werden aber zunächst eine stärkere Version beweisen, aus dem dann der gewünschte Satz folgt.

Theorem 3.4 ([25] S. 16 bzw. S. 8 Generalization 2.3)
Es sei $\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} X_i X_j$ eine n-dimensionale anisotrope quadratische Form über dem Körper $K = F(t)$ und die $a_{ij} \in F[t]$ erfüllen $\mathrm{grad}(a_{ij}) \leq 1$ für $1 \leq i \leq j \leq n$. Stellt φ das Polynom $p \in F[t]$ über $F(t)$ dar, so stellt φ das Polynom p bereits über $F[t]$ dar.

Beweis: Es sei also φ anisotrop und $p \in D_K(\varphi)$. Dann existieren Polynome $f_i, \overline{f}_i \in F[t]$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $\varphi\left(\frac{f_1}{\overline{f}_1}, \ldots, \frac{f_n}{\overline{f}_n}\right) = p$. Durch passende Erweiterung dieser Brüche können wir oBdA annehmen, dass $\overline{f}_1 = \ldots = \overline{f}_n =: f_0$ ist, also sei

$$\varphi\left(\frac{f_1}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0}\right) = p \text{ und damit } \varphi(f_1, \ldots, f_n) = f_0^2 p. \tag{3.1}$$

Unter allen möglichen Darstellungen von p wählen wir nun diese mit minimalen $d := \mathrm{grad}(f_0)$. Ist $d = 0$, so ist nichts zu zeigen, also sei angenommen, dass $d > 0$ ist.

Wir betrachten nun die $(n+1)$-dimensionale Form $\psi := \langle\, p \,\rangle \perp \varphi_K$ über K, das heißt das Polynom

$$\psi(X_0, X_1, \ldots, X_n) = X_0^2 p + \varphi(X_1, \ldots, X_n).$$

Aus Gleichung (3.1) folgt dann sofort, dass $\psi(f_0, f_1, \ldots, f_n) = 0$ und ψ damit isotrop ist. Wenden wir nun den euklidischen Algorithmus mit Division durch f_0 auf die Polynome $f_0, \ldots, f_n$ an, so erhalten wir eine Darstellung $f_i = f_0 g_i + r_i$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $g_i, r_i \in F[t]$ und $\mathrm{grad}(r_i) < d$. Insbesondere ist $g_0 = 1$ und $r_0 = 0$. Setzen wir nun $f := (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ und $g := (g_0, g_1, \ldots, g_n)$, so ist $\psi(f) = 0$ und wegen der Minimalitätsbedingung an d und $\mathrm{grad}(g_0) = 0 < d$ dann $\psi(g) \neq 0$. Insbesondere sind also die Vektoren f und g über dem Körper K linear unabhängig, denn wären sie abhängig, so müsste aus $\psi(f) = 0$ auch $\psi(g) = 0$ folgen.

Wir setzen nun $h := \lambda f + \mu g \in K^{n+1}$ mit $\lambda = \psi(g)$ und $\mu := \mathfrak{b}_\psi(f, g)$. Sei weiter $h := (h_0, \ldots, h_n)$ mit $h_i \in F[t]$ für $i = 1, \ldots, n$. Da $\lambda \neq 0$ ist, folgt aus der linearen Unabhängigkeit von f, g, dass auch $h \neq 0$ ist. Weiter gilt

$$\psi(h) = \lambda^2 \psi(f) + \mu^2 \psi(g) + \lambda\mu\, \mathfrak{b}_\psi(f, g) = \lambda^2 \cdot 0 + \mu^2 \lambda + \lambda\mu\mu = 0.$$

Damit ist neben f auch h ein isotroper Vektor von ψ. Dabei muss $h_0 \neq 0$ sein, denn wäre $h_0 = 0$, so wäre $(h_1, \ldots, h_n)$ ein von Null verschiedener isotroper Vektor von φ, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Also ist $h_0 \neq 0$ und es ist $\varphi\left(\frac{h_1}{h_0}, \ldots, \frac{h_n}{h_0}\right) = p$. Nun bestimmen wir den Grad von h_0. Es gilt

$$\begin{aligned} h_0 = \lambda f_0 + \mu = \psi(g) f_0 + \mathfrak{b}_\psi(f, g) &= \frac{1}{f_0} \psi(f_0 g + f) \\ = \frac{1}{f_0} \psi(0, r_1, \ldots, r_n) = \frac{1}{f_0}\, \varphi(r_1, \ldots, r_n) &= \frac{1}{f_0} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} r_i r_j \end{aligned}$$

und mit

$$\mathrm{grad}\left(\varphi(r_1, \ldots, r_n)\right) \leq 2 \max\{\mathrm{grad}(r_i) \mid i = 1, \ldots, n\} + 1 \leq 2(d-1) + 1 = 2d - 1$$

folgt dann schließlich

$$\mathrm{grad}(h_0) \leq 2d - 1 - \mathrm{grad}(f_0) = 2d - 1 - d = d - 1 < d.$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch an die Minimalitätsbedingung an d und der Fall

$d > 0$ kann also nicht auftreten. Damit gibt es also immer eine Darstellung von p durch Polynome aus $F[t]$. $\square$

Aus dieser Aussage erhalten wir sofort als Korollar den Satz von Cassels-Pfister.

Theorem 3.5 *Cassels-Pfister* ([10] Theo. 17.3)
Sei $\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} X_i X_j$ eine n-dimensionale quadratische Form auf dem Vektorraum V und $p \in F[t] \cap D_{F(t)}(\varphi)$. Dann existiert ein $v \in V[t]$ mit $\varphi(v) = p$.

Eine analoge Aussage gilt dabei auch für bilineare Formen.

Beweis: Ist φ isotrop, so kann man nach Satz 1.28 eine hyperbolische aus φ abspalten, das heißt es existiert eine quadratische Form ψ, sodass gilt $\varphi \cong \mathbb{H} \perp \psi$. Insbesondere ist also

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = X_1 X_2 + \psi(X_3, \ldots, X_n).$$

Wählt man nun über $F(t)$ die Variablen als $X_1 = p, X_2 = 1$ und $X_3 = \ldots, = X_n = 0$, so erhält man eine Darstellung von p über $F[t]$.

Ist φ anisotrop, so folgt die Aussage mit 3.4, wenn die auftretenden Polynome a_{ij} als konstant aufgefasst werden. $\square$

Das Theorem 3.5 stammt in einer Charakteristik ungleich zwei Version aus dem Jahr 1965 und wurde zeitnah auch für den Fall $\operatorname{Char} F = 2$ bewiesen und ist mittlerweile eine Standartaussage in der Theorie der quadratischen Formen. Sie wird uns dennoch in den späteren Kapitel immer wieder von großem Nutzen sein.

Wir wollen diesen Abschnitt nun mit dem Substitutionsprinzip abschließen, welches wir sofort als Korollar aus dem eben bewiesenen Satz erhalten.

Theorem 3.6 *Substitutionsprinzip* ([25] S. 16 bzw. S. 10 Prop. 3.1)
Es sei φ eine n-dimensionale quadratische Form über F, $T = (T_1, \ldots, T_m)$, $0 \neq p \in F[T]$ und $c_1, \ldots, c_m \in F$ beliebig. Ist $p \in D_{F(T)}(\varphi)$, so ist $p(c_1, \ldots, c_m) \in D_F(\varphi) \cup \{0\}$.

Beweis: Wir beweisen diese Aussage mit Induktion über m. Für $m = 1$ folgt die Aussage sofort aus Theorem 3.5 und einer Substitution $T_1 \mapsto c_1$. Sei nun also $m > 1$. Wieder nach 3.5 stellt φ das Polynom $p(T)$ über $F(T_1, \ldots, T_{m-1})[T_m]$ dar. Durch die Substitution $T_m \mapsto c_m$ erhält man so eine Darstellung von $p(T_1, \ldots, T_{m-1}, c_m)$ durch φ über dem Körper $F(T_1, \ldots, T_{m-1})$. Die Behauptung folgt dann mit der Induktionsvoraussetzung. $\square$

3.2 Unterformen und dominierte Formen

In diesem Abschnitt wollen wir einen kleinen Einblick in das Prinzip der Dominanz von quadratischen Formen gelangen. In Charakteristik ungleich zwei ist eine Unterform einer quadratischen Form nichts weiter als ein orthogonaler Summand dieser Form. Man kann eine Unterform jedoch auch auffassen als die Einschränkung der gegeben Form auf einen Unterraum. Diese beiden Begriffe fallen in Charakteristik ungleich zwei zusammen, in Charakteristik zwei muss man sie jedoch von einander trennen. Ist zum Beispiel die Form $\varphi = [a, b]$ in der Basis e, f gegeben, so ist $\varphi_{|Fe} \cong \langle\, a \,\rangle$, aber die Form $\langle\, a \,\rangle$ ist kein orthogonaler Summand von $[a, b]$. Aus diesem Grund werden wir in Charakteristik zwei den Begriff der Dominanz verwenden. Um diesen definieren zu können, benötigen wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 3.7 ([13] Lemma 3.1)

(a) *Es seien (φ, V) und (ψ, W) nicht notwendigerweise reguläre quadratische Räume über F. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.*

(i) *Es existiert eine injektive F-lineare Abbildung $t : V \longrightarrow W$ mit $\psi(t(v)) = \varphi(v)$ für alle $v \in V$. Eine solche Abbildung nennen wir* **injektive Isometrie**.

(ii) *Es existieren nicht singuläre Formen φ_r und τ, nicht negative ganze Zahlen $s' \leq s \leq s''$, $c_i \in F$ für $i = 1, \dots, s''$ und $d_j \in F$ für $j = 1, \dots, s'$, sodass gilt*

$$\varphi \cong \varphi_r \perp \langle\, c_1, \dots, c_s \,\rangle,$$
$$\psi \cong \varphi_r \perp \tau \perp [c_1, d_1] \perp \dots \perp [c_{s'}, d_{s'}] \perp \langle\, c_{s'+1}, \dots, c_{s''} \,\rangle\,.$$

(b) *Angenommen eine der äquivalenten Bedingungen aus (a) gilt. Mit den selben Notationen sei $U := t(V)^\perp = \{w \in W \mid \mathfrak{b}_\psi(w, t(V)) = 0\}$. Dann ist $\psi_{|U} \cong \langle\, c_1, \dots, c_{s''} \,\rangle$.*

Beweis: Zu (a): Die Implikation (ii)$\Longrightarrow$(i) ist klar, zeigen wir also nun die umgekehrte Richtung. Da eine injektive Isometrie gegeben ist, können wir oBdA annehmen, dass $V \subseteq W$ gilt und t die kanonische Einbettung von V nach W ist, sodass $\psi_{|V} = \varphi$ gilt. Mit Hilfe von Lemma 1.5 schreiben wir nun $V = U \perp \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi$. Dann ist die Form $\varphi_r := \psi_{|U} = \varphi_{|U}$ nicht singulär und mit Satz 1.8 erhalten wir dann die Zerlegung $W = U \perp U^\perp$. Dabei ist natürlich $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi \subseteq U^\perp$. Weiter ist dann $U^\perp = U' \perp \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\psi$ und analog zu oben $\psi_{|U'}$ eine nicht singuläre Form. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: Angenommen es ist $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\psi$.
Dann wählen wir eine Basis von $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi$, erweitern diese passend zu einer Basis von $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\psi$, sodass $\psi_{|\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi} = \varphi_{|\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi} \cong \langle\, c_1, \dots, c_s \,\rangle$, $\psi_{\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\psi} \cong \langle\, c_1, \dots, c_{s''} \,\rangle$ mit $c_i \in F$ für

$i = 1, \ldots, s''$ und $0 \leq s = \dim \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi \leq s'' = \dim \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\psi$ ist. Setzt man nun $\tau := \psi_{|U'}$ und beachtet, dass $V = U \perp \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi$ und $W = U \perp U' \perp \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\psi$ gilt, so folgt (ii) mit $s' = 0$.

Fall 2: Sei nun $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi \not\subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\psi$.
Weiter sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi$ und oBdA $e_1 \notin \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\psi$. Mit den selben Notationen wie oben erhält man nun $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi \subseteq U^\perp = U' \perp \operatorname{rad} \mathfrak{b}_\psi$. Damit existiert ein $f_1 \in U'$ so, dass $\mathfrak{b}_\psi(e_1, f_1) = \lambda_1 \neq 0$ gilt. Insbesondere ist also f_1 linear unabhängig zu $e_1, \ldots, e_n$, denn wäre $f_1 = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \operatorname{sp}(e_1, \ldots, e_n)$ mit $x_i \in F$ für $i = 1, \ldots, n$, so wäre dann auch $\mathfrak{b}_\psi(e_1, f_1) = \sum x_i \, \mathfrak{b}_\psi(e_1, e_i) = 0$.

Setze nun $e_1' := \frac{1}{\lambda_1} e_1$ und für $i = 2, \ldots, s$ setze $e_i' := e_i + \frac{\lambda_i}{\lambda_1} e_1$, wobei $\lambda_i := \mathfrak{b}_\psi(e_i, f_1)$ ist. Dann ist $e_1', \ldots, e_s'$ wieder eine Basis von $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi$ und es ist $\mathfrak{b}_\psi(e_i', f_1) = \delta_{i1}$ für $i = 1, \ldots, s$, also $f_1 \in \operatorname{sp}(e_2', \ldots, e_s')^\perp$.

Sei nun $\widetilde{U} = U \perp Fe_1' \oplus Ff_1$ und setze $c_1 := \varphi(e_1') = \psi(e_1')$ und $d_1 := \psi(f_1)$. Dann ist $\psi_{|\widetilde{U}} = \psi_{|U} \perp [c_1, d_1]$. Weiter sei $\widetilde{V} = V \oplus Ff_1$ und $\widetilde{\varphi} = \psi_{|\widetilde{V}}$. Da nun $e_1' \in \widetilde{V}$ nicht mehr auf allen Vektoren senkrecht steht, die restlichen e_i' für $i = 2, \ldots, s$ aber schon, ist $e_2', \ldots, e_s'$ eine Basis von $\operatorname{rad} \mathfrak{b}_{\widetilde{\varphi}}$ und $\widetilde{V}$ besitzt eine orthogonale Zerlegung $\widetilde{V} = \widetilde{U} \perp \operatorname{rad} \mathfrak{b}_{\widetilde{\varphi}}$ und dabei ist $\widetilde{\varphi}_{|\widetilde{U}} = \psi_{|\widetilde{U}}$ nicht singulär. Insbesondere ist also $\dim(\operatorname{rad} \mathfrak{b}_{\widetilde{\varphi}}) < \dim(\operatorname{rad} \mathfrak{b}_\varphi) = s$ und die Aussage (ii) folgt nun mit Induktion über s zusammen mit dem ersten Fall.

Die Aussage (b) ist eine direkte Folgerung aus (a). □

Als einfaches Korollar daraus erhalten wir sofort.

Korollar 3.8 ([13] Coro. 3.3)
Es sei (φ, V) ein nicht notwendigerweise regulärer quadratischer Raum vom Typ (r, s) und (ψ, W) eine nicht singuläre quadratische Form der Dimension $2r + 2s$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

(a) Es existiert eine injektive Isometrie $t : (\varphi, V) \longrightarrow (\psi, W)$.

(b) Es existiert eine nicht singuläre quadratische Form φ_r der Dimension $2r$ und $c_j, d_j \in F$ für $j = 1, \ldots, s$, sodass für $\sigma = \langle c_1, \ldots, c_s \rangle$ und $\delta = [c_1, d_1] \perp \ldots \perp [c_s, d_s]$ gilt

$$\varphi \cong \varphi_r \perp \sigma \text{ und } \psi \cong \varphi_r \perp \delta.$$

Diese Aussagen werden wir nun nutzen, um den Begriff derUnterform in Charakteristik zwei zu übertragen.

Definition 3.9 ([13] Def. 3.4)
Es seien φ und ψ nicht notwendigerweise reguläre quadratische Formen über F.

(a) Die Form φ heißt **Unterform** von ψ, wenn es eine quadratische Form τ gibt, sodass $\psi \cong \varphi \perp \tau$ gilt. Wir schreiben dann $\varphi \subseteq \psi$.
(b) Wir nennen die Form φ von ψ **dominiert**, wenn eine der äquivalenten Bedingungen aus Lemma 3.7(a) erfüllt ist und schreiben dann $\varphi \prec \psi$.
(c) Die Form ψ heißt **nicht singuläres Komplement** von φ, wenn eine der äquivalenten Bedingungen aus Korollar 3.8 erfüllt ist.

Diese Definition unterscheidet sich leicht von der, die zum Beispiel in [19] gegeben wurde und ist etwas weniger streng. Beide Definitionen stimmen allerdings überein, wenn die dominierenden Formen nicht singulär sind.

Die Definitionen 3.9(a) und 3.9(b) sind beide transitiv, dass heißt gilt $\varphi \subseteq \psi \subseteq \tau$ für quadratische Formen φ, ψ und τ, so folgt $\varphi \subseteq \tau$ und analog gilt für $\varphi \prec \psi \prec \tau$ auch stets $\varphi \prec \tau$. Ist die dominierte Form nicht singulär oder die dominierende Form total singulär, so fallen die Definitionen (a) und (b) zusammen und die dominierte Form ist ebenfalls eine Unterform.

Kombinieren wir diese Definition mit der Aussage 2.5, so erhalten wir das offensichtliche Korollar.

Korollar 3.10
Sind φ und ψ zwei quadratische Formen über F, die beide die quadratische Form χ dominieren, so gilt $i_{ti}(\varphi \perp \psi) \geq \dim \chi$.

Oft stellt sich die Frage, ob zwei Formen eine gemeinsame Form dominieren. Eine Antwort darauf liefert der folgende Satz. Einen Beweis dazu findet man etwa in [13, Prop. 3.11].

Satz 3.11 ([13] Prop. 3.11)
Es seien φ und ψ zwei nicht notwendigerweise reguläre quadratische Formen über F und $n(\varphi, \psi) := i_{ti}(\varphi \perp \psi) - \max\{i_{ql}(\varphi), i_{ql}(\psi)\}$.

(a) Sei $m \leq \min\{\dim \varphi, \dim \psi, n(\varphi, \psi)\}$. Dann existiert eine Form τ der Dimension m mit $\tau \prec \varphi$ und $\tau \prec \psi$.
(b) Sei τ eine quadratische Form mit $\tau \prec \varphi$ und $\tau \prec \psi$. Dann ist $\dim \tau \leq n(\varphi, \psi)$.
(c) Der Wert $\min\{\dim \varphi, \dim \psi, n(\varphi, \psi)\}$ ist die maximale Dimension einer Form τ, die von φ als auch von ψ dominiert wird.

Nachdem wir nun eine Überblick über die Dominanz von quadratischen Formen erlangt haben, wollen wir noch ein in Charakteristik zwei gültiges Analogon zum dritten Darstellungssatz formulieren.

3.3 Der dritte Darstellungssatz

Die in Abschnitt 3.1 erlangten Erkenntnisse über die Darstellung von Polynomen wollen wir nun in Zusammenhang mit der Dominanz von Formen bringen. Dazu formulieren wir zunächst zwei nützliche und allgemein bekannte Hilfslemmata.

Lemma 3.12
Es sei φ eine anisotrope quadratische Form auf dem Vektorraum V über F, $p \in F[t]$ ein Polynom mit $\operatorname{grad} p = 2k$ *für ein $k \in \mathbb{N}$ und $v \in V[t]$ mit $\varphi(v) = p$. Dann ist* $\operatorname{grad} v = k$.

Beweis: Es sei $v = \sum_{i=0}^{l} t^i v_i$ für $v_0, \dots, v_l \in V$ und $l := \operatorname{grad} v$. Dann ist

$$p = \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{l} t^i v_i\right) = \sum_{i=0}^{l} t^{2i}\,\varphi(v_i) + \sum_{0 \le i < j \le l} t^{i+j}\,\mathfrak{b}_\varphi(v_i, v_j).$$

Ist nun $l > k$, so folgt also $\varphi(v_l) = 0$ und da φ anisotrop ist damit $v_l = 0$. Dann ist aber $\operatorname{grad} v \le l - 1$ und wir haben einen Widerspruch. Also ist $l \le k$, aber da $p = at^{2k} + \dots$ für ein $a \in F^*$ gilt, muss $\varphi(v_k) = a$ sein und dann schließlich $v_k \neq 0$. $\square$

Lemma 3.13 ([10] Prop. 17.9)
Es sei φ eine anisotrope quadratische Form auf V. Weiter sei $s \in V$ und $v \in V(t)$ mit $\varphi(v) \in F[t]$ und $\mathfrak{b}_\varphi(s, v) \in F[t]$. Dann existiert ein $w \in V[t]$ mit $\varphi(v) = \varphi(w)$ und $\mathfrak{b}_\varphi(s, v) = \mathfrak{b}_\varphi(s, w)$.

Der nun nachfolgende Satz ist das Charakteristik zwei Analogon zum zweiten Darstellungssatz. Der Beweis stammt aus dem Buch [25] und wurde an manchen Stellen leicht verändert, damit er besser in die Notationen dieser Arbeit passt.

Theorem 3.14 *2. Darstellungssatz* ([25] S. 16 Theo. 4.8)
Es sei $a, c \in F$ und $b, d \in F^*$. Weiter sei φ eine anisotrope quadratische Form auf V, die das Element $aT_1^2 + bT_1T_2 + cT_2^2 + d$ über dem Körper $F(T_1, T_2)$ darstellt. Dann ist $\varphi \cong [ab^{-2}, c] \perp \chi$ über F für eine quadratische Form χ die $d \in D_F(\chi)$ erfüllt.

Beweis: Da φ das Polynom $aT_1^2 + bT_1T_2 + cT_2^2 + d$ über $F(T_1, T_2)$ darstellt, stellt φ nach dem Substitutionsprinzip 3.6 mit der Substitution $T_2 \mapsto 1$ das Polynom $aT_1^2 + bT_1 + c + d$ über dem Körper $F(T_1)$ und das Element d mit der Substitution $T_1 \mapsto 0, T_2 \mapsto 0$ über F

dar. Nach Theorem 3.5 existiert dann auch ein $x \in V[T_1]$, mit $\varphi(x) = aT_1^2 + bT_1 + c + d$ und nach Lemma 3.12 ist dann $x = T_1x_1 + x_0$ für $x_1, x_0 \in V$ und es folgt $\varphi(x) = T_1^2\,\varphi(x_1) + T_1\,\mathfrak{b}_\varphi(x_1, x_0) + \varphi(x_0) = aT_1^2 + bT_1 + c + d$. Ein Koeffizientenvergleich liefert dann die drei Gleichungen

$$\varphi(x_1) = a\ ,\ \mathfrak{b}_\varphi(x_1, x_0) = b\ ,\ \varphi(x_0) = c + d.$$

Fasst man nun das Polynom $aT_1^2 + bT_1T_2 + cT_2^2 + d$ in $F(T_2)[T_1]$ auf, so finden wir in analoger Weise einen Vektor $y \in V(T_2)[T_1]$, der mit $y_1, y_0 \in V(T_2)$ geschrieben werden kann als $y = T_1y_1 + y_0$ und für den $aT_1^2 + bT_1T_2 + cT_2^2 + d = \varphi(y) = T_1^2\,\varphi(y_1) + T_1\,\mathfrak{b}_\varphi(y_1, y_0) + \varphi(y_0)$ gilt. Mit einem Koeffizientenvergleich erhalten wir dann wieder drei Gleichungen über $F(T_2)$ der Art

$$\varphi(y_1) = a\ ,\ \mathfrak{b}_\varphi(y_1, y_0) = bT_2\ ,\ \varphi(y_0) = cT_2^2 + d. \tag{3.2}$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle.
Fall 1: Ist $x_1 = y_1$, so setzen wir $u := x_1$ und $w := y_0$.
Fall 2: Ist $x_1 \neq y_1$, so ist $x_1 + y_1 \neq 0$ und da mit φ auch $\varphi_{F(T_2)}$ anisotrop ist, folgt dann $\varphi(x_1 + y_1) \neq 0$. Insbesondere ist also auch

$$0 \neq \varphi(x_1 + y_1) = \varphi(x_1) + \varphi(y_1) + \mathfrak{b}_\varphi(x_1, y_1) = a + a + \mathfrak{b}_\varphi(x_1, y_1) = \mathfrak{b}_\varphi(x_1, y_1)$$

und damit sind die Vektoren x_1, y_1 linear unabhängig. Die auf Seite 18 definierte Abbildung $\tau_{x_1+y_1}$ ist dann also eine Isometrie von φ, die die beiden Vektoren x_1 und y_1 in einander überführt. Wir setzen nun $u := x_1$ und $w := \tau_{x_1+y_1}(y_0)$. Mit diesen Vektoren gilt dann

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_\varphi(u, w) &= \mathfrak{b}_\varphi(\tau_{x_1+y_1}(y_1), \tau_{x_1+y_1}(y_0)) = \mathfrak{b}_\varphi(y_1, y_0) \overset{(3.2)}{=} bT_2 \\ \text{und} \qquad \varphi(w) &= \varphi(\tau_{x_1+y_1}(y_0)) = \varphi(y_0) \overset{(3.2)}{=} cT_2^2 + d. \end{aligned}$$

In beiden Fällen haben wir also nun Vektoren $u \in V$ und $w \in V(T_2)$ gefunden, für die nach obiger Rechnung und Gleichung (3.2) dann

$$\varphi(u) = a\ ,\ \mathfrak{b}_\varphi(u, w) = bT_2\ ,\ \varphi(w) = cT_2^2 + d \tag{3.3}$$

gilt. Nach Lemma 3.13 können wir nun oBdA annehmen, dass dabei $w \in V[T_2]$ ist. Weiter folgt mit Lemma 3.12, da der Grad von $\varphi(w)$ zwei ist, dass wir w schreiben können als $w = T_2 w_1 + w_0$ mit $w_1, w_0 \in V$. Wir setzen nun $U := \mathrm{sp}(u, w_1) \subseteq V$. Aus Gleichung (3.3) folgt nun

$$\begin{aligned} bT_2 &= \mathfrak{b}_\varphi(u,w) = T_2\,\mathfrak{b}_\varphi(u,w_1) + \mathfrak{b}_\varphi(u,w_0) \text{ und} \\ cT_2^2 + d &= \varphi(w) = T_2^2\,\varphi(w_1) + T_2\,\mathfrak{b}_\varphi(w_1,w_0) + \varphi(w_0) \end{aligned}$$

und ein weiterer Koeffizientenvergleich liefert dann

$$\begin{aligned} &\mathfrak{b}_\varphi(u,w_1) = b\ ,\ \varphi(w_1) = c\ , \\ &\mathfrak{b}_\varphi(u,w_0) = 0\ ,\ \mathfrak{b}_\varphi(w_1,w_0) = 0\ ,\ \varphi(w_0) = d. \end{aligned}$$

Insbesondere sind also u und w_1 linear unabhängig und $\varphi_{|U}$ ist ein zweidimensionaler nicht singulärer quadratischer Raum. Nach Satz 1.8 ist also $V = U \perp U^\perp$ und in der Basis $\frac{1}{b}u, w_1$ von U ist $\varphi \cong [\frac{a}{b^2}, c] \perp \chi$, wobei χ als $\varphi_{|U^\perp}$ definiert ist. Da nun schließlich $w_0 \in U^\perp$ und $\varphi(w_0) = d$ ist, ist $d \in D_F(\chi)$ und die Behauptung ist gezeigt. □

Wie auch in Charakteristik ungleich zwei werden wir jetzt den zweiten Darstellungssatz nutzen, um eine analoge Version des dritten Darstellungssatzes zu beweisen.

Theorem 3.15 *3. Darstellungssatz* ([25] S. 17 Theo. 4.9)
Es seien (φ, V) und (ψ, W) zwei (reguläre) quadratische Räume über F mit $\dim\varphi = n$ und $\dim\psi = m$. Ist φ vom Typ $(r,s) \in \mathbb{N}_0^2$, $T = (X_1, Y_1, \ldots, X_r, Y_r, Z_1, \ldots, Z_s)$ und ψ anisotrop, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) Die Form φ wird von ψ dominiert, das heißt es gilt $\varphi \prec \psi$.
(b) Es ist $D_K(\varphi) \subseteq D_K(\psi)$ für jede Erweiterung $K : F$.
(c) Die Form ψ stellt das Polynom $\varphi(T)$ über dem Körper $F(T)$ dar.

Beweis: Für die Implikationen (a ⇒ b) und (b ⇒ c) ist nichts zu zeigen. Betrachten wir also die Implikation (c ⇒ a). Sei dazu die Form φ vom Typ (r,s) und für passende $a_i, b_i, c_j \in F$ für $i = 1, \ldots, r$ und $j = 1, \ldots, s$ sei

$$\varphi \cong [a_1, b_1] \perp \ldots \perp [a_r, b_r] \perp \langle\, c_1, \ldots, c_s \,\rangle, \text{ mit } 2r + s = n,$$

mit der zugehörigen Vektorraumzerlegung

$$W = W_1 \perp \ldots \perp W_r \perp \mathrm{rad}\,\mathfrak{b}_\varphi\,.$$

Nach Voraussetzung wird $a_1X_1^2 + X_1Y_1 + b_1Y_1^2 + \ldots + a_rX_r^2 + X_rY_r + b_rY_r^2 + c_1Z_1^2 + \ldots + c_sZ_s^2$ von ψ über dem Körper $F(T)$ dargestellt. Fasst man nun den Anteil $a_2X_2^2 +$

$X_2Y_2 + b_2Y_2^2 + \ldots + a_rX_r^2 + X_rY_r + b_rY_r^2 + c_1Z_1^2 + \ldots + c_sZ_s^2$ als konstanten Anteil eines Polynoms in X_1, Y_1 über dem Körper $F(X_2, Y_2, \ldots, X_r, Y_r, Z_1, \ldots, Z_s)$ auf, so kann man nun das Theorem 3.14 anwenden und erhält eine Zerlegung $\psi \cong [a_1, b_1] \perp \eta$ über $F(X_2, Y_2, \ldots, X_r, Y_r, Z_1, \ldots, Z_s)$, für eine quadratische Form η die $a_2X_1^2 + X_2Y_2 + b_2Y_2^2 + \ldots + a_rX_r^2 + X_rY_r + b_rY_r^2 + c_1Z_1^2 + \ldots + c_sZ_s^2$ über $F(X_2, Y_2, \ldots, X_r, Y_r, Z_1, \ldots, Z_s)$ darstellt. Wendet man nun auf diese Weise das Theorem 3.14 noch $r-1$ weitere Male an, so erhält man eine Zerlegung

$$V = U_1 \perp \ldots \perp U_r \perp V_0$$

mit $\psi_{|U_i} \cong [a_i, b_i]$ für $i = 1, \ldots, r$ und die Form $\psi_0 := \psi_{|V_0}$ stellt das Polynom $c_1Z_1^2 + \ldots + c_sZ_s^2$ über dem Körper $F(Z_1, \ldots, Z_s)$ dar. Wir werden nun zeigen, dass V_0 einen Unterraum V_1 enthält, für den $\psi_{0|V_1} \cong \langle\, c_1, \ldots, c_s \,\rangle$ gilt. Dies zeigen wir mit Induktion über s.

Ist $s = 0$, so ist die Form φ nicht singulär und es ist nichts zu zeigen.

Für $s = 1$ stellt ψ_0 das Element $c_1Z_1^2$ über $F(Z_1)$ dar und nach dem Substitutionsprinzip 3.6 also auch c_1 über F. Ist $v \in V_0 \setminus \{0\}$ mit $\psi_0(v) = c_1$, so ist $(\psi_0)_{|Fv} \cong \langle\, c_1 \,\rangle$.

Es sei also nun $s \geq 2$ und wir setzen $c' := c_2Z_2^2 + \ldots + c_sZ_s^2 \in F(Z_2, \ldots, Z_s)$. Da ψ_0 nun $c_1Z_1^2 + c'$ über $F(Z_1, \ldots, Z_s) = F(Z_2, \ldots, Z_s)(Z_1)$ darstellt, stellt ψ_0 dieses Polynom nach Theorem 3.5 auch über $F(Z_2, \ldots, Z_s)[Z_1]$ dar. Das heißt es existiert ein $y \in V(Z_2, \ldots, Z_s)[Z_1]$ mit $\psi_0(y) = c_1Z_1^2 + c'$. Nach Lemma 3.12 existieren dann $y_1, y_0 \in V(Z_2, \ldots, Z_s)$ mit $y = Z_1y_1 + y_0$. Dies liefert die Gleichung

$$c_1Z_1^2 + c' = \psi_0(y) = Z_1^2\psi_0(y_1) + Z_1\, \mathfrak{b}_{\psi_0}(y_1, y_0) + \psi(y_0)$$

und durch einen Koeffizientenvergleich erhalten wir dann

$$\psi_0(y_1) = c_1\ ,\ \mathfrak{b}_{\psi_0}(y_1, y_0) = 0 \ \text{ und } \ \psi_0(y_0) = c'.$$

Weiter wissen wir nach dem Substitutionsprinzip 3.6, dass ψ_0 das Element c_1 über F darstellt, wenn man in einer Darstellung von $c_1Z_1^2 + \ldots + c_sZ_s^2$ die Variablen als $Z_1 = 1, Z_2 = \ldots = Z_s = 0$ substituiert. Also existiert ein $x_1 \in V$ mit $\psi_0(x_1) = c_1$. Analog zum Beweis von Theorem 3.14 erhalten wir mit der selben Fallunterscheidung und den selben Überlegung im zweiten Fall wieder zwei Vektoren $u \in V$ und $w \in V(Z_2, \ldots, Z_s)$, für die die Gleichungen

$$\psi_0(u) = c_1\ ,\ \mathfrak{b}_{\psi_0}(u, w) = 0 \text{ und } \psi_0(w) = c'$$

gelten. Nach Induktionsvoraussetzung liefert $\psi_0(w) = c' = c_2Z_2^2 + \ldots + c_sZ_s^2$ nun einen Unterraum $V_2 \subseteq V_0$ mit

$$\psi_{0|V_2} \cong \langle\, c_2, \ldots, c_s \,\rangle\,.$$

Da φ regulär ist, ist $\langle\, c_1, \ldots, c_s \,\rangle$ anisotrop, das heißt nach Satz 1.36 sind die Elemente $c_1, \ldots, c_s$ über F^2 linear unabhängig und damit ist

$$c_1 \notin \mathrm{sp}_{F^2}(c_2, \ldots, c_s) = D_F(\langle\, c_2, \ldots, c_s \,\rangle).$$

Es folgt also $u \notin V_2$ und setzt man nun $V_1 := Fu \oplus V_2$, so ist $\psi_{0|V_1} \cong \langle\, c_1, \ldots, c_s \,\rangle$, da u auf allen Vektoren aus V_2 senkrecht steht und für $U := U_1 \perp \ldots \perp U_r \perp V_1$ erhält man schließlich die Behauptung $\psi_{|U} \cong \varphi$. $\square$

Eine abgeschwächte Version des Theorem 3.15 wurde schon 1974 von R. Baeza in seiner Arbeit „Ein Teilformensatz für quadratische Formen in Charakteristik 2“ (siehe [6]) bewiesen. In dieser Ausarbeitung bewies Baeza neben dem Arason-Pfister-Hauptsatz in Charakteristik zwei auch noch im Wesentlichen den Beweisschritt (c $\Rightarrow$ a) aus Theorem 3.15 in dem Fall, dass die dominierte Form φ total singulär und nicht singulär ist.

4 Pfisterformen

In diesem kurzen Kapitel wollen wir uns noch weiter mit den schon im zweiten Kapitel definierten Pfisterformen befassen. Diese besonderen Formen werden gerade in Kapitel 6 und 7 immer wieder als Erzeuger verschiedener Untermoduln von $W_q(F)$ auftauchen und spielen daher eine wichtige Rolle bei der Berechnung der Wittkerne. Aus diesem Grund wollen wir nun ihre Eigenschaften etwas genauer studieren. Dabei werden wir uns hauptsächlich auf den quadratischen Fall beschränken und nur gelegentlich Anmerkungen über bilineare- und quasi-Pfisterformen treffen. Eine n-fache Pfisterform und kurz n-Pfister war zu Erinnerung eine 2^n-dimensionale nicht singuläre quadratische Form der Art

$$\langle\langle\, a_1, \ldots, a_{n-1}, b]] = \langle\, 1, a_1 \,\rangle \otimes \ldots \otimes \langle\, 1, a_{n-1} \,\rangle \otimes [1, b],$$

mit $a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in F$. In diesem Kapitel nutzen wir hauptsächlich die Literaturen [10] und [25] und werden uns im Wesentlichen mit der Isotropie, den darstellbaren Elementen und den Ähnlichkeitsfaktoren von Pfisterformen beschäftigen. Letztere sind wie folgt definiert.

Definition 4.1 ([10] Def. 1.11 und S. 52)
Für eine bilineare Form $\mathfrak{b}$ und eine quadratische Form φ über F definieren wir für eine beliebige Körpererweiterung $K : F$ die Mengen

$$\begin{aligned} G_K(\mathfrak{b}) &:= \{a \in K^* \mid a\,\mathfrak{b}_K \cong \mathfrak{b}_K \text{ über } K\} \text{ bzw.} \\ G_K(\varphi) &:= \{a \in K^* \mid a\,\varphi_K \cong \varphi_K \text{ über } K\}. \end{aligned}$$

Ein $a \in G_K(\mathfrak{b})$ bzw. ein $b \in G_K(\varphi)$ heißt dann **Ähnlichkeitsfaktor** von $\mathfrak{b}$ bzw. φ. Wenn klar ist über welchem Körper gerade Ähnlichkeitsfaktoren betrachtet werden, schreiben wir auch kurz $G(\varphi)$ für $G_K(\varphi)$. Analoges gilt auch für den bilinearen Fall.

Da offensichtlich für jede Form φ und jede Erweiterung $K : F$ stets $1 \in G_K(\varphi)$ ist und zu $a, b \in G_K(\varphi)$ auch $ab^{-1}\,\varphi \cong ab^{-1}b\,\varphi \cong a\,\varphi \cong \varphi$ gilt, ist $G_K(\varphi)$ für jede Körpererweiterung eine Untergruppe von K^*.

Das folgende Lemma wird, so trivial es auch scheint, immer wieder von Nutzen sein.

Lemma 4.2 ([10] Lemma 9.1)
Für eine quadratische Form φ über F gilt stets $D_F(\varphi) \cdot G_F(\varphi) \subset D_F(\varphi)$. Insbesondere folgt aus $1 \in D_F(\varphi)$ stets $G_F(\varphi) \subset D_F(\varphi)$.

4.1 Isotropie von Pfisterformen

Wir wollen nun noch einige neue Begriffe einführen, welche wir dann speziell für Pfisterformen betrachten werden.

Definition 4.3 ([10] S. 52 und [25] S. 37 bzw. S. 25 Def. 2.1)
Es sei (φ, V) ein quadratischer Raum über F der Dimension n und $X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ unabhängige Variablen.

(a) Wir nennen φ **multiplikativ** über F, wenn es ein $v \in V(X,Y)$ gibt mit $\varphi(X)\,\varphi(Y) = \varphi(v)$. Das heißt φ ist genau dann multiplikativ, wenn $\varphi(X)\,\varphi(Y) \in D_{F(X,Y)}(\varphi)$ ist.
(b) Wir nennen φ **strikt multiplikativ**, falls $\varphi(X) \in G_{F(X)}(\varphi)$ ist, das heißt wenn über $F(X)$ gilt $\varphi_{F(X)} \cong \varphi(X)\,\varphi_{F(X)}$.
(c) Wir nennen φ **rund über** F, wenn $G_F(\varphi) = D_F(\varphi)$ ist.

Wir sehen anhand dieser Definitionen sofort, dass falls φ rund über dem Körper $F(X)$ ist, φ dann auch strikt multiplikativ ist und es ist auch sofort klar, dass strikt multiplikative Formen stets multiplikativ sind. Es ist ebenfalls leicht zu sehen, dass isotrope quadratische Formen stets multiplikativ sind und hyperbolische Formen stets strikt multiplikativ sind. Im Folgenden werden wir uns hauptsächlich mit der Rundheit von Formen befassen, da diese im Zusammenhang mit Pfisterformen steht. Der nachfolgende Satz liefert eine erste Aussage über diesen Zusammenhang.

Satz 4.4 ([10] Prop. 9.8)
Es sei φ eine runde quadratische Form über F und $a \in F^*$ beliebig.

(a) Dann ist die Form $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle_b \otimes \varphi$ ebenfalls rund.
(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent
   (i) Die Form $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle_b \otimes \varphi$ ist isotrop.
   (ii) Es ist $a \in D_F(\varphi)$.
   (iii) Die Form $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle_b \otimes \varphi$ ist hyperbolisch.

Beweis: Zu (a): Da $1 \in D_F(\varphi) = G_F(\varphi)$ gilt, ist auch $1 \in D_F(\psi)$ mit $\psi := \langle\!\langle a \rangle\!\rangle_b \otimes \varphi$ und nach Lemma 4.2 reicht es also aus $D_F(\psi) \subset G_F(\varphi)$ zu zeigen. Sei dazu $c \in F^*$ ein durch ψ dargestelltes Element. Da $\psi = \varphi \perp a\,\varphi$ ist, ist $c = x + ay$ für $x, y \in D_F(\varphi) \cup \{0\}$ und es sind nicht beide null. Außerdem ist natürlich auch $x \neq ay$, da sonst $c = 0$ folgen würde.

Ist $y = 0$, so ist $c = x$ und aus der Rundheit von φ folgt dann $c = x \in D_F(\varphi) = G_F(\varphi) \subseteq G_F(\psi)$. Ist $x = 0$, so folgt $c = ay$ und es gilt

$$ay\psi = ay\,\varphi \perp aya\,\varphi \cong ay\,\varphi \perp y\,\varphi \cong a\,\varphi \perp \varphi \cong \varphi \perp a\,\varphi = \psi,$$

das heißt $ay \in G_F(\psi)$.

Sei nun also $x, y \in F^*$. Da $x, y \in D_F(\varphi) = G_F(\varphi)$ ist, folgt dann wegen $x \neq ay$ mit Lemma 1.35

$$\begin{aligned}\psi = \varphi \perp a\,\varphi \cong x\,\varphi \perp ay\,\varphi &= \langle\, x, ay\,\rangle_b \otimes \varphi \\ &\cong \langle\, x + ay, xay(x+ay)\,\rangle_b \otimes \varphi \\ &\cong (x+ay)\,\langle\, 1, xay\,\rangle_b \otimes \varphi \\ &\cong c\,(\varphi \perp xay\,\varphi) \\ &\cong c\,(\varphi \perp a\,\varphi) \cong c\psi\end{aligned}$$

und damit dann schließlich $c \in G_F(\psi)$.

Zu (b): Beginnen wir mit der Implikation (i)⇒(ii). Ist φ isotrop, so ist φ auch universell und es ist nichts zu zeigen. Es sei also nun φ anisotrop. Da ψ nach Voraussetzung isotrop ist, existieren $x, y \in D_K(\varphi)$ mit $x + ay = 0$ und dabei muss $x, y \neq 0$ gelten, da sonst φ isotrop wäre. Damit ist dann auch $a = \frac{x}{y} \in D(\varphi)$, da $D(\varphi) = G(\varphi)$ als Gruppe abgeschlossen unter Multiplikation ist.

Für die Implikation (ii)⇒(iii) sei $a \in D_F(\varphi) = G_F(\varphi)$. Dann ist nach Lemma 2.5 $\varphi \perp a\,\varphi \cong \varphi \perp \varphi \cong (\dim\varphi) \times \mathbb{H}$. Die letzte Implikation ist trivial. □

Diesen Satz wenden wir nun auf Pfisterformen an und erhalten damit das folgende, etwas allgemeiner als in der angegebenen Literatur formulierte, Korollar.

Korollar 4.5 ([10] Coro. 9.9)
Ist π eine n-fache Pfisterform, so ist π_K rund für alle Körpererweiterungen $K : F$ und damit insbesondere strikt multiplikativ.

Eine analoge Aussage gilt dabei auch für bilineare Pfisterformen.

Beweis: Wir beweisen die Aussage mit Induktion über n. Für $n = 1$ ist $\pi = [1, b]$ für ein $b \in F$. Da π die 1 darstellt, reicht es nach Lemma 4.2 die Inklusion $D_K(\pi) \subset G_K(\pi)$ zu zeigen. Sei also $c \in D_K(\pi)$. Da sowohl $[1, b]$ also auch $c[1, b]$ das Element c darstellen und eine in $K/\wp(K)$ gleiche Arf-Invariante besitzen, sind die beiden Formen nach Lemma 1.40 isometrisch über K und damit ist $c \in G_K(\pi)$.

Sei nun $n > 1$. Dann ist $\pi = \langle\langle\, a\,\rangle\rangle_b \otimes \pi_1$ für ein $\pi_1 \in P_{n-1}(F)$ und ein $a \in F^*$. Dieses π_1 ist nach Induktionsvoraussetzung rund über allen Körpererweiterungen und mit Satz 4.4 folgt dann, dass auch π rund über allen Erweiterungen ist. □

Daraus erhalten wir ebenfalls mit Satz 4.4 das folgende und sehr wichtige Korollar.

Korollar 4.6 ([10] Coro. 9.10)
Pfisterformen sind entweder anisotrop oder hyperbolisch.

Eine analoge Aussage gilt dabei auch für bilineare Pfisterformen.

Dies ist eine zentrale und wichtige Eigenschaft von Pfisterformen, die wir in den Kapitel 6 und 7 immer wieder verwenden werden. Nutzen wir die Rundheit von Pfisterformen weiter aus, so erhalten wir ein weiteres allgemein bekanntes Lemma.

Lemma 4.7
Sind die Pfisterformen $\pi_1, \pi_2 \in P_n(F)$ ähnlich, so sind sie auch isometrisch.

Beweis: Es sei $\pi_1 \cong a\pi_2$ für ein $a \in F^*$. Da π_2 die 1 darstellt, stellt $a\pi_2$ und damit auch π_1 das Element a dar und aus Korollar 4.5 folgt dann $\pi_1 \cong a\pi_1$. Damit erhalten wir

$$\pi_2 \cong a^2\pi_2 \cong a(a\pi_2) \cong a\pi_1 \cong \pi_1.$$

□

Wir wollen nun noch eine Charakterisierung der Isotropie von Pfisterformen formulieren, die nur in Körpern der Charakteristik zwei möglich ist. Dazu nutzen wir aus, dass wir jede bilineare Pfisterform $\mathfrak{b}$ als $\mathfrak{b} = \langle 1 \rangle_b \perp \mathfrak{b}'$ mit nach Korollar 1.26 eindeutigem $\mathfrak{b}'$ schreiben können und nennen die Form $\mathfrak{b}'$ die **reine Unterform** von $\mathfrak{b}$. Mit dieser Bezeichnung erhalten wir das folgende Lemma.

Lemma 4.8 ([10] Lemma 6.11 mit Theo. 6.10)
Ist $\mathfrak{b} \in P_n^b(F)$ eine anisotrope n-fache bilineare Pfisterform und $y \in D_F(\mathfrak{b}')$, so existiert ein $\mathfrak{c} \in P_{n-1}^b(F)$ mit $\mathfrak{b} \cong \mathfrak{c} \otimes \langle\langle y \rangle\rangle_b$.

Diese Aussage ist in der angegebenen Literatur [10] mit Hilfe von p-Ketten-Äquivalenz formuliert. Da wir diese Definition nicht eingeführt haben, verweisen wir an dieser Stelle nur auf den Beweis in [10, Lemma 6.11], der mit der Aussage [10, Theo. 6.10] kombiniert werden muss. Kommen wir nun zur angesprochen Klassifizierung der Isotropie.

Satz 4.9 ([10] Lemma 9.11)
Es sei $\mathfrak{b} \in P_{n-1}^b(F)$ eine anisotrope $(n-1)$-fache bilineare Pfisterform auf V und $\pi := \mathfrak{b} \otimes [1, d]$ für ein $d \in F$. Dann ist die n-fache Pfisterform π genau dann hyperbolisch, wenn $d \in \wp(F) + (D_F(\mathfrak{b}') \cup \{0\})$ ist.

Beweis: Es sei zunächst π hyperbolisch, die Form $\varphi := [1, d]$ in der Basis e, f gegeben und $v \otimes e + w \otimes f$ ein von Null verschiedener isotroper Vektor von π mit $v, w \in V$.

Diese Darstellung ist dabei eindeutig, da e, f eine Basis von $[1, d]$ ist. Setzen wir nun $a := \mathfrak{b}(v, v), b := \mathfrak{b}(v, w)$ und $c := \mathfrak{b}(w, w)$, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \pi(v \otimes e + w \otimes f) &= \pi(v \otimes e) + \pi(w \otimes f) + \mathfrak{b}_\pi(v \otimes e, w \otimes f) \\ &= \mathfrak{b}(v, v)\, \varphi(e) + \mathfrak{b}(w, w)\, \varphi(f) + \mathfrak{b}(v, w)\, \mathfrak{b}_\varphi(e, f) \\ &= a + cd + b = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Da nach Voraussetzung $\mathfrak{b}$ anisotrop ist, ist $w \neq 0$ und damit auch $c \neq 0$, denn wäre $w = 0$, so wäre bereits $v \otimes e$ ein isotroper Vektor und damit $\mathfrak{b}(v, v)\, \varphi(e) = \mathfrak{b}(v, v) = 0$, damit also $v = 0$ und der gewählte isotrope Vektor wäre Null. Also ist $c \neq 0$.

Angenommen v und w sind linear abhängig, das heißt es existiert ein $s \in F$ mit $v = sw$, dann ist $a = s^2c$, $b = sc$ und es folgt $0 = a+b+cd = c(s^2+s+d)$, damit also $s^2+s+d = 0$ und schließlich $d = s^2 + s \in \wp(F)$.

Nehmen wir also nun an, dass v und w einen zweidimensionalen Unterraum W von V aufspannen. Die Determinante von $\mathfrak{b}_{|W}$ ist dann

$$\det \mathfrak{b}_{|W} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} F^{*2} = (ac + b^2)F^{*2} \overset{(4.1)}{=} (b^2 + bc + c^2d)F^{*2}.$$

Wir setzen nun $x := b^2 + bc + c^2d$. Nutzen wir diese Determinante zusammen mit $c \in D_F(\mathfrak{b}_{|W})$ und Lemma 1.12, so folgt damit $\mathfrak{b}_{|W} \cong \langle c, xc \rangle_b \cong c \langle 1, x \rangle_b$. Da nun $c^{-1}\, \mathfrak{b}_{|W} \cong c\, \mathfrak{b}_{|W}$ nach Korollar 4.5 rund ist, ist also $\mathfrak{b}_{|W} \cong \langle\langle x \rangle\rangle_b$ eine Unterform von $\mathfrak{b}$. Nach dem bilinearen Wittkürzen Korollar 1.26 ist also dann $\langle x \rangle_b$ eine Unterform von $\mathfrak{b}'$, das heißt es gilt $x \in D(\mathfrak{b}')$. Damit ist dann natürlich auch $c^{-2}x = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \frac{b}{c} + d \in D(\mathfrak{b}')$ und wir erhalten

$$d = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \frac{b}{c} + \frac{x}{c^2} \in \wp(F) + \left(D(\mathfrak{b}') \cup \{0\}\right).$$

Sei nun Umgekehrt $d = x + y$ mit $x \in \wp(F)$ und $y \in D(\mathfrak{b}') \cup \{0\}$. Ist $y = 0$, so ist $d \in \wp(F)$, damit ist nach Lemma 1.40 die Form $[1, d]$ hyperbolisch und dann ist auch $\pi = \mathfrak{b} \otimes \mathbb{H}$ hyperbolisch.

Es sei also nun $y \neq 0$. Nach Lemma Lemma 4.8 existiert dann ein $\mathfrak{c} \in P^b_{n-2}(F)$ mit $\mathfrak{b} \cong \mathfrak{c} \otimes \langle\langle y \rangle\rangle_b$ und dann ist $\pi = \mathfrak{b} \otimes [1, d] \cong \mathfrak{c} \otimes \langle\langle y \rangle\rangle_b \otimes [1, d] = \mathfrak{c} \otimes \langle\langle y, d]]$. Da aber $y = z^2 + z + d$ für ein passendes $z \in F$ ist, folgt $[1, y] \cong [1, d]$ nach Lemma 1.40 und es gilt dann weiter

$$\langle\!\langle y, d]] = [1, d] \perp y[1, d] \cong [1, y] \perp y[1, y] \cong [1, y] \perp [1, y] \overset{2.5(b)}{\cong} \mathbb{H} \perp \mathbb{H}\,.$$

Damit ist dann auch $\pi \cong \mathfrak{c} \otimes \langle\!\langle y, d]]$ hyperbolisch. □

4.2 Klassifikation von Pfisterformen

Wir kommen nun zu einer abschließenden Klassifikation von Pfisterformen. Da wir diese allerdings im weiteren Verlauf der Arbeit nicht explizit benötigen werden, wollen wir diese aus Gründen der Vollständigkeit an dieser Stelle zwar formulieren, aber nicht beweisen. Einen in Charakteristik ungleich zwei formulierten, aber leicht übertragbaren Teil des Beweis des folgenden Theorems findet man etwa in [25, S. 29 Theo 3.2] und den restlich Teil des Beweises in einer Charakteristik freien Version findet man in [10, Theo. 23.2].

Theorem 4.10 ([25] S. 38 bzw. S. 29 Theo 3.2 und [10] Theo. 23.2)
Es sei φ eine nicht singuläre quadratische Form über F der Dimension n.

(a) Ist φ isotrop, so ist φ multiplikativ. Dabei ist φ genau dann strikt multiplikativ, wenn φ hyperbolisch ist.

(b) Ist φ anisotrop, so sind die nachfolgenden Aussagen äquivalent.

(i) Für ein passendes $k \in \mathbb{N}$ ist $\varphi \in P_k(F)$.

(ii) Die Form φ_K ist rund für alle Körpererweiterungen $K : F$.

(iii) Die Form φ ist strikt multiplikativ.

(iv) Die Form φ ist multiplikativ.

(v) Die Menge $D_K(\varphi)$ ist eine Gruppe für alle Körpererweiterungen $K : F$.

Wir haben also gesehen, dass die quadratischen Pfisterformen genau den nicht singulären runden Formen entsprechen. Eine ähnliche Aussage gilt dabei auch für quasi-Pfisterformen, das heißt für total singuläre Formen. Dabei spielt die Regularität, das heißt die Anisotropie der Formen eine wichtige Rolle.

Theorem 4.11 ([13] Theo. 8.5)

(a) Es sei φ eine (anisotrope) total singuläre quadratische Form über F. Dann ist φ genau dann eine k-fache quasi-Pfisterform für ein passendes $k \in \mathbb{N}$, wenn φ rund ist.

(b) *Es existiert eine Bijektion zwischen der Menge der (anisotropen) k-fachen quasi-Pfisterformen über F und der Menge der rein inseparablen Erweiterungen von F^2 vom Grad 2^k in F, die gegeben ist durch*

$$\langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle \longleftrightarrow F^2(a_1, \dots, a_k).$$

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch eine Analogie zum Fall Charakteristik ungleich zwei festhalten. In diesem Fall ist bekannt, dass für jede quadratische (separable) Erweiterung die Normform der Erweiterung eine 1-fache Pfisterform ist. Dies ist in Charakteristik zwei ebenfalls korrekt, wenn wir eine separable Erweiterung vom Grad zwei betrachten. Wie wir in Kapitel 1 gesehen haben werden diese Erweiterungen erzeugt von Elementen der Form $\wp^{-1}(a)$. Es sei also $c := \wp^{-1}(a)$ für ein $a \in F \setminus \wp(F)$. Das Minimalpolynom von c ist dann $p = X^2 + X + a$ und die Norm eines Elementes $x + cy \in K := F(c)$ ist dann gegeben durch (beachte, dass die Nullstellen von p die Element $c, c+1$ sind)

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(x+cy) &= (x+cy)(x+(c+1)y) = (x+cy)(x+cy+y)\\ &= x^2 + xy + cy^2 + c^2y^2 = x^2 + xy + cy^2 + cy^2 + ay^2\\ &= x^2 + xy + ay^2.\end{aligned}$$

Dies entspricht genau der 1-fachen Pfisterform $[1, a] = \langle\langle a]]$, analog zum Fall Charakteristik ungleich zwei.

5 Körpererweiterungen

5.1 Der Satz von Springer und ein Normtheorem von Baeza

Bevor wir nun in Kapitel 6 damit beginnen verschiedene Wittkerne zu bestimmen, wollen wir in diesem Kapitel noch einige Aussagen über quadratische Formen im Zusammenhang mit verschiedenen Körpererweiterungen treffen. Diese werden uns helfen die Wittkerne zu bestimmen und eine Aussage darüber treffen, bei welchen Erweiterungen der Wittkern trivial sein wird. Dazu betrachten wir zunächst den nachfolgenden Satz.

Theorem 5.1 *Satz von Springer* ([10] Coro. 18.5)
Es sei $K : F$ eine algebraische Körpererweiterung von ungeradem Grad und φ eine quadratische Form über F vom Typ (r, s). Ist φ anisotrop, so ist auch φ_K anisotrop.

Eine analoge Aussage gilt dabei auch für bilineare Formen.

Beweis: Es sei $K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$. Aufgrund der aus der Algebra bekannten Gradformel, reicht es den Fall einer einfachen Erweiterung $K = F(\alpha) : F$ zu betrachten. Dazu sei $f \in F[t]$ das Minimalpolynom von $\alpha \in K$ über F vom Grad $[K : F]$ und damit ist $F(\alpha) \cong F[t]/(f)$. Wir beweisen die Aussage nun durch Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$, wobei $[K : F] = 2k + 1$ ist.

Für $k = 0$ ist $K = F$ und die Aussage ist trivial.

Sei also nun $k \geq 1$, das heißt $[K : F] \geq 3$ und $\varphi = [a_1, b_1] \perp \ldots \perp [a_r, b_r] \perp \langle c_1, \ldots, c_s \rangle$ für passende $a_i, b_i, c_j \in F$ mit $i = 1, \ldots, r$ und $j = 1, \ldots, s$. Angenommen φ_K ist isotrop, dann existieren $g_1, h_1, \ldots, g_r, h_r, l_1, \ldots, l_s \in F[t]$ mit

$$\sum_{i=1}^{r} \left(a_i g_i^2 + g_i h_i + b_i h_i^2 \right) + \sum_{j=1}^{s} c_j l_j^2 \equiv 0 \mod f, \tag{5.1}$$

wobei nicht alle $g_1, h_1, \ldots, g_r, h_r, l_1, \ldots, l_s$ Null sind, das heißt nicht alle dieser Polynome von f geteilt werden. Mit Hilfe des euklidischen Algorithmus können wir nun annehmen, dass $\operatorname{grad} g_i, \operatorname{grad} h_i, \operatorname{grad} l_j < \operatorname{grad} f$ ist für $i = 1, \ldots, r$ und $j = 1, \ldots, s$ und dass diese Polynome teilerfremd sind. Aus Gleichung (5.1) folgt nun die Existenz eines $p \in F[t]$, für das

$$\sum_{i=1}^{r} \left(a_i g_i^2 + g_i h_i + b_i h_i^2 \right) + \sum_{j=1}^{s} c_j l_j^2 = pf \tag{5.2}$$

gilt. Wir setzen nun $d := \max\{\operatorname{grad} g_i, \operatorname{grad} h_i, \operatorname{grad} l_j \mid i = 1, \ldots, r \quad j = 1, \ldots, s\}$. Sind λ_i, μ_i, ν_j die Koeffizienten der Polynome g_i, h_i, l_j zum Monom t^d, so ist der Leitkoeffizient von $\sum_{i=1}^{r}\left(a_i g_i^2 + g_i h_i + b_i h_i^2\right) + \sum_{j=1}^{s} c_j l_j^2$ gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{r}\left(a_i \lambda_i^2 + \lambda_i \mu_i + b_i \mu_i^2\right) + \sum_{j=1}^{s} c_j \nu_j^2. \tag{5.3}$$

Da nicht alle λ_i, μ_i, ν_j Null sind, ist der Ausdruck (5.3) aufgrund der Anisotropie von φ auch von Null verschieden und damit ist dann

$$\operatorname{grad}\left(\sum_{i=1}^{r}\left(a_i g_i^2 + g_i h_i + b_i h_i^2\right) + \sum_{j=1}^{s} c_j l_j^2\right) = 2d.$$

Aus Gleichung (5.2) erhalten wir dann also $2d = \operatorname{grad} p + 2k + 1$ und da $d < 2k + 1$, das heißt $d \leq 2k$ gilt, ist dann

$$2\,(2k) \geq \operatorname{grad} p + 2k + 1 \implies \operatorname{grad} p \leq 2k - 1.$$

Insbesondere muss $\operatorname{grad} p$ ungerade sein, damit es in der Summe mit $2k + 1$ die gerade Zahl $2d$ ergibt. Weiter enthält p mindestens einen irreduziblen Faktor $r \in F[t]$, der ebenfalls einen ungeraden Grad besitzt und auch $\operatorname{grad} r \leq 2k - 1$ erfüllt. Sei nun β eine Nullstelle von r in einer passenden Erweiterung von F. Wir wollen nun zeigen, dass φ über $F(\beta)$ isotrop ist und erhalten dann den gewünschten Widerspruch, da nach Induktionsvoraussetzung $\varphi_{F(\beta)}$ anisotrop sein muss.

Zu Beginn des Beweises haben wir gezeigt, dass die Polynome g_i, h_i, l_j teilerfremd sind und damit kann r nicht alle diese Polynome teilen und insbesondere sind nicht alle $g_i(\beta), h_i(\beta), l_j(\beta)$ Null. Damit ergibt sich dann über $F(\beta)$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{r}\left(a_i (g_i(\beta))^2 + g_i(\beta) h_i(\beta) + b_i (h_i(\beta))^2\right) + \sum_{j=1}^{s} c_j (l_j(\beta))^2 \overset{(5.2)}{=} p(\beta) f(\beta) = 0.$$

Damit ist $\varphi_{F(\beta)}$ isotrop und die Behauptung ist durch obigen Widerspruch gezeigt. $\square$

Diese Aussage ist natürlich insbesondere für nicht singuläre Formen korrekt und sagt nun, dass wir Wittkerne nur von Erweiterungen von geradem Grad bestimmen müssen, da in allen anderen Fällen die Inklusion $W_q(F) \hookrightarrow W_q(K)$ nach dem eben gezeigten Satz injektiv ist.

Wir wollen nun das Normtheorem von Baeza für nicht singuläre Formen formulieren, welches uns in Kapitel 7 eine große Hilfe sein wird. Dazu benötigen wir noch einige Notationen.

Auf der Menge $\mathbb{Z}^n$ nutzen wir die **lexikographische Ordnung**, das heißt es ist

$$(i_1, \ldots, i_n) < (j_1, \ldots, j_n) \text{ falls für das kleinste } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } i_k \neq j_k \text{ gilt } i_k < j_k.$$

Für $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $T = (T_1, \ldots, T_n)$ definieren wir $T^I := T_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot T_n^{i_n}$ und in einem Polynom $p(T) \in F[T]$ nennen wir den Koeffizienten zu T^I mit größtem I den **Leitkoeffizienten** von p. Weiter nennen wir p **normiert**, wenn der Leitkoeffizient von p gleich 1 ist.

Im homogenen Polynom $aX^2 + XY + bY^2 \in F[X, Y]$ wäre demnach der Leitkoeffizient genau a. Insbesondere ist also das einer quadratischen Form φ vom Typ (r, s) zugehörige Polynom $\varphi(X_1, Y_1, \ldots, X_r, Y_r, Z_1, \ldots, Z_s)$ normiert, wenn φ die 1 darstellt.

Wir wissen aus der Algebra, dass für ein irreduzibles Polynom $p \in F[T]$ mit $T = (T_1, \ldots, T_n)$ der Quotient $A_p = F[T]/(p)$ ein Integritätsbereich ist. Damit können wir den Quotientenkörper dieses Ringes bilden und wollen diesen im Folgenden mit $F(p) := \mathrm{Quot}(A_p)$ bezeichnen. Man beachte dabei, dass im Falle $n = 1$ der Ring A_p bereits ein Körper ist und damit dann $\mathrm{Quot}(A_p) = A_p$ gilt.

Mit diesen Notationen sind wir nun in der Lage das Normtheorem von Baeza zu formulieren.

Theorem 5.2 *Normtheorem für nicht singuläre Formen* ([8] Theo. 1.1)
Es sei φ eine nicht singuläre quadratische Form über F und $p \in F[t]$ ein normiertes irreduzibles Polynom. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) Das Polynom p ist ein Ähnlichkeitsfaktor von $\varphi_{F(t)}$, das heißt es ist $p \in G_{F(t)}(\varphi)$.
(b) Die Form $\varphi_{F(p)}$ ist hyperbolisch.

Für den Beweis der Implikation (b)$\Rightarrow$(a) konstruiert man mit Hilfe des diskreten henselschen Bewertungsringes A von F einen Körper L der Charakteristik Null und liftet anschließend auch das Polynom p in den Körper L. Dort nutzt man dann die von Knebusch in „Sepcialisation of quadratic forms and symmetric bilinear forms and a norm theorem“ (1973) gezeigte analoge Version des Satzes für Char $F \neq 2$ und bringt anschließend dann das Gezeigte zurück nach F.

Die Rückrichtung basiert auf der Reduktionstheorie von Springer, angepasst an Charakteristik zwei. Beide Richtungen sind mit den bisher gezeigten Aussagen und Definitionen nicht zu beweisen und würden an dieser Stelle zu weit vom eigentlichen Ziel dieser Arbeit wegführen. Darum verweisen wir nur auf den Beweis, der in [8] zu finden ist.

Aus dem Theorem 5.2 erhalten wir dann mit iterativer Anwendung sofort die folgende Verallgemeinerung.

Theorem 5.3 *Normtheorem für nicht singuläre Formen* ([8] Theo. 1.2)
Es sei φ eine nicht singuläre quadratische Form über F und $p \in F(T)$ ein irreduzibles und bezüglich der lexikographischen Ordnung normiertes Polynom mit $T = (T_1, \dots, T_n)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) Das Polynom p ist ein Ähnlichkeitsfaktor von $\varphi_{F(T)}$, das heißt es ist $p \in G_{F(T)}(\varphi)$.
(b) Die Form $\varphi_{F(p)}$ ist hyperbolisch.

Für jede einfache algebraische Erweiterung, und damit nach dem Satz vom primitiven Element auch insbesondere für jede algebraische separable Erweiterung $F(\alpha) : F$ gilt dann mit dem Minimalpolynom $p_\alpha \in F[t]$ von α stets

$$\begin{aligned} W_q(F(\alpha)/F) &= \{\varphi \in W_q(F) \mid \varphi_{F(\alpha)} \text{ ist hyperbolisch } \} \\ &\overset{5.2}{=} \{\varphi \in W_q(F) \mid p_\alpha \varphi \cong \varphi \text{ über } F(t)\}. \end{aligned}$$

Exkurs: Weitere Normtheoreme

Im Jahr 2006 veröffentlichte Laghribi eine Arbeit, in der er eine analoge Aussage zu Theorem 5.3 auch für total singuläre Formen zeigte. Anstelle des Begriffs hyperbolisch, der für total singuläre Formen keinen Sinn macht, nutzt man den Begriff **quasi-hyperbolisch**. Eine total singuläre Form φ über F der Dimension $2n$ heißt dabei quasi-hyperbolisch, wenn sie einen maximalen total isotropen Unterraum der Dimension n enthält, das heißt wenn $i_{ql}(\varphi) = \frac{1}{2} \dim \varphi$ gilt. Mit dieser Definition gilt dann der folgende Satz.

Theorem 5.4 *Normtheorem für total singuläre Formen* ([21] Theo. 1.1)
Es sei φ eine (anisotrope) total singuläre quadratische Form über F der Dimension $n \geq 2$ und $p \in F[T]$ mit $T = (T_1, \dots, T_n)$ ein irreduzibles und normiertes Polynom. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) Das Polynom p ist ein Ähnlichkeitsfaktor von $\varphi_{F(T)}$, das heißt es ist $p \in G_{F(T)}(\varphi)$.
(b) Die Form $\varphi_{F(p)}$ ist quasi-hyperbolisch.

Im selben Jahr veröffentlichten Laghribi und Mammone noch eine weitere Arbeit, in der sie ein ähnliches Normtheorem auch für **semi-singuläre**, das heißt für singuläre, aber nicht total singuläre Formen bewiesen.

Theorem 5.5 *Normtheorem für semi-singuläre Formen* ([22] Theo. 1.1)
Es sei φ eine anisotrope semi-singuläre quadratische Form über F, $T = (T_1, \dots, T_n)$ und $p \in F[T]$ ein irreduzibles Polynom.

(a) Ist $p \in G_{F(T)}(\varphi)$, so gilt

(i) Das Polynom p ist inseparabel, das heißt es ist $\frac{\partial p}{\partial T_i} = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Insbesondere ist, falls p durch eine quadratische Form ψ gegeben ist, diese Form ψ dann total singulär.

(ii) Es ist $i_W(\varphi_{F(p)}) = \frac{1}{2}\left(\dim\varphi - \dim(\mathrm{ql}(\varphi))\right)$ und es gilt $i_{ql}(\mathrm{ql}(\varphi)) \geq \frac{1}{2}\dim\mathrm{ql}(\varphi)$.

(b) Ist p durch eine die 1 darstellende quadratische Form ψ über F gegeben, (damit ist p insbesondere normiert) dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Das Polynom p ist ein Ähnlichkeitsfaktor von $\varphi_{F(T)}$, das heißt $p \in G_{F(T)}(\varphi)$.

(ii) Die Form ψ ist total singulär, $i_W(\varphi_{F(p)}) = \frac{1}{2}(\dim\varphi - \dim(\mathrm{ql}(\varphi)))$ und es gilt $i_{ql}(\mathrm{ql}(\varphi)_{F(p)}) \geq \frac{1}{2}\dim\mathrm{ql}(\varphi)_{F(p)}$.

(iii) Die Form ψ ist total singulär und es gilt $i_{ti}(\varphi) = i_W(\varphi) + i_{ql}(\varphi) = \frac{1}{2}\dim\varphi$.

5.2 Funktionenkörper und Pfisternachbarn

Wir wollen in diesem Abschnitt einen kurzen Einblick in die Theorie der Funktionenkörper geben. Das wesentliche Ziel dieses Abschnittes ist die Isometriefrage von Pfisterformen mit Hilfe der sogenannten Pfisternachbarn zu beantworten, welche wir in diesem Abschnitt einführen werden. Darum werden wir hier die Beweise nur an passenden Stellen durchführen und gegebenenfalls auf geeignete Literatur verweisen. Es sei jedoch angemerkt, dass die Theorie der Funktionenkörper als Teilgebiet der Theorie der quadratischen Formen eine große Rolle spielt, viel über dieses Thema geforscht wird und dieser Abschnitt dem aktuellen Forschungsstand in diesem Gebiet in keinster Weise gerecht wird.

Den Funktionenkörper einer quadratischen Form erhält man mit einer ähnlichen Konstruktion wie auf Seite 61, indem man φ als ein Polynom auffasst. Dazu ist zunächst zu klären, in welchen Fällen das Polynom $\varphi(T)$ einer n-dimensionalen Form φ mit $T = (T_1, \ldots, T_n)$ irreduzibel ist.

Satz 5.6 ([24] Prop. 3)
Es sei φ eine nicht notwendigerweise reguläre n-dimensionale quadratische Form über F und $T = (T_1, \ldots, T_n)$. Dann ist das Polynom $\varphi(T) \in F[T]$ genau dann reduzibel, wenn φ isometrisch ist zu $\mathbb{H} \perp (n-2) \times \langle\, 0 \,\rangle$ oder zu $\langle\, a \,\rangle \perp (n-1) \times \langle\, 0 \,\rangle$ mit einem $a \in F^*$.

Beweis: Angenommen $\varphi(T)$ ist reduzibel, das heißt es existieren zwei homogene Polynome $f, g \in F[T]$ vom Homogenitätsgrad eins mit $\varphi(T) = f \cdot g$. Dann ist $f = a_1T_1 + \ldots + a_nT_n$ und $g = b_1T_1 + \ldots + b_nT_n$ mit $a_i, b_i \in F$ für $i = 1, \ldots, n$. Dabei können einige der a_i und der b_i gleich Null sein.

Ist g kein skalares Vielfaches von f, so kann man neue Variablen $X = (X_1, \dots, X_n)$ wählen, die $f = X_1$ und $g = X_2$ erfüllen. Dieser lineare Variablenwechsel entspricht dabei genau einer geeigneten Isometrie von φ und wegen $\varphi(X) = X_1 X_2$ folgt dann aus Dimensionsgründen $\varphi \cong \mathbb{H} \perp (n-2) \times \langle\, 0 \,\rangle$.

Sei also nun g skalares Vielfaches von f, das heißt $g = af$ für ein $a \in F^*$. Dann wählt man wie oben neue Variablen $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ mit $f = Y_1$ und $g = aY_1$, was wieder einer passenden Isometrie von φ entspricht, mit denen dann $\varphi(Y) = aY_1^2$ gilt und damit folgt $\varphi \cong \langle\, a \,\rangle \perp (n-1) \times \langle\, 0 \,\rangle$.

Die Umkehrung, dass die beiden Polynome, die aus den oben genannten Formen entstehen reduzibel sind, ist klar. $\square$

Insbesondere sind also die einzigen regulären quadratischen Formen, die reduzible Polynome besitzen die Formen $\langle\, a \,\rangle$ für ein $a \in F^*$ und die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$.

Da das Polynom einer Form φ ein homogenes Polynom vom Homogenitätsgrad zwei ist, definiert die Gleichung $\varphi(T) = 0$ eine projektive Quadrik und analog zum Funktionenkörper einer Quadrik definieren wir den Funktionenkörper einer quadratischen Form wie folgt.

Definition 5.7 ([14] S. 367)
Es sei φ eine n-dimensionale quadratische Form über F mit $T = (T_1, \dots, T_n)$ und $n \geq 1$. Ist das Polynom $\varphi(T) \in F[T]$ irreduzibel, so definieren wir den **Funktionenkörper (einer Quadrik)** von φ durch

$$F(\varphi) := \mathrm{Quot}\Big(F[T]/\big(\varphi(T)\big)\Big).$$

Ist $\varphi(T)$ reduzibel oder $\varphi = 0$, so setzen wir $F(\varphi) = F$.

Auf ähnliche Weise kann man auch die Gleichung $\varphi(T) = 0$ als affine Gleichung auffassen und erhält so eine weitere etwas verschiedene Körpererweiterung. Diese liefert jedoch ähnliche Ergebnisse über die Isotropie von Formen und wird deshalb in dieser Arbeit nicht benötigt. Nach Satz 5.6 sind die einzigen regulären Formen mit reduzibelen Polynomen bekannt und insbesondere ist damit der Funktionenkörper von anisotropen Formen mit einer Dimension echt größer als eins oder von Formen mit Dimension echt größer als zwei stets verschieden von F. Mit dieser Definitionen erhalten wir sofort das folgende Lemma.

Lemma 5.8 ([24] Coro. 2 und [26] S. 154 Remarks 5.2)
Es seien φ, ψ quadratische Formen über F.

(a) Ist $\varphi \cong \psi$, so ist $F(\varphi) \cong F(\psi)$.
(b) Für $a \in F^*$ ist $F(\varphi) = F(a\,\varphi)$.
(c) Es ist $F([1, a]) \cong F(\wp^{-1}(a))$ für ein $a \in F$.
(d) Die Form $\varphi_{F(\varphi)}$ ist isotrop.
(e) Ist $\dim \varphi \geq 3$, so ist die Erweiterung $F(\varphi) : F$ ist genau dann rein transzendent, wenn φ isotrop ist.

Der nun nachfolgende Satz entspricht dem Cassels-Pfister Unterformsatz in Charakteristik zwei und nutzt wie auch schon Theorem 4.10 den dritten Darstellungssatz 3.15 im Beweis.

Theorem 5.9 *Unterformsatz von Cassels-Pfister* ([13] Theo. 4.2(i))
Es seien φ und ψ quadratische Formen über F und φ sei anisotrop. Ist $\varphi_{F(\psi)}$ hyperbolisch, so ist $ab\psi \prec \varphi$ für alle $a \in D_F(\varphi)$ und $b \in D_F(\psi)$.

Insbesondere gilt also $\dim \psi \leq \dim \varphi$.

Dies soll als Grundlage über Funktionenkörper genügen, da wir im Wesentlichen nur die Aussage des Theorems 5.9 im späteren Verlauf verwenden werden. Weitere Resultate über Funktionenkörper von quadratischen Formen findet man etwa in [10], [14] und [20].

Nun wollen wir die eben formulierten Aussagen verwenden, um die Isometrie und die Isotropie von Pfisterformen einfacher bestimmen zu können. Dazu setzen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 5.10 ([13] S. 4038)
Es sei $\pi \in P_n(F)$ eine n-fache Pfisterform über F und φ eine quadratische Form über F. Erfüllt φ die Bedingungen

- $2^n \geq \dim \varphi > 2^{n-1} = \frac{1}{2} \dim \pi$,
- $\varphi \prec a\pi$ für ein $a \in F^*$,

so nennen wir φ einen **quadratischen Pfisternachbarn** von π oder kurz Pfisternachbarn von π. Auf analoge Weise definiert man **bilineare** und **quasi-Pfisternachbarn**.

Wir werden nun zeigen, dass sich die Isometrie- und die Isotropiefrage von Pfisterformen auf Pfisternachbarn zurückführen lässt und damit diesen Abschnitt abschließen. Der nun folgende Satz stammt aus [19], dabei haben wir die Aussage (d) leicht abgeändert und den Beweis etwas vereinfacht.

Satz 5.11 ([19] Prop. 3.1)

(a) Ist φ ein Pfisternachbar von $\pi \in P_n(F)$, so ist φ genau dann isotrop, wenn π es ist.

(b) Eine total singuläre quadratische Form ist niemals ein Pfisternachbar.

(c) Ist φ ein Pfisternachbar von $\pi \in P_n(F)$, so ist $\varphi_{F(\pi)}$ isotrop.

(d) Ist φ ein Pfisternachbar von $\pi_1 \in P_n(F)$ und $\pi_2 \in P_m(F)$, so ist $n = m$ und $\pi_1 \cong \pi_2$.

(e) Ist $\pi \in P_n(F)$ und φ eine anisotrope quadratische Form über F, so ist φ ein Pfisternachbar von π, genau dann, wenn $\dim \varphi > 2^{n-1}$ und $\pi_{F(\varphi)}$ isotrop ist.

Beweis: Zu (a): Ist φ isotrop, so ist wegen $\varphi \prec a\pi$ für ein passendes $a \in F^*$ auch $a\pi$ und damit auch π isotrop. Sei nun umgekehrt π isotrop, dann ist π wegen Korollar 4.6 hyperbolisch und enthält wegen Lemma 1.44 einen total isotropen Unterraum U der Dimension $\frac{1}{2} \dim \pi = 2^{n-1}$. Ist W der der Form φ und V der der Form π zugrunde liegende Vektorraum, so können wir annehmen, dass $W \subseteq V$ gilt und wegen $\dim W > 2^{n-1}$ ist dann $W \cap U \neq \{0\}$ und damit φ isotrop.

Zu (b): Angenommen die Form $\langle c_1, \ldots, c_s \rangle$ ist ein Pfisternachbar von $\pi \in P_n(F)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren nach 1.17 Elemente $d_1, \ldots, d_s \in F$, eine nicht singuläre quadratische Form δ über F und ein $a \in F^*$ mit $a\pi \cong [c_1, d_1] \perp \ldots \perp [c_s, d_s] \perp \delta$. Damit folgt dann aber

$$2s = 2 \dim \varphi > \dim \pi = \dim \left([c_1, d_1] \perp \ldots \perp [c_s, d_s] \perp \delta \right) = 2s + \dim \delta$$

und damit der Widerspruch $0 > \dim \delta$.

Zu (c): Es ist $\varphi_{F(\pi)}$ ein Pfisternachbar von $\pi_{F(\pi)}$ und da nach Lemma 5.8 die Form $\pi_{F(\pi)}$ isotrop ist, ist es mit (a) auch $\varphi_{F(\pi)}$.

Zu (d): Angenommen es wäre $n \neq m$ und damit oBdA $n > m$. Dann folgt aus der ersten Eigenschaft eines Pfisternachbarn $\dim \varphi > 2^{n-1} \geq 2^m = \dim \pi_2$ und wir erhalten einen Widerspruch zu $\varphi \prec b\pi_2$ für passendes $b \in F^*$. Also ist $n = m$.

Ist die Form φ isotrop, so sind π_1 und π_2 nach (a) ebenfalls isotrop, damit beide hyperbolisch und die Isometrie von π_1 und π_2 folgt dann aus Dimensionsgleichheit.

Sei also nun φ anisotroper Nachbar von π_1 und π_2 und $\dim \varphi, \dim \pi_1, \dim \pi_2 \geq 2$. Nach (a) sind dann auch π_1 und π_2 anisotrop und es existieren die Funktionenkörper $F(\pi_1)$ und $F(\pi_2)$ und sind verschieden von F. Nach (c) ist $\varphi_{F(\pi_2)}$ isotrop und damit ist dann ebenfalls $(\pi_1)_{F(\pi_2)}$ isotrop und mit Korollar 4.6 folgt dann, dass $(\pi_1)_{F(\pi_2)}$ hyperbolisch ist. Da die Formen π_1 und π_2 anisotrop sind und $1 \in D_F(\pi_1) \cap D_F(\pi_2)$ ist, folgt dann mit Theorem 5.9, dass π_1 von π_2 dominiert wird. Aus Dimensionsgründen folgt dann $\pi_1 \cong \pi_2$.

Zu (e): Ist φ ein Pfisternachbar von π, so folgt sofort $\dim\varphi > 2^{n-1}$. Da $\varphi_{F(\varphi)}$ ein isotroper Pfisternachbar von $\pi_{F(\varphi)}$ ist, folgt mit (a), dass auch $\pi_{F(\varphi)}$ isotrop ist. Sei nun umgekehrt $\pi_{F(\varphi)}$ isotrop und damit hyperbolisch. Mit Theorem 5.9 folgt dann $\varphi \prec a\pi$ für ein passendes $a \in F^*$ und zusammen mit $\dim\varphi > 2^{n-1}$ sind dann beide Eigenschaften eines Pfisternachbarn erfüllt. □

5.3 Total singuläre quadratische Formen und Körpererweiterungen

Auch wenn wir in Kapitel 7 Wittkerne bestimmen, das heißt nicht singuläre Formen berechnen, die unter Körpererweiterungen hyperbolisch werden, werden wir in den Beweisen immer wieder auf total singuläre Formen treffen. Aus diesem Grund wollen wir in diesem Abschnitt nun noch zwei sehr hilfreiche Aussagen über eben diese Formen im Zusammenhang mit Körpererweiterungen treffen. Dazu übernehmen wir zunächst aus der Algebra die folgende Definition.

Definition 5.12 ([10] S. 96)
Eine Körpererweiterung $K : F$ heißt **separabel**, wenn es einen Zwischenkörper $K : E : F$ gibt, sodass $E : F$ rein transzendent und $K : E$ algebraisch und separabel ist.

Wir haben bereits in Kapitel 3 gesehen, dass anisotrope quadratische Formen über rein transzendente Erweiterungen anisotrop bleiben. Das gilt im Allgemeinen nicht für separable Erweiterungen, wie das Beispiel 2.8 gezeigt hat. Schränken wir uns dabei allerdings auf total singuläre Formen ein, so stimmt diese Aussage, das heißt es gilt der folgende Satz.

Satz 5.13 ([21] Lemma 2.8)
Es sei φ eine nicht notwendigerweise reguläre total singuläre quadratische Form über F und $L : F$ eine Körpererweiterung.

(a) Ist $L : F$ rein transzendent und φ_L isotrop bzw. quasi-hyperbolisch, so ist auch φ isotrop bzw. quasi-hyperbolisch.

(b) Ist $L : F$ separabel und φ_L isotrop bzw. quasi-hyperbolisch, so ist auch φ isotrop bzw. quasi-hyperbolisch.

Insbesondere bleiben also anisotrope total singuläre Formen bei separablen Erweiterungen stets anisotrop.

Beweis: Zu (a): Die Isotropieaussage folgt sofort mit Lemma 3.3. Sei also nun φ_L quasi-hyperbolisch. Dann ist jede Unterform mit einer Dimension echt größer als $\frac{1}{2}\dim\varphi$ isotrop über L und damit auch über F und es folgt also, dass $\dim\varphi_{an} \leq \frac{1}{2}\dim\varphi$ gilt.

Betrachten wir nun die Form $\varphi = \langle\, c_1, \ldots, c_s \,\rangle$ mit passenden $c_1, \ldots, c_s \in F$ über L, so können wir nach Satz 1.36 und dem Basisauswahlsatz aus der linearen Algebra geeignete $c_{j_1}, \ldots, c_{j_t} \in \{c_1, \ldots, c_s\}$ wählen, sodass $\varphi_L \cong \langle\, c_{j_1}, \ldots, c_{j_t}, 0. \ldots, 0 \,\rangle$ gilt. Insbesondere finden wir also eine Unterform $\psi \subseteq \varphi$, für die $\psi_L \cong (\varphi_L)_{an}$ gilt. Da φ_L quasi-hyperbolisch ist, ist dann $\dim \psi = \frac{1}{2} \dim \varphi$. Insbesondere ist natürlich ψ anisotrop über L und damit auch über F und damit folgt dann $\psi \subseteq \varphi_{an}$ nach Korollar 1.37, also auch $\dim \psi = \frac{1}{2} \dim \varphi \leq \dim \varphi_{an}$.

Zu (b): Nach dem Beweis von (a) reicht es nun eine algebraische separable Erweiterung zu betrachten. Es sei also φ_L isotrop, V der der Form φ zugrunde liegende Vektorraum, $\varphi \cong \langle\, c_1, \ldots, c_s \,\rangle$ bezüglich der Basis $b_1, \ldots, b_s$ von V und $e_1, \ldots, e_n$ eine F-Basis von L. Weiter sei $w \in V_L$ ein von Null verschiedene isotroper Vektor von φ_L. Dann ist

$$w = \sum_{i=1}^{s} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j \right) b_i,$$

für passende $\lambda_{ij} \in F$ und $\mu_i \in L$ mit $i = 1, \ldots, s$ und $j = 1, \ldots, n$. Dabei sind nicht alle Koeffizienten Null, da w nicht der Nullvektor ist und damit ergibt sich dann

$$0 = \varphi_L(w) = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_{ij}^2 e_j^2 \right) \right) c_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{s} c_i \lambda_{ij}^2 \right) e_j^2.$$

Da die Erweiterung $L : F$ separabel ist, ist mit $e_1, \ldots, e_n$ auch $e_1^2, \ldots, e_n^2$ eine F-Basis von L, damit insbesondere linear unabhängig und es folgt, dass

$$\sum_{i=1}^{s} c_i \lambda_{ij}^2 = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, n \text{ gilt.}$$

Da die λ_{ij} nicht alle Null sind, ist mindestens eine dieser n Darstellung der Null nicht trivial und damit ist dann φ isotrop. Die Aussage der quasi-Hyperbolizität folgt analog zu (a). □

Diese Aussage wird gerade in Kapitel 7.1 eine wichtige Rolle spielen und ist im Allgemeinen sogar für p**-Formen**, das heißt für Abbildungen Φ über Körpern der Charakteristik p, die von einem Vektorraum in den Grundkörper abbilden, additiv sind und $\phi(\lambda v) = \lambda^p \phi(v)$ für $v \in V$ und $\lambda \in F$ erfüllen, gültig. Dabei entsprechen die 2-Formen genau den total singulären quadratischen Formen in Körpern der Charakteristik zwei. Ein Beweis dieser allgemeineren Aussage findet man etwa in [11, Prop. 5.3], dieser ist zwar deutlich kürzer und eleganter, benutzt jedoch den sogenannte Normkörper einer total singulären quadratischen Form und einige mit diesem Begriff formulierte Aussagen, welche wir in dieser Arbeit nicht eingeführt haben, da wir sie für die Berechnung der Wittkerne nicht benötigen werden. Der Normkörper und der damit einhergehende Normgrad einer total singulären quadratischen Form ist allerdings ein nützliches Hilfsmittel, um verschiedene Aussagen über eben diese total singuläre Form zu treffen. So kann man mit dem Normgrad unter anderem die anisotropen total singulären quadratischen Formen klassifizieren, die ähnlich zu quasi-Pfisterformen sind. Eine genaue Definition dieser Begriffe und einige Aussagen findet man etwa in [13, Section 8].

In Kapitel 7.2 werden wir uns mit der Körpererweiterung $F(\sqrt[4]{d}) : F$ beschäftigen und auch für diese Erweiterung den Wittkern bestimmen. Dafür benötigen wir noch einen Hilfssatz, der eine Aussage darüber macht, wie sich total singuläre Formen bei einer solchen Erweiterung verhalten. Dazu werden wir den folgenden Satz so allgemein wie möglich formulieren und dann nur im Spezialfall verwenden.

Satz 5.14 ([21] Lemma 2.10)
Es sei $d \in F^*$ und $F(\sqrt[2^m]{d}) : F$ eine rein inseparable Körpererweiterung vom Grad 2^m, das heißt das Polynom $t^{2^m} + d \in F[t]$ ist irreduzibel. Weiter sei φ eine total singuläre (anisotrope) quadratische Form über F mit $\dim \varphi \geq 2$. Dann ist $\varphi_{F(\sqrt[2^m]{d})}$ genau dann isotrop, wenn ein $a \in F^*$ existiert, sodass $a \langle 1, d \rangle$ eine Unterform von φ ist.

Beweis: Setze $k = 2^m - 1, l = 2^{m-1} - 1$, und $\alpha = \sqrt[2^m]{d}$. Die Rückrichtung der Behauptung ist trivial, da mit $d \in F(\alpha)^2$ sofort $a \langle 1, d \rangle \cong a \langle 1, 1 \rangle \cong a \langle 1, 0 \rangle$ folgt.

Nehmen wir nun also an, dass $\varphi_{F(\alpha)}$ isotrop ist. Es sei V der der Form φ zugrunde liegende Vektorraum und $b_1, \ldots, b_s$ eine Basis von V, bezüglich der φ die Gestalt $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_s \rangle$ mit $a_1, \ldots, a_s \in F^*$ besitzt. Da $\varphi_{F(\alpha)}$ isotrop ist, existiert ein von Null verschiedener Vektor $v \in V_{F(\alpha)}$ für den $\varphi(v) = 0$ gilt. Mit Hilfe der Basis schreiben wir diesen Vektor als $v = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i b_i$ mit $\lambda_i \in F(\alpha)$ für $i = 1, \ldots, s$. Dabei sind nicht alle $\lambda_i = 0$ und da die Potenzen von α eine F-Basis von $F(\alpha)$ bilden, können wir jedes λ_i schreiben als $\lambda_i = \sum_{j=0}^{k} s_{ij}\alpha^j$ mit $s_{ij} \in F$ für $i = 1, \ldots, s,\ j = 0, \ldots, k$. Damit folgt dann

$$0 = \varphi(v) = \sum_{i=1}^{s} a_i \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{s} a_i \left(\sum_{j=0}^{k} s_{ij}\alpha^j \right)^2 = \sum_{i=1}^{s} a_i \left[\left(\sum_{j=0}^{l} s_{ij}\alpha^j \right)^2 + \left(\sum_{j=l+1}^{k} s_{ij}\alpha^j \right)^2 \right]$$
$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{s} a_i \left(\sum_{j=0}^{l} s_{ij}\alpha^j \right)^2 = \sum_{i=1}^{s} a_i \left(\sum_{j=l+1}^{k} s_{ij}\alpha^j \right)^2 . \tag{5.4}$$

Da die Summen alle endlich sind, erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{l}\left(\sum_{i=1}^{s} a_i s_{ij}^2\right)\alpha^{2j} &\overset{(5.4)}{=} \alpha^{2^m}\left[\sum_{j=l+1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{s} a_i s_{ij}^2\right)\alpha^{2j-2^m}\right] \\ &= \alpha^{2^m}\left[\sum_{j=0}^{l}\left(\sum_{i=1}^{s} a_i s_{ij+l+1}^2\right)\alpha^{2j}\right]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Für $j = 0, \dots, k$ setzen wir nun $v_j = \sum_{i=1}^{s} s_{ij} b_i \in V$. Da $\alpha^{2^m} = d$ ist, erhalten wir aus Gleichung (5.5) nach einem Koeffizientenvergleich bezüglich der Basis α^{2j}, dass

$$\sum_{i=1}^{s} a_i s_{ij}^2 = d \sum_{i=1}^{s} a_i s_{ij+l+1}^2 \ , \quad \text{d.h. dass} \quad \varphi(v_j) = d\,\varphi(v_{j+l+1})$$

für $j = 0, \dots, l$ gilt. Da $v \neq 0$ ist, existiert mindestens ein $j_0 \in \{0, \dots, k\}$ mit $v_{j_0} \neq 0$, dies gelte oBdA für $j_0 = 0$. Dann ist $\varphi(v_0) = d\,\varphi(v_{l+1}) \neq 0$, da φ anisotrop ist. Weiter ist die Form $\langle\, \varphi(v_0), \varphi(v_{l+1})\,\rangle$ anisotrop, denn angenommen sie wäre isotrop, so existieren $x, y \in F$, nicht beide Null, mit $\varphi(v_0)x^2 + \varphi(v_{l+1})y^2 = 0$. Mit $c := \varphi(v_{l+1})$ folgt dann $dcx^2 + cy^2 = 0$, das heißt $dx^2 + y^2 = 0$. Wäre $x = 0$, so folgt $y = 0$, für $y = 0$ folgt $d = 0$ und für $x, y \neq 0$ folgt $d = \frac{y^2}{x^2} \in F^{*2}$, was in allen drei Fällen einen Widerspruch liefert. Also ist die Form $\langle\, dc, c\,\rangle \cong c\,\langle\, 1, d\,\rangle$ anisotrop und da natürlich $\varphi(v_0), \varphi(v_{l+1}) \in D_F(\varphi)$ gilt, folgt schließlich mit Korollar 1.37 dass $c\,\langle\, 1, d\,\rangle \subseteq \varphi_{an} = \varphi$ und damit die Behauptung gilt. $\square$

Insbesondere enthält also jede s-dimensionale total singuläre Form φ, die über $\mathrm{F}(\sqrt[4]{d}\,)$ isotrop wird bereits eine zweidimensionale Unterform φ_0, die über $\mathrm{F}(\sqrt[4]{d}\,)$ isotrop wird und alle zweidimensionale Formen, die bei dieser Erweiterung isotrop werden, sind ähnlich zu der quasi-Pfisterform $\langle\!\langle\, d\,\rangle\!\rangle$.

Eine leicht abgeschwächte Version von Satz 5.14 ist auch wieder für die bereits angesprochenen p-Formen gültig. Vergleiche dazu etwa [11, Prop. 5.10].

Mit diesen beiden Aussagen haben wir nun schließlich alles zusammen, um mit den Berechnungen der Wittkerne zu beginnen.

Teil II

Berechnung von Wittkernen

6 Bekannte Wittkerne

Nachdem wir uns in den ersten Kapiteln ein zufriedenstellendes Grundwissen über die Theorie der quadratischen Formen über Körper der Charakteristik zwei angeeignet haben, wollen wir nun beginnen die schon bereits bekannten Wittkerne zu beschreiben. Dabei wird die Unterscheidung in separable und inseparable Körpererweiterungen eine zentrale Rolle spielen, da Körper der Charakteristik zwei die einzigen Körper sind, bei denen man bei quadratischen Erweiterungen in eben diese beiden Fälle unterscheiden muss. Für diese Unterscheidung werden wir die Artin-Schreier Abbildung $\wp$ nutzen, denn es ist bereits aus Kapitel 1 bekannt, dass eine quadratische separable Erweiterung vom Typ $F(\wp^{-1}(d))$ für ein $d \in F \setminus \wp(F)$ und eine quadratische inseparable Erweiterung vom Typ $F(\sqrt{d})$ für ein $d \in F^* \setminus F^{*2}$ ist. Wir werden uns bei der Berechnung der Wittkerne im Wesentlichen auf nicht singuläre quadratische Formen beschränken, da nur diese Repräsentanten der Wittklassen in der Wittgruppe sind, das heißt in vielen Fällen werden die Begriffe Dominanz und Unterform zusammenfallen. Wir beginnen nun zunächst mit den kleinst möglichen Körpererweiterungen.

6.1 Inseparable quadratische Körpererweiterungen

In diesem Abschnitt sei nun $K := F(\sqrt{d})$ für ein $d \in F^* \backslash F^{*2}$. Der Wittkern dieser Erweiterung wurde zunächst von Baeza in seiner Arbeit [6] bis auf Wittäquivalenz bestimmt und später im Jahr 1994 wurde dann diese Aussage von Hamza Ahmad in seiner Arbeit „On quadratic forms over inseparable quadratic extensions“ [1] auf Isometrie verstärkt. Diese verstärkte Version wollen wir nun nachvollziehen und betrachten dazu zunächst die folgenden beiden Aussagen.

Satz 6.1 ([1] Prop. 2.3)
Es sei φ eine nicht singuläre quadratische Form über F und $a \in F$ mit $a \notin D_F(\varphi)$. Dann ist $a \in D_K(\varphi) \cup \{0\}$ genau dann, wenn eine der folgenden beiden Aussagen erfüllt ist.

(a) Es existieren $c, e \in F$, sodass $[a(c^2 + d), e]$ eine Unterform von φ ist.

(b) Es existieren $b, e, f \in F$, sodass $[b, e] \perp [a + bd, f]$ eine Unterform von φ ist.

Beweis: Da $d \in K^2$ ist, gilt nach Satz 1.34 über K $[b, e] \cong [bd, \frac{e}{d}]$ und $[a(c^2 + d), e] \cong [a(c + \sqrt{d})^2, e] \cong [a, \frac{e}{(c+\sqrt{d})^2}]$ und damit ist die erste Richtung gezeigt.

Es sei also nun $a \in D_K(\varphi) \cup \{0\}$ und V der der Form φ zugrunde liegende Vektorraum. Da φ das Element a nicht über F darstellt, existieren Vektoren $v_1, v_2 \in V, v_2 \neq 0$ mit $a = \varphi(v_1 + \sqrt{d}v_2) = \varphi(v_1) + d\,\varphi(v_2) + \sqrt{d}\,\mathfrak{b}_\varphi(v_1, v_2)$. Da $a \in F$ ist, folgt also

$$a = \varphi(v_1) + d\,\varphi(v_2) \quad \text{und} \quad 0 = \mathfrak{b}_\varphi(v_1, v_2).$$

Angenommen v_1 und v_2 sind linear abhängig, das heißt es existiert ein $c \in F^*$ mit $v_1 = cv_2$, dann ist $a = (c^2 + d)\,\varphi(v_2)$. Wegen $c^2 \neq d$ stellt φ das Element $\frac{a}{c^2+d}$ und damit dann auch $(c^2 + d)a$ über F dar und mit Lemma 1.17 folgt dann, dass $[a(c^2 + d), e] \subseteq \varphi$ für ein passendes $e \in F$ ist.

Sei also nun angenommen, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind. Setzt man nun $b := \varphi(v_2)$ und nutzt noch einmal Lemma 1.17 für die zwei orthogonalen Vektoren v_1, v_2, so erhält man mit $\varphi(v_1) = a + bd$ die Existenz von $e, f \in F$, sodass $[b, e] \perp [a + bd, f] \subseteq \varphi$ gilt. □

Für den Fall $a = 0$ in Satz 6.1 erhält man dann das folgende Korollar.

Korollar 6.2 ([1] Coro. 2.4)
Es sei φ eine anisotrope nicht singuläre quadratische Form über F. Dann ist φ_K genau dann isotrop, wenn $b, e, f \in F$ existieren, sodass $[b, e] \perp [bd, f]$ eine Unterform von φ ist.

Beweis: Setzt man in Satz 6.1 $a = 0$, so kann der erste Fall nicht eintreten, weil dann φ schon über F isotrop wäre. □

Damit haben wir schon alles zusammen, um die Kernaussage aus [1] zu beweisen.

Theorem 6.3 ([1] Theo. 2.5)
Es sei (φ, V) ein anisotroper nicht singulärer quadratischer Raum über F. Ist der Witt-index $i_W(\varphi_K) = r \geq 1$, dann gilt eine der nachfolgenden beiden Aussagen.

(a) Für passende $a, b \in F$ ist $[a, b] \perp d[a, b] = \langle 1, d \rangle_b \otimes [a, b]$ eine Unterform von φ.
(b) Es existieren $a_i, b_i, c_i \in F$ für $i = 1, \ldots, r$, sodass

$$([a_1, b_1] \perp [da_1, c_1]) \perp \ldots \perp ([a_r, b_r] \perp [da_r, c_r])$$

eine Unterform von φ ist.

Beweis: Da $r \geq 1$ ist, ist φ_K isotrop. Nach Korollar 6.2 existieren dann $a_1, b_1, c_1 \in F$, sodass $[a_1, b_1] \perp [da_1, c_1]$ eine Unterform von φ ist. Es sei nun m die größte positive Zahl, sodass

$$(\varphi, V) \cong ([a_1, b_1] \perp [da_1, c_1]) \perp \ldots \perp ([a_m, b_m] \perp [da_m, c_m]) \perp (\psi, V')$$

mit einer nicht singulären quadratischen Form ψ der Dimension $\dim\varphi - 4m$ gilt und wir setzen $L_i := [a_i, b_i] \perp [da_i, c_i]$. Wäre $m = r$, so ist nichts zu zeigen. Da aber $d \in K^2$ ist, gilt $\mathbb{H} \subseteq (L_i)_K$ nach Satz 1.34 über K und damit muss im Fall $m \neq r$ dann $m < r$ gelten.

Es sei also nun $m < r$. Weiter seien e_i, f_i die Basis von $[a_i, b_i]$ und g_i, h_i die Basis von $[da_i, c_i]$ für $i = 1, \ldots, m$. Dann sind die Vektoren

$$v_i := \sqrt{d} e_i + g_i \in V_K \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

linear unabhängig, da es die e_i und die g_i sind. Sie sind weiter orthogonal, da es die L_i und damit auch die $(L_i)_K$ sind und es gilt $v_i \in (L_i)_K$ für $i = 1, \ldots, m$. Die Vektoren v_i sind außerdem isotrop, da

$$\varphi(v_i) = d\,\varphi(e_i) + \varphi(g_i) + \sqrt{d}\,\mathfrak{b}_\varphi(e_i, g_i) = da_i + da_i + 0 = 0$$

gilt. Damit ist also $\mathrm{sp}_K(v_1, \ldots, v_m)$ ein total isotroper Unterraum der Dimension m in V_K. Da $i_W(\varphi_K) = r > m$ ist, ist $\mathrm{sp}_K(v_1, \ldots, v_m)$ in einem total isotropen Unterraum S der Dimension r enthalten (vergleiche Satz 1.45). Wähle nun ein $v_0 \in S$, das linear unabhängig zu $v_1, \ldots, v_m$ über K ist und setzte

$$v := v_0 + \mathfrak{b}_\varphi(v_0, h_1)v_1 + \ldots + \mathfrak{b}_\varphi(v_0, h_m)v_m = v_0 + \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{b}_\varphi(v_0, h_i)v_i.$$

Da $v_i, h_i \in (L_i)_K$ für $i = 1, \ldots, m$ ist, folgt nun

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_\varphi(v, h_i) &= \mathfrak{b}_\varphi(v_0, h_i) + \mathfrak{b}_\varphi(v_0, h_i)\,\mathfrak{b}_\varphi(v_i, h_i)\\ &= \mathfrak{b}_\varphi(v_0, h_i) + \mathfrak{b}_\varphi(v_0, h_i)\,\mathfrak{b}_\varphi(\sqrt{d} e_i + g_i, h_i)\\ &= \mathfrak{b}_\varphi(v_0, h_i) + \mathfrak{b}_\varphi(v_0, h_i)(\sqrt{d} \cdot 0 + 1) = 0.\end{aligned}$$

Da $v_0, \ldots, v_m \in S$ und S ein total isotroper Unterraum von V_K ist, sind die Vektoren $v_0, \ldots, v_m$ isotrop und paarweise orthogonal und damit ist auch auch v ein isotroper Vektor von φ. Weiter ist v ebenfalls linear unabhängig zu $v_1, \ldots, v_m$ über K, da v_0 es ist. Wir schreiben nun

$$v = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i e_i + \beta_i f_i + \gamma_i g_i + \delta_i h_i) + u,$$

mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in K$ und $u \in V'_K$. Da nun

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{b}_\varphi(v, h_i) = \mathfrak{b}_\varphi(\gamma_i g_i, h_i) + \mathfrak{b}_\varphi(\delta_i h_i, h_i) = \gamma_i \, \mathfrak{b}_\varphi(g_i, h_i) = \gamma_i \quad \text{und} \\ 0 &= \mathfrak{b}_\varphi(v, v_i) = \mathfrak{b}_\varphi(v, \sqrt{d} e_i + g_i) = \sqrt{d} \, \mathfrak{b}_\varphi(v, e_i) + \mathfrak{b}_\varphi(v, g_i) \\ &= \sqrt{d} \, \mathfrak{b}_\varphi(\beta_i f_i, e_i) + \mathfrak{b}_\varphi(\delta_i h_i, g_i) = \sqrt{d} \beta_i + \delta_i \end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, m$ gilt, ist also

$$v = \sum_{i=1}^{m} \Big(\alpha_i e_i + \beta_i (f_i + \sqrt{d} h_i)\Big) + u_1 + \sqrt{d} u_2, \tag{6.1}$$

mit $u = u_1 + \sqrt{d} u_2$ und $u_1, u_2 \in V'$.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass $\beta_1 = 1$ ist und es sei $v = x + \sqrt{d} y$ mit $x, y \in V$. Löst man nun Gleichung (6.1) nach f_1 und h_1 auf, so erhält man

$$f_1 = \alpha_1 e_1 + x + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i e_i + \beta_i f_i + u_1 \quad \text{und} \quad h_1 = y + \sum_{i=2}^{m} \beta_i h_i + u_2$$

und damit folgt dann

$$\begin{aligned} L_1 + \ldots + L_i + V' &= \mathrm{sp}_F(e_1, f_1, g_1, h_1) + L_2 + \ldots + L_m + V' \\ &= \mathrm{sp}_F(e_1, g_1, x, y) + L_2 + \ldots + L_m + V'. \end{aligned}$$

An diesem Ausdruck sehen wir, dass e_1, g_1, x, y linear unabhängig über F sind. Da nun

$$\mathfrak{b}_\varphi(e_1, v) = \beta_1 \, \mathfrak{b}_\varphi(e_1, f_1) = 1 \cdot 1 = 1$$

und damit dann

$$1 = \mathfrak{b}_\varphi(e_1, v) = \mathfrak{b}_\varphi(e_1, x) + \sqrt{d} \, \mathfrak{b}_\varphi(e_1, y)$$

folgt, gilt also $1 = \mathfrak{b}_\varphi(e_1, x)$ und $0 = \mathfrak{b}_\varphi(e_1, y)$. Auf ähnliche Weise zeigt man nun $\mathfrak{b}_\varphi(g_1, v) = \sqrt{d}$ und erhält damit analog $\mathfrak{b}_\varphi(g_1, x) = 0$ und $\mathfrak{b}_\varphi(g_1, y) = 1$. Da nach Definition $\varphi(e_1) = a_1$ und $\varphi(g_1) = d a_1$ gilt, ist also $\varphi(g_1) = d \, \varphi(e_1)$. Weiter folgt aus

$0 = \varphi(v) = \varphi(x) + d\,\varphi(y) + \sqrt{d}\,\mathfrak{b}_\varphi(x,y)$, dass einerseits $\mathfrak{b}_\varphi(x,y) = 0$ ist und damit x, y orthogonale Vektoren sind und andererseits, dass $d\,\varphi(x) = d^2\,\varphi(y) = \varphi(dy)$ ist. Setzen wir nun $W := \mathrm{sp}_F(e_1, x, g_1, y)$, so hat $\varphi_{|W}$ bezüglich der Basis e_1, x, g_1, dy die Gestalt $[a_1, b] \perp d[a_1, b]$ mit $b := \varphi(x)$. Insbesondere ist W ein nicht singulärer quadratischer Raum von V, damit $V = W \perp W^\perp$ und $[a_1, b] \perp d[a_1, b]$ ist eine Unterform von φ.

Ist nun $\beta_1 \neq 0$, so ersetzt man v durch $\beta_1^{-1}v$ und erhält die Behauptung analog zu den gerade geführten Schritten. Wir können also $\beta_1 = 0$ annehmen. Ist nun $\beta_2 \neq 0$, so ersetzt man wieder v durch $\beta_2^{-1}v$ und geht analog zu den Schritten oben vor. Also können wir auch $\beta_2 = 0$ annehmen. Setzt man dieses Argument nun fort, so bleibt der Fall $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$ zu betrachten. Es ist also nun

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + u.$$

Da $\alpha_i \in K$ gilt, schreiben wir nun $\alpha_i = t_i + \sqrt{d}s_i$ mit $t_i, s_i \in F$ für $i = 1, \ldots, m$ und weiter sei

$$p := \psi(u) = \varphi(v) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\right) = 0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 a_i = \sum_{i=1}^{m} \left(t_i^2 + ds_i^2\right) a_i.$$

Insbesondere werden die Elemente p und $p(c^2 + d)$ für jedes $c \in F$ über F durch die Unterform $[a_1, b_1] \perp [da_1, c_1] \perp \ldots \perp [a_m, b_m] \perp [da_m, c_m]$ dargestellt. Setze dazu im zugehörigen Polynom

$$\sum_{i=1}^{m} a_i X_i^2 + X_i Y_i + b_i Y_i^2 + da_i M_i^2 + M_i N_i + c_i N_i^2$$

von $[a_1, b_1] \perp [da_1, c_1] \perp \ldots \perp [a_m, b_m] \perp [da_m, c_m]$ die Variablen einmal als $X_i = t_i, M_i = s_i$ und $Y_i = N_i = 0$ und ein weiteres mal als $X_i = ct_i + ds_i, M_i = t_i + cs_i$ und $Y_i = N_i = 0$. Damit kann ψ das Element p nicht schon über F darstellen, da sonst φ über F isotrop wäre und weiter kann ψ auch keine Form der Art $[p(c^2 + d), c']$ mit $c, c' \in F$ dominieren, da dann ebenfalls φ bereits über F isotrop wäre. Des Weiteren ist $u \neq 0$, denn angenommen u wäre Null, dann wäre v ein von Null verschiedener Vektor mit

$$0 = \varphi(v) = \varphi(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m) = a_1 t_1^2 + a_1 ds_1^2 + \ldots + a_m t_m^2 + a_m ds_m^2$$

und damit wäre wieder $[a_1, b_1] \perp [da_1, c_1] \perp \ldots \perp [a_m, b_m] \perp [da_m, c_m] \subseteq \varphi$ bereits über

F isotrop, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also ist $u \neq 0$ und ψ stellt p über K und nicht über F dar. Mit Satz 6.1 existieren also $a_{m+1}, b_{m+1}, c_{m+1} \in F$, sodass $[a_{m+1}, b_{m+1}] \perp [p + da_{m+1}, c_{m+1}]$ eine Unterform von ψ ist, da der erste Fall aus 6.1 wegen obigen Argumenten nicht auftreten kann. Dann gilt also

$$\begin{aligned}\varphi \cong & [a_1, b_1] \perp [da_1, c_1] \perp \ldots \perp [a_m, b_m] \perp [da_m, c_m] \\ & \perp [a_{m+1}, b_{m+1}] \perp [p + da_{m+1}, c_{m+1}] \perp \chi\end{aligned}$$

für eine nicht singulär quadratische Form χ der Dimension $\dim \psi - 4$. Es seien nun $e, f \in V$ die Basis zu $[a_{m+1}, b_{m+1}]$ und $g, h \in V$ die Basis zu $[p + da_{m+1}, c_{m+1}]$ und setze

$$g' := g + \sum_{i=1}^{m} t_i e_i + s_i g_i.$$

Die Vektoren $e_1, g_1, \ldots, e_m, g_m, e, g'$ sind nun linear unabhängig und wegen

$$\begin{aligned}&\mathfrak{b}_\varphi(g', e_i) = \mathfrak{b}_\varphi(g, e_i) + \sum_{j=1}^{m} t_j\, \mathfrak{b}_\varphi(e_j, e_i) + \sum_{j=1}^{m} s_j\, \mathfrak{b}_\varphi(g_j, e_i) = 0 + 0 + 0 = 0,\\ &\mathfrak{b}_\varphi(g', g_i) = \mathfrak{b}_\varphi(g, g_i) + \sum_{j=1}^{m} t_j\, \mathfrak{b}_\varphi(e_j, g_i) + \sum_{j=1}^{m} s_j\, \mathfrak{b}_\varphi(g_j, g_i) = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \text{und}\\ &\mathfrak{b}_\varphi(g', e) = 0\end{aligned}$$

paarweise orthogonal. Da auch

$$\varphi(g') = \varphi(g) + \sum_{j=1}^{m} t_j^2\, \varphi(e_i) + \sum_{j=1}^{m} s_j^2\, \varphi(g_i) = \varphi(g) + p = p + da_{m+1} + p = da_{m+1}$$

gilt, folgt dann mit Lemma 1.17 die Existenz von passenden $b_i', c_i' \in F$ für $i = 1, \ldots, m+1$, sodass

$$[a_1, b_1'] \perp [da_1, c_1'] \perp \ldots \perp [a_{m+1}, b_{m+1}'] \perp [da_{m+1}, c_{m+1}']$$

eine Unterform von φ ist. Dies ist dann allerdings ein Widerspruch zu Maximalität von m, damit muss $m = r$ gelten und die Behauptung ist gezeigt. □

Insbesondere haben wir also gerade gezeigt, dass man jede nicht singuläre quadratische Form φ mit einem $l \in \mathbb{N}_0$ und nicht singulären quadratischen Formen φ_0, φ_1 schreiben kann als

$$\varphi \cong \varphi_1 \perp \langle 1, d \rangle_b \otimes \varphi_0 \perp [a_1, b_1] \perp d[a_1, c_1] \perp \ldots \perp [a_l, b_l] \perp d[a_l, c_l],$$

sodass $i_W(\varphi_K) = \dim \varphi_0 + l$ gilt und $(\varphi_1)_K$ anisotrop ist. Außerdem erhalten wir sofort das folgende Korollar.

Korollar 6.4 ([1] Theo. 2.6)
Es sei φ eine anisotrope nicht singuläre quadratischer Form über F mit Wittindex $i_W(\varphi_K) > \frac{1}{4}\dim \varphi$. Dann existieren $a, b \in F$, sodass $[a,b] \perp d[a,b] = \langle 1, d \rangle \otimes [a,b]$ eine Unterform von φ ist.

Beweis: Die Aussage folgt sofort aus Theorem 6.3 zusammen mit einem Dimensionsargument. □

Es ist noch offen, ob das Korollar 6.4 auch für kleinere Wittindizes als $\frac{1}{4}\dim \varphi$ richtig ist, oder ob es stets eine anisotrope nicht singuläre quadratische Form φ über einem Körper F der Charakteristik zwei mit inseparabler quadratischer Erweiterung $K = F(\sqrt{d})$ gibt, für die $i_W(\varphi_K) = \lfloor \frac{1}{4}\dim \varphi \rfloor$ gilt, aber keine Unterform der Art $\langle 1, d \rangle_b \otimes [a,b]$ mit $a, b \in F$ besitzt.

Wenden wir nun das Theorem 6.3 auf Formen φ an, die über K hyperbolisch werden, dass heißt auf den Fall $r = \frac{1}{2}\dim \varphi$, so erhalten wir den gesuchten Wittkern. Als Hilfe werden wir nun zunächst klären, welche zwei-dimensionalen Formen im Wittkern auftreten können. Da wir in Kapitel 7 auf diese Aussage wieder zurückgreifen werden, formulieren wir das folgende Lemma allgemeiner, als es in diesem Abschnitt nötig ist.

Lemma 6.5 ([3] Prop. 5)
Es sei $L = F\left(\sqrt[2^k]{d}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $d \in F^*$ eine rein inseparable Erweiterung von F.

(a) Für ein $a \in F$ mit $a \in \wp(L)$ ist bereits $a \in \wp(F)$. Insbesondere hat eine Form, die über L eine triviale Arf-Invariante besitzt bereits über F eine triviale Arf-Invariante.

(b) Für jedes $a \in L$ existiert ein $b \in F$, sodass $a = b \mod \wp(L)$ gilt. Insbesondere ist die Arf-Invariante einer Form über L über F definiert.

Insbesondere zeigt dieses Lemma also, dass zweidimensionale Formen, die über K hyperbolisch sind, bereits über F hyperbolisch sind und es deswegen keine zweidimensionalen Formen im Wittkern geben kann, welchen wir nun bestimmen können.

Theorem 6.6 ([1] Coro. 2.8)
Es sei φ eine anisotrope nicht singuläre quadratische Form über F die über $K = F(\sqrt{d})$ hyperbolisch ist. Dann existiert eine nicht singuläre quadratische Form ψ über F mit $\varphi \cong \psi \perp d\psi \cong \langle 1, d \rangle_b \otimes \psi$.

Insbesondere ist also $W_q(F(\sqrt{d})/F) = \langle 1, d \rangle_b \otimes W_q(F)$.

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Induktion über $\dim \varphi$. Der Fall $\dim \varphi = 2$ kann dabei nach Lemma 6.5 nicht auftreten und darum sei also zunächst $\dim \varphi = 4$. Da die Voraussetzungen von Theorem 6.3 mit $r = \frac{1}{2} \dim \varphi$ erfüllt sind und der Fall (b) aus Dimensionsgründen nicht auftreten kann, muss φ isometrisch zu einer Form der Gestalt $\langle 1, d \rangle_b \otimes [a, b]$ mit $a, b \in F$ sein.

Es sei also nun $\dim \varphi > 4$ und φ_K hyperbolisch. Wenden wir erneut Theorem 6.3 an, so kann der Fall (b) wieder aus Dimensionsgründen nicht auftreten und damit muss φ eine Unterform der Gestalt $\langle 1, d \rangle_b \otimes [a, b]$ mit $a, b \in F$ enthalten. Über K gilt nun die Isometrie $\langle 1, d \rangle_b \otimes [a, b] \cong_K 2 \times \mathbb{H}$, da $d \in K^2$ ist. Schreiben wir $\varphi \cong \langle 1, d \rangle_b \otimes [a, b] \perp \chi$, für eine nicht singuläre quadratische Form χ und nutzen über K den Wittschen Kürzungssatz, so folgt, dass auch χ über K hyperbolisch wird. Da $\dim \varphi > \dim \chi$ folgt die Behauptung dann aus der Induktionsvoraussetzung.

Die Inklusion, dass jede Form der Gestalt $\langle 1, d \rangle_b \otimes \psi$ über K hyperbolisch ist, ist wegen $d \in K^2$ und Lemma 2.5 trivial. □

Damit haben wir den ersten Wittkern bestimmt.

6.2 Separable quadratische Körpererweiterungen

Wie schon Eingangs erwähnt werden die separablen quadratischen Erweiterungen von Elementen der Form $\wp^{-1}(d)$ mit $d \in F \setminus \wp(F)$ erzeugt. Darum definieren wir in diesem Abschnitt den Körper K als $K := F(\wp^{-1}(d)) = F[t]/(t^2 + t + d)$.

Die in diesem Abschnitt formulierten Aussagen beruhen im Wesentlichen auf dem Buch [7, Chap. V § 4] von Baeza. Dabei sind die Beweise an manchen Stellen vereinfacht, da wir mit quadratischen Formen über Körpern arbeiten, die Literatur aber nur semi-lokale Ringe voraussetzt.

Theorem 6.7 ([7] S. 121 Theo. 4.2)
Es sei φ eine nicht singuläre quadratische Form über F der Dimension $\dim \varphi \geq 3$ oder der Dimension zwei und φ sei in diesem Falle nicht hyperbolisch. Dann ist φ_K genau dann isotrop, wenn ein $c \in F^*$ existiert, sodass $c[1, d]$ eine Unterform von φ ist.

Beweis: Da die quadratische Form $c[1,d]$ nach Lemma 1.40 über K die triviale Arf-Invariante $d \in \wp(K)$ besitzt, ist $c[1,d] \cong \mathbb{H}$ und damit ist die Form φ isotrop. Zeigen wir also nun die Umkehrung. Dazu sei φ_K isotrop, V der zugrunde liegende Vektorraum und $v \in V_K$ ein von Null verschiedener isotroper Vektor. Dann existieren $x, y \in V$ mit $v = x + \alpha y$, wobei $\alpha := \wp^{-1}(d)$ ist und nicht x und y beide Null sind. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(v) = \varphi(x + \alpha y) &= \varphi(x) + \alpha^2 \varphi(y) + \alpha\, \mathfrak{b}_\varphi(x,y) \\ &= \varphi(x) + d\,\varphi(y) + \alpha\Big(\varphi(y) + \mathfrak{b}_\varphi(x,y)\Big). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert dann die Gleichungen

$$\varphi(x) = d\,\varphi(y) \quad \text{und} \quad \varphi(y) = \mathfrak{b}_\varphi(x,y).$$

Angenommen φ ist über F anisotrop. Wäre $y = 0$, so wäre $v \in V$ ein isotroper Vektor von φ über V und es gäbe einen Widerspruch. Also ist $y \neq 0$ und da φ anisotrop ist, ist dann auch $\varphi(y) =: c \neq 0$. Damit folgt dann $\mathfrak{b}_\varphi(x,y) = c \neq 0$ und insbesondere sind damit x, y linear unabhängig. Betrachten wir nun den Raum $W := \mathrm{sp}_F(x,y)$, so hat $\varphi_{|W}$ in der Basis $x, c^{-1}y$ die Gestalt

$$\varphi_{|W} \cong [dc, \frac{1}{c^2}c] \cong [\frac{1}{c}, dc] \cong c[1,d].$$

Da W ein nicht singulärer Unterraum von V ist, ist $V = W \perp W^\perp$ und $c[1,d]$ ist eine Unterform von φ.

Sei also nun angenommen, dass φ bereits über F isotrop ist. Dann ist nach Voraussetzung $\dim \varphi \geq 3$ und es existiert eine nicht singuläre quadratische Form ψ mit

$$\varphi \cong [0,0] \perp [c,e] \perp \psi$$

für passende $c, e \in F$ mit oBdA $c \neq 0$. Da $\mathbb{H} \cong [0, \frac{d}{c}]$ folgt dann mit Satz 1.34

$$\varphi \cong [0, \frac{d}{c}] \perp [c,e] \perp \psi \cong [0 + c, \frac{d}{c}] \perp [c, \frac{d}{c} + e] \perp \psi \cong c[1,d] \perp [c, \frac{d}{c} + e] \perp \psi$$

und damit ist $c[1,d]$ eine Unterform von φ. □

Dieses Theorem reicht nun schon aus, um eine Aussage zu formulieren, mit der wir den Wittkern sofort berechnen können.

Theorem 6.8 ([2] Prop. 1.1)
Es sei φ eine anisotrope nicht singuläre quadratische Form über F, die über dem Körper $K = F(\wp^{-1}(d))$ den Wittindex $i_W(\varphi_K) = s$ besitzt. Dann existieren $c_1, \ldots, c_s \in F$ und eine nicht singuläre quadratische Form χ mit $\varphi \cong \langle c_1, \ldots, c_s \rangle_b \otimes [1, d] \perp \chi$, sodass χ_K anisotrop ist.

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Induktion über $\dim \varphi = m$. Für $m = 2$ ist $\varphi = [a, b]$ für passende $a, b \in F$ und damit muss $s \in \{0, 1\}$ gelten. Für $s = 0$ ist nichts zu zeigen und für $s = 1$ sind die Voraussetzungen von Theorem 6.7 erfüllt und aus Dimensionsgründen muss φ isometrisch sein zu $c[1, d]$, für ein passendes $c \in F^*$.

Sei also nun $m > 2$ und damit $0 \leq s \leq \frac{1}{2} \dim \varphi$. Für $s = 0$ ist wieder nichts zu zeigen und für $s = 1$ folgt die Aussage sofort mit Theorem 6.7. Es sei also nun $s \geq 2$ und damit ist insbesondere φ_K isotrop. Wieder nach 6.7 existiert nun ein $c_1 \in F^*$, sodass man φ mit einer nicht singulären quadratischen Form ψ schreiben kann als $\varphi \cong c_1[1, d] \perp \psi$. Dabei ist $\dim \psi = \dim \varphi - 2$ und ψ besitzt wegen des Witt'schen Kürzungssatzes einen Wittindex von $s - 1$ über K. Die Behauptung folgt dann mit der Induktionsvoraussetzung. □

Wenden wir nun diese Aussage auf $s = \frac{1}{2} \dim \varphi$ an, das heißt auf Formen, die über $F(\wp^{-1}(d))$ hyperbolisch werden, so erhalten wir sofort den folgenden Wittkern.

Theorem 6.9 ([7] S. 125 Coro. 4.10 und Coro. 4.11)
Es sei φ eine nicht singuläre quadratische Form über F, die über $K = F(\wp^{-1}(d))$ hyperbolisch ist. Dann existieren $c_1, \ldots, c_n \in F$, sodass $\varphi \cong \langle c_1, \ldots, c_n \rangle_b \otimes [1, d]$ gilt.

Insbesondere ist also $W_q(F(\wp^{-1}(d))/F) = W(F) \otimes [1, d]$.

6.3 Exzellente Körpererweiterungen

Bevor wir nun damit beginnen können, Wittkerne höheren Grades zu bestimmen, müssen wir uns in diesem Abschnitt zunächst mit dem Begriff der Exzellenz befassen, der gerade bei den biquadratischen Erweiterungen eine wichtige Rolle spielen wird. Denn es wird stets wichtig sein zu wissen, ob wir nach Einbettung einer Form in einen größeren Körper den anisotropen Teil der Form, das heißt den Repräsentanten der Wittklasse, weiterhin über F beschreiben können. Genau diese Eigenschaft wollen wir in der nächsten Definition festhalten.

Definition 6.10 ([10] S. 111 und S. 113)

(a) Es sei $K : F$ eine Körpererweiterung und φ eine quadratische Form über K. Wir sagen φ **ist über F definiert**, wenn es eine quadratische Form ψ über F gibt, sodass $\varphi \cong \psi_K$ gilt.

(b) Es sei φ eine quadratische Form über F. Wir nennen φ **exzellent**, wenn für alle Körpererweiterungen $K : F$ die Form $(\varphi_K)_{an}$ über F definiert ist.

(c) Wir nennen eine Körpererweiterung $K : F$ **exzellent**, wenn für jede quadratische Form φ über F die Form $(\varphi_K)_{an}$ über F definiert ist.

(d) Wir nennen eine Körpererweiterung $K : F$ **exzellent für nicht singuläre Formen**, wenn für jede nicht singuläre quadratische Form φ über F die Form $(\varphi_K)_{an}$ über F definiert ist.

Die Definition aus (d) ist offensichtlich schwächer als die Definition aus (c), aber reicht für die Berechnung von Wittkernen völlig aus, da Wittklassen wie wir in Kapitel 2 gesehen haben stets durch anisotrope nicht singuläre quadratische Formen repräsentiert werden.

Wir haben im Laufe der Arbeit schon einige exzellente Formen und exzellente Erweiterungen gesehen und wollen diese im folgenden Beispiel zusammenfassen.

Beispiel 6.11 ([13] Lemma 2.2 und [10] Ex. 29.1)

(a) Jede total singuläre Form ist eine exzellente Form, denn ist $\varphi = \langle c_1, \dots, c_s \rangle$ eine quadratische Form über F mit $c_1, \dots, c_s \in F$ und $K : F$ eine Körpererweiterung, so muss man um $(\varphi_K)_{an}$ zu bestimmen nach Satz 1.36 eine Basis von $\mathrm{sp}_{K^2}(c_1, \dots, c_s)$ bestimmen. Nach dem Basisauswahlsatz aus der linearen Algebra kann man dann passende c_j wählen, die die gesuchte Basis bilden und damit ist $(\varphi_K)_{an}$ über F definiert.

(b) Natürlich ist jede Erweiterung, bei der anisotrope Formen anisotrop bleiben auch eine exzellente Erweiterung. Mit Lemma 3.3 ist damit jede rein transzendente Erweiterung eine exzellente Erweiterung. Analog folgt mit Theorem 5.1, dass auch jede algebraische Erweiterung von ungeradem Grad ebenfalls exzellent ist.

Wir wollen nun zeigen, dass die beiden Körpererweiterungen mit denen wir uns bereits befasst haben, beides exzellente Körpererweiterungen für nicht singuläre Formen sind. Dazu betrachten wie die folgenden zwei Sätze.

Satz 6.12 ([23] Lemme 1)
Ist $d \in F^* \setminus F^{*2}$, so ist die Erweiterung $F(\sqrt{d}) : F$ exzellent für nicht singuläre Formen.

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Induktion über $\dim \varphi$, wobei φ eine nicht singuläre quadratische Form über F ist. Dabei kann φ als anisotrop vorausgesetzt werden, da hyperbolische Ebenen in φ für den Beweis keine Rolle spielen. Ist $\dim \varphi = 2$, so ist $\varphi = [a, b]$ für passende $a, b \in F$ und nach Lemma 6.5 ist dann $(\varphi_K)_{an} = [a, b]$ und damit über F definiert.

Es sei also nun $\dim \varphi \geq 4$. Ist φ_K anisotrop, so ist die Aussage trivial, also können wir annehmen, dass φ_K isotrop ist. Nach Korollar 6.2 existieren dann $a, b, c \in F$ und eine nicht singuläre quadratische Form ψ über F mit $\varphi \cong [a, b] \perp [ad, c] \perp \psi$. Da $d \in K^2$ folgt dann über K mit Satz 1.34

$$\begin{aligned}\varphi &\cong [a, b] \perp [ad, c] \perp \psi \cong [a, b] \perp d[a, dc] \perp \psi \\ &\cong [a, b] \perp [a, dc] \perp \psi \cong [0, b] \perp [a, dc + b] \perp \psi \\ &\cong \mathbb{H} \perp [a, dc + b] \perp \psi.\end{aligned}$$

Für die über F definierte Form $\chi := [a, dc + b] \perp \psi$ gilt dann $(\chi_K)_{an} = (\varphi_K)_{an}$ und da $\dim \varphi > \dim \chi$ ist, folgt die Behauptung mit der Induktionsvoraussetzung. □

Satz 6.13 ([2] S. 434 oder [10] Ex. 29.2)
Ist $d \in F \setminus \wp(F)$, so ist die Erweiterung $F(\wp^{-1}(d)) : F$ exzellent für nicht singuläre Formen.

Beweis: Die Aussage folgt sofort aus Theorem 6.8, da die in 6.8 mit χ bezeichnete quadratische Form genau dem anisotropen Teil über $F(\wp^{-1}(d))$ entspricht. □

6.4 Biquadratische Körpererweiterungen

Nachdem wir nun die Wittkerne der kleinst möglichen Erweiterungen sogar bis auf Isometrie bestimmt haben und zusätzlich noch gezeigt haben, dass beide dieser Erweiterungen exzellent für nicht singuläre Formen sind, wollen wir nun die Wittkerne von Erweiterungen vom nächst höheren Grad bestimmen. Nach Theorem 5.1 wissen wir, dass für Erweiterungen vom Grad drei der Wittkern stets trivial ist. Aus diesem Grund befassen wir uns in diesem Abschnitt mit Körpererweiterungen vom Grad vier und beginnen mit dem biquadratischen Fall.

Für biquadratische Erweiterungen gib es drei wesentlich verschiedene Fälle, die wir unterscheiden müssen. Diese sind

(a) die (total) inseparable Erweiterung $F\left(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}\right) : F$ mit $d_1, d_2 \in F^* \setminus F^{*2}$,

(b) die inseparable Erweiterung mit einem separablen Unterkörper $F(\sqrt{d}, \wp^{-1}(b)) : F$ mit $d \in F^* \setminus F^{*2}$ und $b \in F \setminus \wp(F)$,

(c) und die separable Erweiterung $F(\wp^{-1}(b_1), \wp^{-1}(b_2)) : F$ mit $b_1, b_2 \in F \setminus \wp(F)$.

Der Fall (a) wurde 1995 erstmalig von Mammone und Moresi in [23, Théo. 2] bestimmt und der Fall (c) stammt aus dem Jahr 1978 und wurde von Baeza in [7, S. 128 Coro. 4.16] sogar für semi-lokale Ringe bewiesen. Der letzte „gemischte“ Fall wurde 2004 von Ahmad in der Arbeit [2] bewiesen. In dieser Arbeit stellt er auch noch kürzere und einfachere Beweise der anderen beiden Fälle vor. Aus diesem Grund ist diese Arbeit Grundlage des folgenden Abschnitts.

Wie auch in der Charakteristik ungleich zwei Version dieser Aussage (dort fallen alle drei Fälle zusammen) wird die Exzellenz der Körpererweiterungen in den Beweisen eine zentrale Rolle spielen. Nun benötigen wir noch zwei Hilfssätze, um die Wittkerne in den eben genannten drei Fällen zu bestimmen.

Satz 6.14 ([2] Theo. 1.5)
Es sei $K : F$ eine für nicht singuläre Formen exzellente Körpererweiterung, $a \in F^*$ und $\varphi = \mathfrak{b} \otimes [1, a]$ eine nicht singuläre quadratische Form mit einer diagonalisierten Bilinearform $\mathfrak{b}$ über K. Ist die quadratische Form φ über F definiert, so existiert eine bilineare Form $\mathfrak{b}_1$ über F mit $\varphi \cong \mathfrak{b}_1 \otimes [1, a]$.

Satz 6.15 ([2] Theo. 1.6)
Es sei $K : F$ eine für nicht singuläre Formen exzellente Körpererweiterung, $d \in F^*$ und φ eine nicht singuläre quadratische Form über K so, dass die Form $\langle 1, d \rangle_b \otimes \varphi$ über F definiert ist. Dann existiert eine nicht singuläre quadratische Form ψ über F mit $\langle 1, d \rangle_b \otimes \varphi \cong (\langle 1, d \rangle_b \otimes \psi)_K$.

Dies reicht nun schon aus, um die Wittkerne zu bestimmen. Dabei werden wir uns hauptsächlich in $W_q(F)$ bewegen und die Klammern der Wittklassen aus Gründen der Übersicht vernachlässigen.

Theorem 6.16 ([2] Theo. 2.1)
Es seien $d_1, d_2 \in F^* \setminus F^{*2}$ und $K = F(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$. Ist φ eine anisotrope nicht singuläre quadratische Form über F die über K hyperbolisch ist, dann existieren $\varphi_1, \varphi_2 \in W_q(F)$, sodass in $W_q(F)$ gilt

$$\varphi = \Big(\varphi_1 + d_1 \varphi_1\Big) \; + \; \Big(\varphi_2 + d_2 \varphi_2\Big) = \langle 1, d_1 \rangle_b \cdot \varphi_1 + \langle 1, d_2 \rangle_b \cdot \varphi_2 \, .$$

Insbesondere ist also $W_q(K/F) = \langle 1, d_1 \rangle_b \otimes W_q(F) + \langle 1, d_2 \rangle_b \otimes W_q(F)$.

Beweis: Setze $L := F(\sqrt{d_1})$. Ist bereits φ_L hyperbolisch, so folgt die Aussage mit Theorem 6.6 und $\varphi_2 = 0$. Sei also nun φ_L nicht hyperbolisch und damit $\psi := (\varphi_L)_{an} \neq 0$. Da die Erweiterung $L : F$ nach Satz 6.12 exzellent ist, ist ψ über F definiert. Da φ über K hyperbolisch ist, ist auch ψ über $K = L(\sqrt{d_2})$ hyperbolisch und damit existiert nach Theorem 6.6 eine quadratische Form φ_2 über L mit $\psi \cong \langle 1, d_2 \rangle_b \otimes \varphi_2$. Nach Satz 6.15 können wir annehmen, dass dieses φ_2 bereits über F definiert ist. Wir betrachten nun die über F definierte quadratische Form $\alpha := \varphi \perp \varphi_2 \perp d_2\,\varphi_2$. Diese Form ist bereits über L hyperbolisch, denn in $W_q(L)$ folgt mit $\varphi \sim \psi$ dann

$$\alpha_L = \varphi_L + (\varphi_2 + d_2\,\varphi_2)_L = \psi + \psi = 0.$$

Also ist nach Theorem 6.6 die Form α über F wittäquivalent zu $\varphi_1 \perp d_1\,\varphi_1$ für eine passende nicht singuläre quadratische Form φ_1. Insgesamt gilt dann in $W_q(F)$

$$\varphi + \langle 1, d_2 \rangle_b \cdot \varphi_2 = \langle 1, d_1 \rangle_b \cdot \varphi_1, \quad \text{das heißt} \quad \varphi = \langle 1, d_1 \rangle_b \cdot \varphi_1 + \langle 1, d_2 \rangle_b \cdot \varphi_2\,.$$

Dies zeigt die erste Inklusion des Wittkerns. Da $d_1, d_2 \in K^2$ gilt, ist über K dann $\langle 1, d_1 \rangle_b \cong \langle 1, 1 \rangle_b = 0$ und $\langle 1, d_2 \rangle_b \cong \langle 1, 1 \rangle_b = 0$ in $W(F)$ und damit ist natürlich dann auch $\langle 1, 1 \rangle_b \cdot \varphi = 0$ für jedes $\varphi \in W_q(F)$. □

Damit ist der erste Wittkern bis auf Wittäquivalenz eindeutig bestimmt. Kommen wir nun zum nächstem Fall, den der gemischten Erweiterung.

Theorem 6.17 ([2] Theo. 2.1)
Es seien $d \in F^* \setminus F^{*2}, b \in F \setminus \wp(F)$ und $K = F(\wp^{-1}(b), \sqrt{d})$. Ist φ eine anisotrope nicht singuläre quadratische Form über F, die über K hyperbolisch ist, so existiert ein $\varphi_1 \in W_q(F)$ und ein $\mathfrak{b} = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle_b \in W(F)$, sodass in $W_q(F)$ gilt

$$\varphi = \Big(c_1[1,b] + \ldots + c_n[1,b]\Big) + \Big(\,\varphi_1 + d\,\varphi_1\,\Big) = \mathfrak{b} \cdot [1,b] + \langle 1, d \rangle_b \cdot \varphi_2\,.$$

Insbesondere ist also $W_q(K/F) = W(F) \otimes [1,b] + \langle 1, d \rangle_b \otimes W_q(F)$.

Beweis: Setze $L := F(\wp^{-1}(b))$. Ist bereits φ_L hyperbolisch, so folgt die Aussage mit Theorem 6.9 und $\varphi_1 = 0$. Sei also nun φ_L nicht hyperbolisch und damit $\psi := (\varphi_L)_{an} \neq 0$. Die Erweiterung $L : F$ ist nach Satz 6.13 exzellent und damit ist die Form ψ über F definiert. Da mit φ auch ψ über $K = L(\sqrt{d})$ hyperbolisch wird, existiert nach Theorem 6.6 eine quadratische Form φ_1 über L mit $\psi \cong \varphi_1 \perp d\,\varphi_1$. Analog zum Beweis von Theorem 6.16 können wir nun nach Satz 6.15 annehmen, dass φ_1 über F definiert ist. Weiter definieren wir die F-Form α durch $\alpha := \varphi \perp \varphi_1 \perp d\,\varphi_1$. Da $\varphi \sim \psi$ über L gilt, erhalten wir dann in $W_q(L)$

$$\alpha_L = \varphi_L + (\varphi_1 + d\,\varphi_1)_L = \psi + \psi = 0,$$

das heißt α wird über L hyperbolisch. Nach Theorem 6.9 existiert dann eine diagonalisierte Bilinearform $\mathfrak{b}$ über F mit $\alpha \sim \mathfrak{b} \otimes [1, b]$. Insgesamt erhalten wir also in $W_q(F)$

$$\varphi + \varphi_1 + d\,\varphi_1 = \mathfrak{b} \cdot [1, b], \quad \text{das heißt} \quad \varphi = \mathfrak{b} \cdot [1, b] + \langle\, 1, d\,\rangle_b \cdot \varphi_1 \,.$$

Die zweite Inklusion des Wittkerns folgt dann aus der Tatsache, dass $[1, b]$ über K eine triviale Arf-Invariante besitzt und damit $[1, b] \cong \mathbb{H}$ gilt, zusammen mit der Tatsache, dass $d \in K^2$ und damit $\langle\, 1, d\,\rangle_b \cong \mathbb{M}(1)$ gilt. □

Kommen wir nun zum Fall (c), das heißt der einzigen separablen biquadratischen Erweiterung.

Theorem 6.18 ([2] Theo. 2.2)
Es seien $b_1, b_2 \in F \setminus \wp(F)$ und $K = F(\wp^{-1}(b_1), \wp^{-1}(b_2))$. Ist φ eine anisotrope nicht singuläre quadratische Form über F, die über K hyperbolisch ist, so existieren $\mathfrak{b}_1 = \langle\, c_1, \dots, c_n\,\rangle_b, \mathfrak{b}_2 = \langle\, e_1, \dots, e_m\,\rangle_b \in W(F)$, sodass in $W_q(F)$ gilt

$$\varphi = \Big(c_1[1, b_1] + \ldots + c_n[1, b_1]\Big) + \Big(e_1[1, b_2] + \ldots + e_m[1, b_2]\Big) = \mathfrak{b}_1 \cdot [1, b_1] + \mathfrak{b}_2 \cdot [1, b_2].$$

Insbesondere ist also $W_q(K/F) = W(F) \otimes [1, b_1] + W(F) \otimes [1, b_2]$.

Beweis: Setze $L := F(\wp^{-1}(b_1))$. Ist bereits φ_L hyperbolisch, so folgt die Aussage mit Theorem 6.9 und $\mathfrak{b}_2 = 0$. Sei also nun φ_L nicht hyperbolisch und damit $\psi := (\varphi_L)_{an} \neq 0$. Da quadratische separable Erweiterungen nach Satz 6.13 exzellent sind, ist ψ über F definiert. Aus der Tatsache, dass φ über K hyperbolisch ist, folgt dann, dass auch ψ über $K = L(\wp^{-1}(b_2))$ hyperbolisch ist und damit existiert nach Theorem 6.9 eine diagonalisierbare bilineare Form $\mathfrak{b}_2$ über L mit $\psi \cong \mathfrak{b}_2 \otimes [1, b_2]$. Nach Satz 6.14 können wir annehmen, dass dieses $\mathfrak{b}_2$ über F definiert ist. Wir definieren nun die quadratische F-Form α durch $\alpha = \varphi \perp \mathfrak{b}_2 \otimes [1, b_2]$. Da φ_L wittäquivalent zu ψ über L ist, gilt in $W_q(L)$ dann

$$\alpha_L = \varphi_L + \big(\mathfrak{b}_2 \cdot [1, b_2]\big)_L = \psi + \psi = 0,$$

das heißt die Form α wird über L hyperbolisch. Damit existiert nach Theorem 6.9 eine diagonalisierbare bilineare Form $\mathfrak{b}_1$ über F mit $\alpha \sim \mathfrak{b}_1 \otimes [1, b_1]$ und in $W_q(F)$ gilt dann schließlich

$$\varphi + \mathfrak{b}_2 \cdot [1, b_2] = \mathfrak{b}_1 \cdot [1, b_1], \quad \text{das heißt} \quad \varphi = \mathfrak{b}_1 \cdot [1, b_1] + \mathfrak{b}_2 \cdot [1, b_2].$$

Die zweite Inklusion des Wittkerns folgt dann aus der Tatsache, dass wegen $b_1, b_2 \in \wp(K)$ die Formen $[1, b_1]$ und $[1, b_2]$ hyperbolisch sind. □

Damit haben wir nun alle drei biquadratischen Wittkerne bis auf Wittäquivalenz eindeutig bestimmt. Eine natürliche Frage ist nun, ob sich diese Aussagen auch wie im quadratischen Fall auf Isometrie verstärken lassen. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies im Allgemeinen nicht möglich ist.

Beispiel 6.19 ([2] Ex. S. 439)
Es sei F_0 ein Körper der Charakteristik zwei und r, s, t, u über F_0 algebraisch unabhängige Elemente. Wir setzen nun $F = F_0(r, s, t, u)$ und betrachten die nicht singuläre quadratische Form

$$\varphi = [1, r] \perp t[1, s] \perp u[1, r + s].$$

Weiter seien α, β Elemente aus dem algebraischen Abschluss von F, die $\alpha^2 + \alpha = r$ und $\beta^2 + \beta = r + s$, das heißt $\wp^{-1}(r) = \alpha$ und $\wp^{-1}(r + s) = \beta$ erfüllen.

(a) Die Form φ ist über F anisotrop, da r, s, t, u algebraisch unabhängig über F_0 sind.

(b) Wir werden nun zeigen, dass φ einen Wittindex von 1 über den Körpern $K_1 = F(\sqrt{t}), K_2 = F(\alpha)$ und $K_3 = F(\beta)$ besitzt. Betrachten wir zunächst den Körper K_1. Da $t \in K_1^2$ gilt, folgt, dass $[1, r] \perp t[1, s] \cong_{K_1} [1, r] \perp [1, s] \cong_{K_1} \mathbb{H} \perp [1, r + s]$ ist und damit erhalten wir dann

$$\varphi_{K_1} \cong \mathbb{H} \perp [1, r + s] \perp u[1, r + s] \cong \mathbb{H} \perp \langle 1, u \rangle_b \otimes [1, r + s]. \tag{6.2}$$

Da $r + s$ und u algebraisch unabhängig über $F_0(\sqrt{t})$ sind, ist die Form $[1, r + s] \perp u[1, r + s]$ anisotrop und es gilt also $i_W(\varphi_{K_1}) = 1$.
Betrachten wir nun den Körper K_2. Über K_2 sind die Formen $[1, s]$ und $[1, r + s]$ nach Lemma 1.40 isometrisch, da sie beide die 1 darstellen und in $K_2/\wp(K_2)$ dann $\Delta([1, s]) = s = s + \alpha^2 + \alpha = r + s = \Delta([1, r + s])$ gilt. Weiter ist $[1, r]$ wegen $r \in \wp(K_2)$ isotrop und wir erhalten damit den Ausdruck

$$\varphi_{K_2} \cong \mathbb{H} \perp t[1, r + s] \perp u[1, r + s] \cong \mathbb{H} \perp \langle t, u \rangle_b \otimes [1, r + s]. \tag{6.3}$$

Dabei ist $t[1, r + s] \perp u[1, r + s]$ anisotrop, da die Elemente $r + s, t$ und u algebraisch unabhängig über $F_0(\alpha)$ sind und wir haben $i_W(\varphi_{K_2}) = 1$ gezeigt. Auf eine analoge

Weise erhält man über K_3, dass $[1,r] \cong [1,s]$ und $[1,r+s] \cong \mathbb{H}$ ist und es folgt $i_W(\varphi_{K_3}) = 1$ aus

$$\varphi_{K_3} \cong \mathbb{H} \perp \langle 1, t \rangle_b \otimes [1,s].$$

(c) Wir werden nun zeigen, dass φ über dem Körpern $L_1 := F(\sqrt{t}, \sqrt{u}), L_2 := F(\sqrt{t}, \beta)$ und $L_3 := F(\alpha, \beta)$ hyperbolisch ist. Beginnen wir dafür mit L_1. Da $u \in L_1^2$ ist, folgt $u[1,r+s] \cong [1,r+s]$ und da $K_1 \subseteq L_1$ gilt, erhalten wir mit Gleichung (6.2) dann

$$\varphi_{L_1} \cong \mathbb{H} \perp [1,r+s] \perp [1,r+s] \overset{2.5}{\cong} 3 \times \mathbb{H},$$

das heißt φ_{L_1} ist hyperbolisch.
Da $\beta \in L_2$ ist, ist $[1,r+s]$ über L_2 hyperbolisch und da $K_1 \subseteq L_2$ gilt, erhalten wir ebenfalls aus Gleichung (6.2) den Ausdruck

$$\varphi_{L_2} \cong \mathbb{H} \perp \langle 1, u \rangle_b \otimes [1,r+s] \cong 3 \times \mathbb{H}$$

und damit ist auch φ_{L_2} hyperbolisch. Analog folgert man dann aus $\beta \in L_3$, der Inklusion $K_2 \subseteq L_3$ und der Gleichung (6.3), dass auch $\varphi_{L_3} \cong 3 \times \mathbb{H}$ ist und damit ist ebenfalls φ_{L_3} hyperbolisch.

(d) Nach den Theoremen 6.16, 6.17 und 6.18 folgt nun die Existenz von $\psi, \psi_1, \psi_2 \in W_q(F)$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in W(F)$, sodass gilt

(i) $\varphi \sim \langle 1, t \rangle_b \otimes \psi_1 \perp \langle 1, u \rangle_b \otimes \psi_2$,

(ii) $\varphi \sim \langle 1, t \rangle_b \otimes \psi \perp \mathfrak{b} \otimes [1,r+s]$,

(iii) $\varphi \sim \mathfrak{b}_1 \otimes [1,r] \perp \mathfrak{b}_2 \otimes [1,r+s]$.

Nehmen wir nun an, dass diese Wittäquivalenz auf Isometrie verstärkt werden kann.

(i) Es existieren also nicht singuläre quadratische Formen ψ_1, ψ_2 mit denen dann $\varphi \cong \langle 1, t \rangle_b \otimes \psi_1 \perp \langle 1, u \rangle_b \otimes \psi_2$ gilt. Da $\dim \psi_i \in 2\,\mathbb{N}_0$ ist, erhalten wir einen Widerspruch zu $\dim \varphi = 6$.

(ii) Angenommen es existieren eine nicht singuläre quadratische Form ψ und eine anisotrope bilineare Form $\mathfrak{b}$ mit $\varphi \cong \langle 1, t \rangle_b \otimes \psi \perp \mathfrak{b} \otimes [1,r+s]$. Aus $\dim \varphi = 6$ folgert man sofort, dass $\dim \mathfrak{b} = 1$ und $\dim \psi = 2$ oder $\dim \psi = 0$ und $\dim \mathfrak{b} = 3$ gelten muss. Aber dann ist der Wittindex von φ über K_1 im ersten Fall mindestens zwei und nicht wie in (b) gezeigt wurde gleich 1 und im zweiten Fall wäre φ bereits über K_3 hyperbolisch. Wir erhalten also in beiden Fällen einen Widerspruch.

(iii) Angenommen es existieren anisotrope bilineare Formen $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ für die $\varphi \cong \mathfrak{b}_1 \otimes [1,r] \perp \mathfrak{b}_2 \otimes [1,r+s]$ gilt. Da $\dim \varphi = 6$ muss $\dim \mathfrak{b}_1 = 1$ und $\dim \mathfrak{b}_2 = 2$

oder umgekehrt $\dim \mathfrak{b}_1 = 2$ und $\dim \mathfrak{b}_2 = 1$ sein, da wir $\dim \mathfrak{b}_1 = 3$ und $\dim \mathfrak{b}_2 = 0$ bzw. $\dim \mathfrak{b}_1 = 0$ und $\dim \mathfrak{b}_2 = 3$ wegen (b) sofort ausschließen können. Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Da die Form $[1, r+s]$ über $K_3 \subseteq L_3$ hyperbolisch ist, ist dann der Wittindex von φ über K_3 mindestens zwei, was ein Widerspruch zu dem in (b) gezeigten Wittindex von 1 ist. Einen analogen Widerspruch zu $i_W(\varphi_{K_2}) = 1$ erhält man, wenn man von $\dim \mathfrak{b}_1 = 2$ und $\dim \mathfrak{b}_2 = 1$ ausgeht.

In allen drei Fällen liegt also ein Widerspruch vor und damit kann keine der Aussagen aus 6.16, 6.17 und 6.18 auf Isometrie verstärkt werden.

Eine weitere sich aufdrängende Frage ist, ob sich die Resultate 6.16, 6.17 und 6.18 auf multiquadratische Körpererweiterungen erweitern lassen. Diese Frage wollen wir, zumindest teilweise, in Abschnitt 6.5 klären.

6.5 Weitere Wittkerne

Mit den noch verbleibenden Wittkernen für Erweiterungen vom Grad Vier werden wir uns in Kapitel 7 beschäftigen. In diesem Abschnitt wollen wir nun noch einige weitere Wittkerne für verschiedene Erweiterungen betrachten. Dabei werden wir nicht alle Aussagen beweisen, da diese oft Theorie voraussetzen, mit der wir uns in dieser Arbeit nicht befasst haben.

Beschäftigen wir uns zunächst mit der Frage, ob sich die Aussagen 6.16, 6.17 und 6.18 auf multiquadratische Erweiterungen verallgemeinern lassen. Mammone und Moresi zeigten in [23], das dies im separablen Fall nicht möglich ist.

Satz 6.20 ([23] Prop. 1)
Es existiert ein Körper F der Charakteristik zwei und $d_1, d_2, d_3 \in F \setminus \wp(F)$, sodass für die Erweiterung $K = F\left(\wp^{-1}(d_1), \wp^{-1}(d_2), \wp^{-1}(d_3)\right)$ von F gilt

$$W(F) \otimes [1, d_1] + W(F) \otimes [1, d_2] + W(F) \otimes [1, d_3] \subsetneqq W_q(K/F).$$

Dies schließt eine Verallgemeinerung von Theorem 6.18 sofort aus. Im Gegensatz dazu lässt sich das Theorem 6.16 durchaus auf multiquadratische Erweiterungen verallgemeinern. Laghribi und Aravire zeigten in [4] sogar noch eine stärkere Aussage.

Theorem 6.21 ([4] Theo. 1 und Theo. 2)

(a) Für $a_1, \ldots, a_n \in F$ ist der Wittkern der Erweiterung $F\left(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}\right) : F$ gegeben durch

$$W_q\left(F\left(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}\right)/F\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle\, 1, a_i \,\rangle_b \otimes W_q(F).$$

(b) Für $a_1, \ldots, a_n, b \in F$ ist der Wittkern der Erweiterung $F\left(\wp^{-1}(b), \sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}\right) : F$ gegeben durch

$$W_q\left(F\left(\wp^{-1}(b), \sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}\right)/F\right) = W(F) \otimes [1, b] + \sum_{i=1}^{n} \langle\, 1, a_i \,\rangle_b \otimes W_q(F).$$

Der Beweis dieser Aussage nutzt den von Kato in [16] beschriebenen Isomorphismus zwischen nicht singulären quadratischen Formen und Differentialformen und bestimmt dann eben diesen Wittkern auf der Ebene der Differentialformen.

Mit Hilfe dieses Satzes zusammen mit Satz 6.20 ist also der einzige noch zu klärende triquadratische Fall eine Körpererweiterung der Form $F\left(\wp^{-1}(d_1), \wp^{-1}(d_2), \sqrt{a}\,\right) : F$, mit $d_1, d_2, a \in F$.

Wir wollen uns nun noch abschließend mit einigen Erweiterungen befassen, die keinen endlichen Grad besitzen. Dazu betrachten wir noch einmal die in Kapitel 5 eingeführten Funktionenkörper. Auch wenn wir uns nicht viel mit dieser Theorie befasst haben, sind wir in der Lage den folgenden Satz zu beweisen.

Theorem 6.22 ([13] Theo. 4.2(iii))
Es sei $\pi \in P_n(F)$ eine anisotrope n-fache Pfisterform und φ eine anisotrope nicht singuläre quadratische Form über F. Dann ist $\varphi_{F(\pi)}$ genau dann hyperbolisch, wenn eine bilineare Form $\mathfrak{b}$ mit $\varphi \cong \mathfrak{b} \otimes \pi$ existiert.

Insbesondere ist also $W_q(F(\pi)/F) = W(F) \otimes \pi$.

Beweis: Es sei zunächst die Form $\varphi_{F(\pi)}$ hyperbolisch. Der Beweis erfolgt mit Induktion über die Dimension von φ. Da nach Theorem 5.9 gilt $\dim \varphi \geq \dim \pi$, sei zunächst $\dim \varphi = \dim \pi$. Nach 5.9 existiert dann ein $a \in F^*$ mit $a\pi \prec \varphi$ und aus Dimensionsgründen folgt dann $a\pi = \langle\, a \,\rangle_b \otimes \pi \cong \varphi$. Sei also nun $\dim \varphi > \dim \pi$. Wieder nach 5.9 ist dann $a\pi \prec \varphi$ für ein $a \in F^*$ und da π nicht singulär ist, existiert dann eine weitere nicht singuläre quadratische Form ψ, sodass $a\pi \perp \psi \cong \varphi$ gilt. Da π über $F(\pi)$ isotrop und damit hyperbolisch ist, folgt aus dem Wittschen Kürzungssatz 1.31, dass auch ψ über $F(\pi)$ hyperbolisch wird. Die Induktionsvoraussetzung liefert dann die Existenz einer bilinearen Form $\mathfrak{b}$ mit $\psi \cong \mathfrak{b} \otimes \pi$ und damit folgt dann schließlich $\varphi \cong a\pi \perp \psi \cong (\langle\, a \,\rangle_b \perp \mathfrak{b}) \otimes \pi$.

Die zweite Inklusion ist wegen Korollar 4.6 und Lemma 5.8 trivial. □

Laghribi konnte in [20] sogar noch weitere Aussagen für Funktionenkörper treffen. Eine seiner bewiesenen Hauptaussagen in dieser Arbeit ist die folgende.

Theorem 6.23 ([20] Theo. 1.4)
Es sei φ ein anisotroper Pfisternachbar bzw. ein quasi-Pfisternachbar der Pfisterform bzw. quasi-Pfisterform π.

(a) Dann ist $W_q(F(\varphi)/F) = W_q(F(\pi)/F)$.
(b) Ist φ ein Pfisternachbar der Pfisterform π, so ist jede anisotrope quadratische Form aus $W_q(F(\varphi)/F)$ isometrisch zu $\mathfrak{b} \otimes \pi$, wobei $\mathfrak{b}$ eine bilineare Form über F ist. Insbesondere ist $W_q(F(\varphi)/F) = W(F) \otimes \pi$.
(c) Ist φ ein quasi-Pfisternachbar der quasi-Pfisterform π, so ist jede anisotrope quadratische Form in $W_q(F(\varphi)/F)$ isometrisch zu $\mathfrak{b} \otimes \psi$, wobei ψ eine nicht singuläre quadratische Form über F ist und $\mathfrak{b}$ eine bilineare Form über F, die $\varphi_{\mathfrak{b}} \cong \pi$ erfüllt.

Dies soll genügen um einen Überblick über die bisher bekannten Wittkerne zu erhalten. Weitere Erkenntnisse über das Isotropieverhalten von quadratischen Formen über Funktionenkörpern und auch weitere Aussagen über Wittkerne findet man etwa in [14] und in [20].

6.6 Bilineare Wittkerne

Auch wenn wir uns in dieser Arbeit hauptsächlich mit quadratischen Formen und deren Wittkernen befassen, wollen wir uns dennoch einen kurzen Überblick über einige der bekannten bilinearen Wittkerne verschaffen. Dabei ist analog zum quadratischen Fall der bilineare Wittkern der Erweiterung $K : F$ gegeben durch den Kern der Einbettung $\iota : W(F) \longrightarrow W(K)$, das heißt er besteht aus den Wittklassen von bilinearen Formen, die über K metabolisch sind. Den bilinearen Wittkern wollen wir mit $W(K/F)$ bezeichnen. Einen elementaren Unterschied zum quadratischen Fall zeigt der folgende Satz.

Satz 6.24 ([17] Satz 10.2.1)
Es sei $\mathfrak{b}$ eine anisotrope bilineare Form über F und $K : F$ eine algebraische separable Erweiterung. Dann ist auch $\mathfrak{b}_K$ anisotrop. Insbesondere ist also $W(K/F) = \{0\}$.

Zusammen mit dem Lemma 3.3 folgt dann sofort, dass der Wittkern einer beliebigen separablen Erweiterung stets trivial ist. Im bilinearen Fall müssen wir uns also nur mit inseparablen Erweiterungen befassen. Dazu betrachten wir den folgenden von Hoffmann im Jahr 2004 in [12] bewiesenen Satz.

Theorem 6.25 ([12] Theo. 1.1)
Es sei $K : F$ eine Körpererweiterung mit $K^2 \subset F$. Dann ist der bilineare Wittkern $W(K/F)$ der Erweiterung $K : F$ erzeugt durch $\{\langle 1, t \rangle_b \mid t \in K^{*2}\}$.

Diese Aussage lässt sich natürlich auf multiquadratische Körpererweiterungen der Art $F\left(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}\right) : F$ anwenden, da diese die Bedingung $F\left(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}\right)^2 \subset F$ trivialerweise erfüllen.

Für den **Funktionenkörper einer bilinearen Form** $\mathfrak{b}$ über F setzt man $F(\mathfrak{b}) := F(\varphi_{\mathfrak{b}})$, das heißt man betrachtet bilineare Formen ebenfalls über Funktionenkörpern von quadratischen Formen. Um den nächsten Satz besser formulieren zu können, setzen wir noch einige Notationen. Für eine total singuläre quadratische Form $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ setzen wir zunächst den **Normkörper** als $N_F(\varphi) := F^2(ab \mid a, b \in D_F(\varphi))$ und damit den **Normgrad** $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) := [N_F(\varphi) : F^2]$. Dies sind die beiden am Ende von Kapitel 5 angesprochenen Begriffe. Ist weiter $N_F(\varphi) = F^2(b_1, \ldots, b_m)$, so bezeichnen wir die quasi-Pfisterform $\langle\langle b_1, \ldots, b_m \rangle\rangle$ mit φ_{qp}. Schließlich wollen wir mit $\mathcal{A}(\varphi)$ die Menge aller bilinearen Formen $\mathfrak{b}$ über F bezeichnen, für die $\varphi_{\mathfrak{b}} = \varphi$ gilt. Mit diesen Notationen sind wir nun in der Lage den bilinearen Wittkern eines beliebigen Funktionenkörpers zu bestimmen. Dazu betrachten wir das folgende Theorem.

Theorem 6.26 ([20] Theo. 1.2)
Es sei φ eine anisotrope quadratische Form über F mit $\dim \varphi \geq 2$, sodass für den bilinearen Wittkern $W(F(\varphi)/F) \neq \{0\}$ gilt. Dann ist φ total singulär und eine anisotrope bilineare Form $\mathfrak{b}$ über F wird genau dann über $F(\varphi)$ metabolisch, wenn $\mathfrak{b} \cong \alpha_1 \mathfrak{b}_1 \perp \ldots \perp \alpha_r \mathfrak{b}_r$ gilt. Dabei sind die $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in F^*$, die $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r$ sind d-fache bilineare Pfisterformen in $\mathcal{A}(\varphi_{qp})$ und d erfüllt $\mathrm{ndeg}_F(\varphi) = 2^d$.

Diese kurze Übersicht über einige bilineare Wittkerne soll an dieser Stelle genügen, auch wenn es noch weitere Erkenntnisse auf diesem Gebiet gibt. Vergleiche dazu etwa [20].

7 Wittkerne von Körpererweiterungen vom Grad vier

In diesem Kapitel wollen wir nun wie schon angekündigt, den Wittkern einer separablen Erweiterung vom Grad vier bestimmen. Dabei werden wir analog zu [27] vorgehen und im Wesentlichen die Kerngedanken dieses Beweises in Charakteristik zwei übertragen. Dabei sind einige der Aussagen deutlich allgemeiner formuliert, als wir sie benötigen werden und dann auf die betrachteten Fälle angepasst. Anschließend wollen wir mit Hilfe der gezeigten Sätze auf eine ähnliche Weise ein Erzeugendensystem des Wittkerns der Erweiterung $F(\sqrt[4]{d}) : F$ bestimmen. Ein solches ist bereits bekannt und wurde 2005 von Ahmad in seiner Arbeit [3] bestimmt. Der hier in Abschnitt 7.2 folgende Beweis ist jedoch deutlich kürzer und weniger technisch.

Bevor wir mit den separablen Erweiterungen beginnen können, wollen wir zunächst eine Aussage beweisen, die für beliebige Körpererweiterungen gültig ist.

Satz 7.1
Es sei $p \in F[t]$ ein irreduzibles Polynom von geradem Grad mit Nullstelle θ in einem festen algebraischen Abschluss von F. Weiter sei φ eine nicht singuläre quadratische Form über F mit $\dim(\varphi_{F(\theta)})_{an} = k$ und $\dim \varphi \geq \frac{k}{2} \operatorname{grad} p + 1$. Dann dominiert φ eine quadratische Form φ_0 und es existiert ein $x \in F^*$, sodass $\dim \varphi_0 \leq \frac{1}{2} \operatorname{grad} p + 1$ und $xp \in D_{F(t)}(\varphi_0)$ gilt. Insbesondere ist also $(\varphi_0)_{F(\theta)}$ isotrop.

Beweis: Ist φ bereits über F isotrop, so ist $\mathbb{H}$ eine Unterform von φ und $\varphi_0 := \mathbb{H}$ erfüllt die gewünschten Eigenschaften, da $\mathbb{H}$ universell ist.

Es sei also nun φ anisotrop, V sei der der Form φ zugrunde liegende F-Vektorraum und U ein maximaler total isotroper Unterraum von $V(\theta) := V_{F(\theta)}$. Nach Satz 1.45 ist dann $\dim_{F(\theta)} U = \frac{\dim \varphi - k}{2}$. Weiter setzen wir $W := \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}\operatorname{grad} p} \theta^i V \subseteq V(\theta)$. Dabei können wir U und W als F-Untervektorräume von $V(\theta)$ auffassen und ihre Dimensionen sind wegen $[F(\theta) : F] = \operatorname{grad} p$ gegeben durch

- $\dim_F V(\theta) = \dim \varphi \cdot \operatorname{grad} p$
- $\dim_F U = \left(\frac{\dim \varphi - k}{2}\right) \cdot \operatorname{grad} p$
- $\dim_F W = \dim \varphi \left(\frac{1}{2} \operatorname{grad} p + 1\right)$

Da nach Voraussetzung $\dim\varphi \geq \frac{k}{2}\operatorname{grad} p + 1$ gilt, folgt dann

$$\begin{aligned}
\dim_F U + \dim_F W &= \frac{1}{2}\dim\varphi\operatorname{grad} p - \frac{k}{2}\operatorname{grad} p + \frac{1}{2}\dim\varphi\operatorname{grad} p + \dim\varphi \\
&= \dim\varphi\operatorname{grad} p + \dim\varphi - \frac{k}{2}\operatorname{grad} p \\
&\geq \dim\varphi\operatorname{grad} p + \frac{k}{2}\operatorname{grad} p + 1 - \frac{k}{2}\operatorname{grad} p \\
&= \dim\varphi\operatorname{grad} p + 1 \\
&> \dim_F V(\theta).
\end{aligned}$$

Dann gilt also $U \cap W \neq \{0\}$ und es sei $u \in (U \cap W) \setminus \{0\}$. Damit existieren $v_i \in V$ für $i = 0, \ldots, \frac{1}{2}\operatorname{grad} p$ mit $u = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}\operatorname{grad} p} \theta^i v_i$. Weiter setzen wir nun $V_0 := \operatorname{sp}(v_0, \ldots, v_{\frac{1}{2}\operatorname{grad} p})$ und $\varphi_0 := \varphi_{|V_0}$. Damit gilt dann natürlich $\varphi_0 \prec \varphi$ und $\dim\varphi_0 \leq \frac{1}{2}\operatorname{grad} p + 1$. Wir betrachten nun den Vektor $\tilde{u} := \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}\operatorname{grad} p} t^i v_i \in V_0[t]$. Da wegen $u \in U$ gilt $\varphi(u) = 0$, ist auch $\varphi_0(\tilde{u})_{|t=\theta} = \varphi_0(u) = \varphi(u) = 0$. Also ist auch $\varphi_0(\tilde{u}) \in F[t]$ ein Polynom über F mit Nullstelle θ. Da aber p ein irreduzibles Polynom ist und ebenfalls die Nullstelle θ besitzt, ist p ein skalares Vielfaches eines Minimalpolynoms von θ und damit muss $p \mid \varphi_0(\tilde{u})$ gelten. Dabei ist $\varphi_0(\tilde{u}) \neq 0$, denn da $u \neq 0$ ist, folgt $\tilde{u} \neq 0$ und da mit φ auch φ_0 und damit nach Lemma 3.3 auch $(\varphi_0)_{F(t)}$ anisotrop ist folgt dann $\varphi_0(\tilde{u}) \neq 0$. Weiter ist $\operatorname{grad}(\varphi_0(\tilde{u})) \leq 2\left(\frac{1}{2}\operatorname{grad} p\right) = \operatorname{grad} p$, das heißt es gilt $\operatorname{grad}(\varphi_0(\tilde{u})) = \operatorname{grad} p$ und damit folgt die Existenz eines $x \in F^*$ mit $\varphi_0(\tilde{u}) = xp$. Mit dem Substitutionsprinzip 3.6 und der Tatsache, dass θ Nullstelle von p ist, folgt dann die Isotropie von $(\varphi_0)_{F(\theta)}$. $\square$

Da wir in diesem Kapitel Wittkerne bestimmen wollen, betrachten wir später den Fall, dass in Satz 7.1 und dem daraus folgenden Satz $k = 0$ gilt, das heißt wir betrachten Formen, die über $F(\theta)$ hyperbolisch werden. Für diesen Spezialfall lässt sich der Beweis von Satz 7.1 mit Hilfe des Normtheorems 5.2 und dem Satz von Cassels-Pfister 3.5 deutlich vereinfachen.

7.1 Separable Körpererweiterungen vom Grad vier

In diesem Abschnitt sei K stets eine separable Körpererweiterung vom Grad vier von F. Diese Erweiterung können wir nach dem Satz vom primitiven Element stets als von der Form $K = F(\theta)$ für ein $\theta \in K$ voraussetzen.

Wir wollen nun mit Hilfe von 7.1 einen Satz beweisen, der es uns ermöglichen wird, die Erzeuger des Wittkerns zu bestimmen. Auch dieser ist etwas allgemeiner formuliert, als wir ihn später benötigen werden.

Satz 7.2
Es sei $F(\theta) : F$ eine separable Körpererweiterung vom Grad vier und $p \in F[t]$ das Minimalpolynom von θ. Weiter sei φ eine nicht singuläre quadratische Form über F mit $\dim(\varphi_{F(\theta)})_{an} = k$ und $\dim \varphi \geq 2k+1$. Dann gilt in $W_q(F)$ die Gleichung $\varphi = \psi + \sum_i \pi_i$, dabei ist ψ eine anisotrope quadratische Form über F mit $\dim \psi \leq 2k$ und die π_i sind ähnlich zu 1-fachen oder zu 2-fachen Pfisterformen mit $(\pi_i)_{F(\theta)} = 0$.

Beweis: Da wir in $W_q(F)$ arbeiten, reicht es den Fall zu betrachten, dass φ anisotrop ist. Der Beweis erfolgt mit Induktion über $\dim \varphi$. Sei darum zunächst $\dim \varphi = 2$ und damit dann $k = 0$. In diesem Fall ist für passende $a, b \in F$ stets $\varphi = [a, b] = a[1, ab] = a \langle\langle ab]]$ und es ist nichts zu zeigen.

Sei also nun φ eine anisotrope Form mit $\dim \varphi \geq 4$. Nach Satz 7.1 dominiert φ dann eine anisotrope quadratische Form φ_0, die über der separablen Erweiterung $F(\theta)$ isotrop ist und $\dim \varphi_0 \leq 3$ erfüllt. Dabei kann φ_0 nicht eindimensional sein, da eindimensionale Formen bei beliebigen Körpererweiterungen anisotrop bleiben. Es ist also $\dim \varphi_0 \in \{2, 3\}$.

Fall 1: $\dim \varphi_0 = 2$.
Dann muss φ_0 vom Typ $(1, 0)$ oder vom Typ $(0, 2)$ sein. Im zweiten Fall wäre φ_0 total singulär, aber diese bleiben nach Satz 5.13 über separablen Erweiterungen anisotrop. Damit muss φ_0 vom Typ $(1, 0)$ sein und es ist also $\varphi_0 = a[1, b]$ für passende $a, b \in F$. Da φ_0 über F anisotrop ist, ist $\Delta(\varphi_0) = b \notin \wp(F)$, aber da φ_0 über $F(\theta)$ isotrop ist, muss $b \in \wp(F(\theta))$ gelten und $F(\theta)$ enthält den von F verschiedenen Unterkörper $F(\wp^{-1}(b))$. Betrachten wir nun die Form $\varphi \perp \varphi_0$, so enthält diese, da $\varphi_0 \prec \varphi$ gilt, nach 3.10 einen total isotropen Unterraum U der Dimension $\dim U \geq 2$. Das heißt es gilt $\dim(\varphi \perp \varphi_0)_{an} \leq \dim \varphi + 2 - 4 = \dim \varphi - 2$. Da in $W_q(F)$ gilt $\varphi \perp \varphi_0 = (\varphi \perp \varphi_0)_{an}$, können wir also die Induktionsvoraussetzung auf $\varphi \perp \varphi_0$ anwenden und erhalten eine Darstellung $\varphi + \varphi_0 = \psi + \sum_i \pi_i$ in $W_q(F)$. Da φ_0 selbst ähnlich zu einer 2-Pfisterform ist, folgt dann in $W_q(F)$ die Gleichung $\varphi = \psi + \sum_i \pi_i + \varphi_0$ und die Behauptung ist gezeigt, da offensichtlich $a[1, b]_{F(\theta)} \sim 0$ und $\dim \psi \leq 2 \dim((\varphi \perp \varphi_0)_{an}) \leq 2k$ erfüllt ist.

Fall 2: $\dim \varphi_0 = 3$.
In diesem Fall muss φ_0 vom Typ $(1, 1)$ oder vom Typ $(0, 3)$ sein. Im zweiten Fall wäre φ_0 total singulär und wir erhalten einen Widerspruch zu Satz 5.13, da total singuläre Formen nicht über separablen Erweiterungen isotrop werden können. Also ist φ_0 vom Typ $(1, 1)$, das heißt es existieren $b, c \in F$, sodass wir modulo Skalaren annehmen können, dass $\varphi_0 = [1, b] \perp \langle c \rangle$ gilt. Dann ist aber wegen $\varphi_0 \prec [1, b] \perp c[1, b] = \langle\langle c, b]]$ die Form φ_0 ein Pfisternachbar von $\pi := \langle\langle c, b]]$. Da nun sowohl π also auch φ die Form φ_0 dominieren, ist nach Korollar 3.10 dann $i_W(\varphi \perp \pi) \geq 3$ und damit ist $\dim(\varphi \perp \pi)_{an} \leq$

$\dim\varphi + 4 - 6 = \dim\varphi - 2$. Wir können also wieder wegen $\varphi \perp \pi = (\varphi \perp \pi)_{an}$ in $W_q(F)$ die Induktionsvoraussetzung auf $\varphi \perp \pi$ anwenden und erhalten in $W_q(F)$ die Gleichung $\varphi + \pi = \psi + \sum_i \pi_i$ für passende ψ und π_i und damit folgt schließlich dann die Behauptung $\varphi = \psi + \sum_i \pi_i + \pi$, denn es gilt $\dim\psi \leq 2k$ und $\pi_{F(\theta)} \sim 0$ ist trivialerweise erfüllt, da $\pi_{F(\theta)}$ den isotropen Pfisternachbarn φ_0 besitzt. □

Schränken wir nun den eben gezeigten Satz auf den Fall $k = 0$ ein, so erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 7.3
Es sei $K : F$ eine separable Körpererweiterung vom Grad vier. Dann ist der Wittkern $W_q(K/F)$ erzeugt von 2-Pfisterformen und den 1-Pfisterformen $[1, e]$ für die $F(\wp^{-1}(e))$ ein echter Zwischenkörper von $K : F$ ist.

Nun müssen wir noch die 2-Pfisterformen, die den Wittkern erzeugen, genauer bestimmen. Wie schon erwähnt existiert nach dem Satz vom primitiven Element ein $\theta \in K$ mit $K = F(\theta)$. Im Folgenden bezeichnen wir mit $p \in F[t]$ das Minimalpolynom von θ. Für dieses gilt dann natürlich $\operatorname{grad} p = [K : F] = 4$ und wir können p als $p = t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d$ mit $a, b, c, d \in F$ und $d \neq 0$ schreiben. Ist dabei $a \neq 0$, so liefert die lineare Variablentransformation $t \mapsto t + \frac{b}{a}$ ein weiteres normiertes, irreduzibles Polynom, das die selbe Körpererweiterung erzeugt, jedoch keinen quadratischen Term besitzt.

Ist $a = 0$, das heißt $p = t^4 + bt^2 + ct + d$, so wissen wir aus der Algebra, dass $c \neq 0$ gelten muss, da sonst das Polynom $p \in F[t^2]$ nicht separabel wäre. Vergleiche dazu etwa [15, Theo. 7.22]. Nutzen wir nun, dass θ und θ^{-1} die selbe Körpererweiterung erzeugen und ein Minimalpolynom von θ^{-1} durch

$$\frac{1}{d}\left(1 + b\frac{1}{t^2} + c\frac{1}{t^3} + d\frac{1}{t^4}\right) = x^4 + \frac{c}{d}x^3 + \frac{b}{d}x^2 + \frac{1}{d}$$

mit $\frac{c}{d} \neq 0$ gegeben ist, so erhalten wir wieder ein Polynom mit kubischem Anteil, auf welches wir eine analoge Transformation wie oben anwenden können.

Wir können also stets von einem Polynom der Form $p = t^4 + at^3 + bt + c$ mit $a, b, c \in F$ und $a, c \neq 0$ ausgehen. Mit Hilfe dieser Notationen erhalten wir nun den folgenden Satz.

Satz 7.4
Es sei $F(\theta) : F$ eine separable Körpererweiterung vom Grad vier und $p = t^4 + at^3 + bt + c$ mit $a, b, c \in F$ und $a, c \neq 0$ das Minimalpolynom von θ. Weiter sei φ eine anisotrope 2-fache Pfisterform, die über $F(\theta)$ hyperbolisch ist. Dann gilt eine der folgende Aussagen.

(a) *Es ist* $\varphi \cong \langle\langle f, e]]$ *mit* $f \in F^*$ *und* $e \in F \setminus \wp(F)$ *so, dass* $F(\wp^{-1}(e))$ *ein echter Zwischenkörper von* $F(\theta) : F$ *ist.*
(b) *Es ist* $\varphi \cong \langle\langle ad^3 + abd + b^2 + a^2c, \frac{d}{a^2}]]$ *für ein* $d \in F^*$*.*

Beweis: Sei also $\varphi \in P_2(F)$, sodass $\varphi_{F(\theta)}$ hyperbolisch ist. Nach dem Normtheorem 5.2 ist dann $p \in G_{F(t)}(\varphi) = D_{F(t)}(\varphi)$. Ist V der der Form φ zugrundeliegende Vektorraum, so existiert also ein $\tilde{v} \in V(t)$ mit $\varphi(\tilde{v}) = p$. Nach dem Satz von Cassels-Pfister 3.5 und mit Lemma 3.12 existieren dann $v_2, v_1, v_0 \in V$ mit

$$\begin{aligned}\varphi(t^2v_2 + tv_1 + v_0) &= t^4\,\varphi(v_2) + t^3\,\mathfrak{b}_\varphi(v_2, v_1) + t^2\,(\varphi(v_1) + \mathfrak{b}_\varphi(v_2, v_0)) + t\,\mathfrak{b}_\varphi(v_1, v_0) + \varphi(v_0)\\ &= t^4 + at^3 + bt + c. \qquad (7.1)\end{aligned}$$

Setze nun $U := \mathrm{sp}(v_2, v_1, v_0)$ und $\varphi_0 := \varphi_{|U}$. Wegen $\theta^2v_2 + \theta v_1 + v_0 \in U_{F(\theta)}$ ist $(\varphi_0)_{F(\theta)}$ isotrop und wegen $\varphi_0 \prec \varphi$ ist φ_0 über F anisotrop. Wie schon zuvor kann φ_0 dabei nicht die Dimension eins haben, das heißt es ist $\dim \varphi_0 \in \{2, 3\}$.

Fall 1: $\dim U = 2$
Analog zum Beweis von Satz 7.2 muss φ_0 vom Typ $(1, 0)$ sein und damit gilt modulo Skalaren $\varphi_0 = [1, e]$ mit $e \in F$. Da φ_0 über $F(\theta)$ isotrop ist, ist also $e \in \wp(F(\theta))$ und die Erweiterung $F(\theta) : F$ enthält den echten Zwischenkörper $F(\wp^{-1}(e))$. Für passende $g, h \in F$ ist dann $\varphi = [1, e] \perp [g, h]$ und da mit φ_0 auch φ bereits über $F(\wp^{-1}(e))$ isotrop und damit als Pfisterform hyperbolisch ist, folgt mit dem Wittschen Kürzungssatz, dass auch $[g, h]$ über $F(\wp^{-1}(e))$ hyperbolisch wird. Nach Theorem 6.9 existiert dann ein $f \in F$ mit $[g, h] \cong f[1, e]$ und mit Lemma 4.7 folgt schließlich $\varphi \cong [1, e] \perp f[1, e] \cong \langle\langle f, e]]$.

Fall 2: $\dim U = 3$
Angenommen U enthält bereits einen zweidimensionalen Unterraum auf dem φ isotrop wird. Dann gilt der Fall 1 und nach obigen Schritten folgt dann die Behauptung und es ist nichts zu zeigen. Wir können also voraussetzen, dass U keinen zweidimensionalen Unterraum enthält, der dies erfüllt. Weiter ist dann v_2, v_1, v_0 eine Basis von U und aus Gleichung (7.1) erhalten wir die folgenden Ausdrücke

$$\varphi(v_2) = 1\ ,\ \mathfrak{b}_\varphi(v_2, v_1) = a\ ,\ \varphi(v_1) + \mathfrak{b}_\varphi(v_2, v_0) = 0\ ,\ \mathfrak{b}_\varphi(v_1, v_0) = b\ ,\ \varphi(v_0) = c\ .$$

Weiter setzen wir nun $\varphi(v_1) = \mathfrak{b}_\varphi(v_2, v_0) = d$. Dabei ist $d \neq 0$, da sonst aus der Anisotropie von φ dann $v_1 = 0$ folgt, was ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von v_2, v_1, v_0 ist. Also ist $d \neq 0$. Betrachten wir nun φ_0 in der Basis $v_2, \frac{1}{a}v_1, bv_2 + dv_1 + av_0$, so hat φ_0 die Gestalt

$$\varphi_0 \cong [1, \frac{d}{a^2}] \perp \langle\, d^3 + abd + b^2 + a^2c \,\rangle\,.$$

Dies ist ein Pfisternachbar von φ, aber auch von $\pi = \langle\!\langle\, d^3 + abd + b^2 + a^2c, \frac{d}{a^2}]]$. Da nun φ und π den selben Pfisternachbarn besitzen, ist nach Satz 5.11 dann $\varphi \cong \pi$. □

Damit haben wir die 2-fachen Pfisterformen im Wittkern bis auf Isometrie bestimmt. Dabei sind die Formen vom Typ 7.4(b) genau die Formen, die erst über $F(\theta)$ isotrop und damit hyperbolisch werden und nicht schon über einem Unterkörper von $F(\theta)$ und die Formen vom Typ 7.4(a) sind 2-fache Pfisterformen, die erzeugt sind von den 1-fachen Pfisterformen im Wittkern.

Aus der Algebra wissen wir, dass in Körpern der Charakteristik zwei die Resolvente eines beliebigen Polynoms $q = t^4 + x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0$ gegeben ist durch

$$f_q = t^3 + x_2t^2 + x_3x_1t + x_3^2x_0 + x_1^2.$$

Damit ist dann also $f_p = t^3 + abt + b^2 + a^2c$ die Resolvente des Polynoms p. Diese können wir in den eben bestimmten 2-Pfisterformen wiederfinden und erhalten dann schließlich das folgende Theorem.

Theorem 7.5
Es sei $F(\theta) : F$ eine separable Körpererweiterung vom Grad vier mit Minimalpolynom $p = t^4 + at^3 + bt + c$ von θ und Resolvente f_p. Dann ist der Wittkern $W_q(F(\theta)/F)$ erzeugt durch die Wittklassen von

(i) 1-fachen Pfisterformen $[1, e]$ mit $e \in F$, wobei $F(\wp^{-1}(e))$ ein echter Zwischenkörper von $F(\theta) : F$ ist,

(ii) 2-fachen Pfisterformen der Art $\langle\!\langle\, f_p(d), \frac{d}{a^2}]]$, wobei $d \in F^*$ ist.

Beweis: Nach den obigen Aussagen bleibt nur noch zu zeigen, dass die Formen aus (i) und (ii) für alle passenden $e, d \in F$ auch in $W_q(F(\theta)/F)$ liegen. Im ersten Fall ist das klar, da wegen $e \in \wp\left(F(\wp^{-1}(e))\right) \subset \wp(F(\theta))$ die Form $[1, e]$ eine triviale Arf-Invariante besitzt. Betrachten wir nun eine 2-fache Pfisterform $\pi = [1, \frac{d}{a^2}] \perp f_p(d)[1, \frac{d}{a^2}]$ mit dem zugrundeliegenden Vektorraum V in der Basis v_1, v_2, w_1, w_2. Der Vektor

$$v = \left(\theta^2 + \frac{b}{a}\right) v_1 + (\theta a + d)\, v_2 + \frac{1}{a} w_1 \in V_{F(\theta)}$$

ist verschieden von Null und für diesen gilt

$$\begin{aligned}\pi(v) &= \left(\theta^4 + \frac{b^2}{a^2}\right)\cdot 1 + \left(\theta^2 a^2 + d^2\right)\cdot \frac{d}{a^2} + \left(\theta^2 + \frac{b}{a}\right)\cdot(\theta a + d)\cdot 1 + \frac{f_P(d)}{a^2} \\ &= \theta^4 + a\theta^3 + b\theta + c = p(\theta) = 0.\end{aligned}$$

Also ist $\pi_{F(\theta)}$ eine isotrope Pfisterform, diese ist nach Korollar 4.6 hyperbolisch und damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

7.2 Rein inseparable Körpererweiterungen vom Grad vier

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Methode aus Kapitel 7.1 auch auf rein inseparable Körpererweiterungen von F vom Grad vier der Form $F(\sqrt[4]{d}\,) : F$ für ein $d \in F^*$ anwenden. Der Wittkern einer solchen Erweiterung ist bereits bekannt und wurde 2005 von Ahmad in [3] bestimmt. Der folgende Beweis ist allerdings etwas kürzer und weniger technisch als der von Ahmad.

Theorem 7.6
Es sei $\mathrm{F}(\sqrt[4]{d}\,) : F$ *eine rein inseparable Erweiterung vom Grad vier. Dann ist der Wittkern* $W_q(\mathrm{F}(\sqrt[4]{d}\,)/F)$ *erzeugt durch die Wittklassen der Formen*

(i) $\langle\langle d, e]]$ *mit* $e \in F^*$*,*

(ii) $\langle\langle c, dc^2]]$ *mit* $c \in F^*$*.*

Beweis: Wir setzen $\alpha := \sqrt[4]{d}$. Es sei zunächst ein $\varphi \in W_q(F(\alpha)/F)$ gegeben und wir zeigen nun, dass sich φ als Kombination der Formen $\langle\langle d, e]]$ und $\langle\langle c, dc^2]]$ mit $e, c \in F^*$ schreiben lässt durch Induktion über $\dim\varphi$.

Nach Lemma 6.5 kann die Form φ nicht die Dimension 2 haben, da mit $\varphi_{F(\alpha)}$ auch schon φ eine triviale Arf-Invariante besitzen würde und damit hyperbolisch wäre. Es ist also $\dim\varphi \geq 4$. Wir beginnen nun zunächst mit dem Induktionsschritt, dass heißt es sei φ eine anisotrope nicht singuläre quadratische Form über F mit $\dim\varphi \geq 6$.

Da $\varphi_{F(\alpha)}$ hyperbolisch ist und α das Minimalpolynom $t^4{+}d \in F[t]$ besitzt, folgt nach dem Normtheorem 5.2, dass $p \in G_{F(t)}(\varphi)$ gilt. Da wir zeigen wollen, dass φ eine Kombination von Formen ist, die ähnlich zu Pfisterformen sind, können wir φ oBdA voraussetzen, dass $1 \in D_f(\varphi)$ gilt und nach Lemma 4.2 ist dann $p \in D_{F(t)}(\varphi)$. Ist V der der Form φ zugrundeliegende Vektorraum, so existiert also ein $\tilde{v} \in V(t)$ mit $\varphi(\tilde{v}) = p$. Nach dem

Satz von Cassels-Pfister 3.5 und Lemma 3.12 existieren also $v_2, v_1, v_0 \in V$ mit

$$\begin{aligned}\varphi(t^2v_2 + tv_1 + v_0) &= t^4\,\varphi(v_2) + t^3\,\mathfrak{b}_\varphi(v_2, v_1) + t^2\,(\varphi(v_1) + \mathfrak{b}_\varphi(v_2, v_0)) + t\,\mathfrak{b}_\varphi(v_1, v_0) + \varphi(v_0)\\ &= t^4 + d. \qquad (7.2)\end{aligned}$$

Wir setzen nun $U := \mathrm{sp}(v_2, v_1, v_0)$ und $\varphi_0 := \varphi_{|U}$. Da φ_0 über $F(\alpha)$ wegen $\alpha^2 v_2 + \alpha v_1 + v_0 \in U_{F(\alpha)}$ isotrop und über F anisotrop ist, kann U nicht eindimensional sein. Es gilt also wieder $\dim\varphi_0 \in \{2, 3\}$.

Fall 1: $\dim\varphi_0 = 2$
Dann muss φ_0 vom Typ $(1, 0)$ oder vom Typ $(0, 2)$ sein. Im ersten Fall wäre φ_0 nicht singulär und es gäbe einen Widerspruch zu Lemma 6.5. Also ist φ_0 total singulär und da $(\varphi_0)_{F(\alpha)}$ isotrop ist, enthält φ_0 nach Satz 5.14 die Unterform $c\,\langle\, 1, d\,\rangle$ für ein $c \in F^*$, das heißt Modulo Skalaren und aus Dimensionsgründen ist dann $\varphi_0 = \langle\, 1, d\,\rangle$. Nach Lemma 1.17 existiert dann ein $e \in F^*$, sodass $[1, e] \perp \langle\, d\,\rangle$ von φ dominiert wird. Da aber $[1, e] \perp \langle\, d\,\rangle$ ein Pfisternachbar von $\pi = \langle\!\langle\, d, e]]$ ist, gilt nach Korollar 3.10 dann $i_W(\varphi \perp \pi) \geq 3$ und damit folgt $\dim(\varphi \perp \pi)_{an} \leq \dim\varphi + 4 - 6 = \dim\varphi - 2$. Wegen $(\varphi \perp \pi)_{an} = \varphi \perp \pi$ in $W_q(F)$ folgt dann die Behauptung mit der Induktionsvoraussetzung analog zum Beweis von Satz 7.2.

Fall 2: $\dim\varphi_0 = 3$
Enthielte φ_0 bereits eine zweidimensionale Unterform die über $F(\alpha)$ isotrop wird, so könnten wir den Fall 1 anwenden und die Behauptung folgt nach den obigen Schritten. Damit können also oBdA voraussetzen, dass es keine solche zweidimensionale Unterform gibt. Da $\dim\varphi_0 = 3$ gilt, ist φ_0 vom Typ $(1, 1)$ oder vom Typ $(0, 3)$. Im zweiten Fall wäre φ_0 total singulär und da $(\varphi_0)_{F(\alpha)}$ isotrop ist, enthielte φ_0 für ein $g \in F^*$ die zweidimensionale Unterform $g\,\langle\, 1, d\,\rangle$, die über $F(\alpha)$ isotrop wird, was wir bereits ausgeschlossen haben. Also ist φ_0 vom Typ $(1, 1)$ und v_2, v_1, v_0 ist eine Basis von U. Aus Gleichung (7.2) erhalten wir dann

$$\varphi(v_2) = 1\ ,\ \varphi(v_1) = \mathfrak{b}_\varphi(v_2, v_0) =: a\ ,\ \varphi(v_0) = d\ ,\ \mathfrak{b}_\varphi(v_2, v_1) = \mathfrak{b}_\varphi(v_1, v_0) = 0.$$

Dabei gilt $a \neq 0$, denn aus $a = 0$ würde aufgrund der Anisotropie von φ dann $v_1 = 0$ und damit $\dim(\mathrm{sp}(v_2, v_1, v_0)) < 3$ folgen. Es ist also $a \neq 0$ und wir setzen $c := \frac{1}{a}$. In der Basis v_2, cv_0, cv_1 hat φ_0 dann die Gestalt

$$\varphi_0 \cong [1, c^2 d] \perp \langle\, c\,\rangle\,.$$

Dies ist ein Pfisternachbar von $\pi = \langle\!\langle\, c, c^2 d]]$ und da sowohl φ also auch π die Form

$[1, c^2 d] \perp \langle c \rangle$ dominieren, folgt wieder $\dim(\varphi \perp \pi)_{an} \leq \dim \varphi + 4 - 6 = \dim \varphi - 2$ und wegen $(\varphi \perp \pi)_{an} = \varphi \perp \pi$ in $W_q(F)$ mit der Induktionsvoraussetzung dann $\varphi \perp \pi = \sum_i x_i \pi_i$, das heißt $\varphi = \sum_i x_i \pi_i + \pi$, wobei die $x_i \in F$ und die π_i passende 2-Pfisterformen von obiger Gestalt sind.

Nun müssen wir noch den Induktionsanfang, das heißt den Fall $\dim \varphi = 4$, betrachten. Da φ über $F(\alpha)$ hyperbolisch ist, folgt $\Delta(\varphi_{F(\alpha)}) \equiv 0$ und mit Lemma 6.5 dann auch $\Delta(\varphi) \equiv 0$. Nach Korollar 2.14 ist φ dann ähnlich zu einer 2-fachen Pfisterform. Wir können also wie schon oben erwähnt oBdA davon ausgehen, dass die Form φ eine 2-fache Pfisterform ist.

Ist $\dim U = 2$, so konstruiert man analog zum Fall 1 eine quadratische Form $[1, e] \perp \langle d \rangle$ mit $e \in F^*$, die sowohl Pfisternachbar von φ also auch von $\pi = \langle\langle d, e]]$ ist. Nach Satz 5.11 sind die Pfisterformen damit isometrisch.

Ist $\dim U = 3$, so erhält man analog zu oben eine von φ dominierte Form der Art $[1, c^2 d] \perp \langle c \rangle$ mit $c \in F^*$, die aber auch ein Pfisternachbar von $\langle\langle c, c^2 d]]$ ist. Wieder mit Satz 5.11 erhalten wir dann, dass $\varphi \cong \langle\langle c, c^2 d]]$ gilt.

Damit ist auch der Induktionsanfang gezeigt und die erste Inklusion des Wittkerns bewiesen. Es bleibt noch die Umkehrung zu zeigen, das heißt, dass jede Form der Art $\langle\langle d, e]]$ und $\langle\langle c, c^2 d]]$ mit $e, c \in F^*$ im Wittkern liegt. Da aber $d \in F(\alpha)^2$ gilt, erhalten wir sofort

$$\langle\langle d, e]] = [1, e] \perp d[1, e] \cong [1, e] \perp [1, e] \cong 2 \times \mathbb{H}\,.$$

Sei nun noch die Form $\pi = [1, c^2 d] \perp c[1, c^2 d]$ in der Basis v_1, v_2, w_1, w_2 von V gegeben. Dann ist $v = \alpha^2 v_1 + \frac{1}{c} v_2 + \frac{\alpha}{c} w_1 \in V_{F(\alpha)} \setminus \{0\}$ ein isotroper Vektor von $\varphi_{F(\alpha)}$, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\pi\left(\alpha^2 v_1 + \frac{1}{c} v_2 + \frac{\alpha}{c} w_1\right) &= \alpha^4 \pi(v_1) + \frac{1}{c^2}\pi(v_2) + \frac{\alpha^2}{c^2}\pi(w_1) + \frac{\alpha^2}{c}\,\mathfrak{b}_\pi(v_2, v_1) \\
&= \alpha^4 + \frac{1}{c^2} c^2 d + \frac{\alpha^2}{c^2} c + \frac{\alpha^2}{c} \\
&= \alpha^4 + d = 0.
\end{aligned}$$

Da π als isotrope Pfisterform hyperbolisch ist, folgt damit $\pi \in W_q(F(\alpha)/F)$ und die Behauptung ist gezeigt. □

Auch bei dieser Körpererweiterung ist es so, dass die Formen vom Typ 7.6(i) bereits über dem Zwischenkörper $F(\sqrt{d})$ hyperbolisch werden, wohingegen die Formen vom

Typ 7.6(ii) erst über $F(\sqrt[4]{d})$ und nicht schon über einem Zwischenkörper hyperbolisch sind.

Wie auch schon in Theorem 7.5 können wir auch hier die Resolvente in den Erzeugern des Wittkerns wiederfinden. Da die Resolvente des Polynoms $p = t^4 + d$ gegeben ist durch $f_p = t^3$, können wir die zweite Erzeugerklasse des Wittkerns mit einem $c \in F^*$ umschreiben zu

$$\langle\langle c, dc^2]] \cong \langle\langle c^3, dc^2]] = \langle\langle f_p(c), dc^2]].$$

Diese Erzeuger unterscheiden sich ein wenig von denen, die Ahmad in seinem Beweis konstruiert hat. Er beschrieb den Wittkern als Erzeugnis der Formen (vergleiche dazu [3, Theo. 3])

- $\langle\langle d, e]]$ mit $e \in F^*$ und
- $\langle\langle h, dh^2g^2]]$ mit $h \in F^*$ und $g \in F^* \cap F(\sqrt{d})^2$.

Das dieses Erzeugersystem äquivalent ist zu dem in Theorem 7.6 konstruierten System, ist leicht zu sehen.

7.3 Offene Fragen und eine Abschlussübersicht

Nachdem wir nun beide Wittkerne bestimmt haben, bleibt im Falle einer Erweiterung vom Grad vier nur noch ein Fall ungeklärt. Dieser ist eine Erweiterung $F(\theta) : F$, wobei θ Nullstelle eines irreduziblen Polynoms der Form $t^4+at^2+b \in F[t]$ mit $(aF^2+b)\cap F^2 = \emptyset$ ist. Dies entspricht genau einer inseparablen Körpererweiterung vom Grad vier, für die kein echter Zwischenkörper existiert, der über F inseparabel ist.

Die Wittkerne für Erweiterungen höheren Grades sind dabei, bis auf wenige Ausnahmen (vergleiche etwa 6.21) auch noch unbestimmt. Wie schon erwähnt ist selbst der vermeintlich einfache Fall einer Erweiterung $F(\wp^{-1}(d_1), \wp^{-1}(d_2), \sqrt{a}) : F$ noch offen. Die Frage nach Wittkernen liefert also noch eine große Menge an offenen Problemen.

Zusammenfassend wollen wir nun die Arbeit mit einer Übersicht über die bekannten Wittkerne abschließen, welche zum größten Teil in dieser Arbeit bewiesen wurden.

Körpererweiterung $K : F$	**Wittkern**
$K = F\left(\wp^{-1}(b)\right)$	$W_q(K/F) = W(F) \otimes [1, b]$
$K = F(\sqrt{a}\,)$	$W_q(K/F) = \langle\, 1, a\,\rangle_b \otimes W_q(F)$
$K = F(\wp^{-1}(b_1), \wp^{-1}(b_2))$	$W_q(K/F) = W(F) \otimes [1, b_1] + W(F) \otimes [1, b_2]$
$K = F(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2})$	$W_q(K/F) = \langle\, 1, a_1\,\rangle_b \otimes W_q(F) + \langle\, 1, a_2\,\rangle_b \otimes W_q(F)$
$K = F(\sqrt{a}, \wp^{-1}(b))$	$W_q(K/F) = \langle\, 1, a\,\rangle_b \otimes W_q(F) + W(F) \otimes [1, b]$
K mit $[K : F]$ ungerade	$W_q(K/F) = \{0\}$
$K = F(\theta)$ mit $\min_\theta(t) = t^4 + at^3 + bt + c$	$W_q(K/F)$ erzeugt von $[1, e]$ und $\langle\langle\, f_{\min_\theta}(d), a^{-2}d]]$ mit $e, d \in F^*$, wobei $F(\wp^{-1}(e))$ ein echter Zwischenkörper von K/F ist
$K = \mathrm{F}(\sqrt[4]{d}\,)$	$W_q(K/F)$ erzeugt durch die Formen $\langle\langle\, d, e]]$ und $\langle\langle\, c, c^2 d\,]]$ mit $e, c \in F^*$
$K = F(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$	$W_q(K/F) = \sum_{i=1}^{n} \langle\, 1, a_i\,\rangle_b \otimes W_q(F)$
$K = F(\wp^{-1}(b), \sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$	$W_q(K/F) = W(F) \otimes [1, b] + \sum_{i=1}^{n} \langle\, 1, a_i\,\rangle_b \otimes W_q(F)$
$K = F(t)$ mit transzendentem t	$W_q(K/F) = \{0\}$
$K = F(\pi)$ mit $\pi \in P_n(F)$	$W_q(K/F) = W(F) \otimes \pi$
$K = F(\varphi)$ mit φ Pfisternachbar von $\pi \in P_n(F)$	$W_q(K/F) = W(F) \otimes \pi$

Literatur

[1] Ahmad, H.: *On quadratic forms over inseparable quadratic extensions.* Archiv der Mathematik, Vol. 63, iss. 1, p. 23-29, 1994.

[2] Ahmad, H.: *Witt kernels of bi-quadratic extensions in characteristic 2.* Bulletin of the Australian Mathematical Society, Vol. 69, iss. 03, p. 433-440, 2004.

[3] Ahmad, H.: *The Witt kernels of purely inseparable quartic extensions.* Linear Algebra and its Applications, Vol. 395, p. 265-273, 2005.

[4] Aravire, R. und Laghribi, A.: *Results on Witt kernels of quadratic forms for multiquadratic extensions.* preprint, 2011.

[5] Arf, C.: *Untersuchung über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2 (Teil I.).* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), Vol. 183, p. 148 -167, 1941.

[6] Baeza, R.: *Ein Teilformensatz für quadratische Formen in Charakteristik 2.* Mathematische Zeitschrift, Vol. 135, p. 175-184, 1973/1974.

[7] Baeza, R.: *Quadratic Forms Over Semilocal Rings.* Springer Verlag, 1978.

[8] Baeza, R.: *The norm theorem for quadratic forms over a field of charateristic 2.* Communications in Algebra, Vol. 18, iss 5, p 1337 -1348, 1990.

[9] Baeza, R.: *Some algebraic aspects of quadratic forms over fields of characteristic two.* Documenta Mathematica, p. 49 -63, 2001.

[10] Elman, R., Karpenko, N. und Merkurjev, A.: *The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms.* American Mathematical Society,Colloquium Publications, Vol. 56, 2008.

[11] Hoffmann, D.: *Diagonal forms of degree p in characteristic p.* Contemporary Mathematics Vol. 344, p. 135-183, 2004.

[12] Hoffmann, D.: *Witt kernels of bilinear forms for algebraic extensions in characteristic 2.* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 134, iss. 3, p. 645-652, 2006.

[13] Hoffmann, D. und Laghribi, A.: *Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic 2.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 356, iss. 10, p. 4019-4053, 2004.

[14] Hoffmann, D. und Laghribi, A.: *Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric in characteristic 2.* Journal of Algebra, Vol. 295, iss. 2, p. 362-386, 2006.

[15] Howie, J.: *Fields and Galois Theory.* Springer Verlag, 2007.

[16] Kato, K.: *Symmetric Bilinear Forms, Quadratic Forms and Milnor K-Theory in Characteristic Two.* Inventiones mathematicae, Vol. 66, iss. 3, p. 493-510, 1982.

[17] Knebusch, M.: *Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteteetn symmetrischen Bilinerarformen.* Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 69/70, 3. Abhalndlung, p. 93 -157, 1970.

[18] Knebusch, M.: *Specialization of Quadratic and Symmetric Bilinear Forms.* Springer London Ltd, 2010.

[19] Laghribi, A.: *Certaines formes quadratiques de dimension au plus 6 et corps des fonctions en caractéristique 2.* Israel Journal of mathematics, Vol. 129, p. 317-361, 2002.

[20] Laghribi, A.: *Witt kernels of function field extensions in characteristic 2.* Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 199, iss. 1-3, p. 167-182, 2005.

[21] Laghribi, A.: *The norm theorem for totally singular quadratic forms.* The Rocky Mountain journal of mathematics, Vol. 36, iss. 2, p. 575-592, 2006.

[22] Laghribi, A. und Mammone, P.: *On the norm theorem for semisingular quadratic forms.* Indagationes Mathematicae, Vol. 17, iss. 4, p. 599-610, 2006.

[23] Mammone, P. und Moresi, R.: *Formes quadratiques, algèbres à division et extensions multiquadratique inséparables.* Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Vol. 2, iss. 3, p. 311-319, 1995.

[24] Mammone, P., Tignol, J. und Wadsworth, A.: *Fields of characteristic 2 with prescribed u-invariants.* Mathematische Annalen, Vol. 290, iss. 1, p. 109-128, 1991.

[25] Pfister, A.: *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology.* London Mathematical Society, Lecture Note Series 217, Cambridge University Press, 1995.

[26] Scharlau, W.: *Quadratic and Hermitian Forms.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, 1985.

[27] Sivatski, A.: *The Witt ring kernel for a fourth degree field extension and related problems.* Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 214, iss. 1, p. 61-70, 2010.

[28] Witt, E.: *Theorie der quadratischen Formen über beliebigen Körpern.* Journal für die reine und angewandte Mathematik Vol. 176, p. 31-44, 1936.