

Vortrag über Folgen und Reihen

Akad. Dir. Dr. Martin Scheer

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik

Wintersemester

Teil A

Folgen

Definition

Eine **Folge** ist eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$

Jedem $n \in \mathbb{N}_0$ wird also ein Element $a_n := f(n)$ zugeordnet.

Man schreibt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder auch kurz (a_n) , wenn klar ist, was gemeint ist.

$a_n \in \mathbb{R}$: **Folgenglieder**

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

Beispiel

Beispiele für Folgen sind:

0. **Konstante** Folge: $a_n = c$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $c \in \mathbb{R}$ fest, z.B. mit $c = 2$:

$$(2, 2, 2, 2, \dots)$$

1. $a_n = 2n + 3$

$$(3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots)$$

2. Die **Fibonacci-Folge**: $a_0 = 0, a_1 = 1$ und für $n \geq 2$: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$:

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

Beispiel

3. $a_n = \frac{1}{n}$: (Hinweis: Hier ist a_1 das erste Folgenglied!)

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

4. $a_n = (-1)^n$:

$$(1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

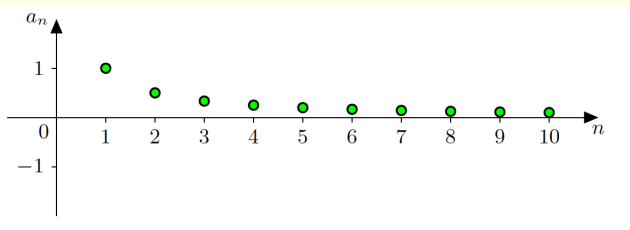
5. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2 + 2n + 2}{2n^3 - 4}$:

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{6}, -\frac{13}{6}, \dots\right)$$

Beispiel

Betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ ein paar Folgen mal etwas genauer:

1. $a_n = \frac{1}{n}$



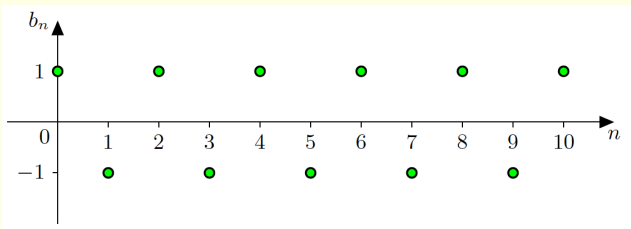
Uns fällt auf: Die Folgenglieder werden mit zunehmendem n immer kleiner (die Folge ist **monoton fallend**). Die Zahl 1 wird nicht überschritten und die Zahl 0 nicht unterschritten.

Außerdem: Der Wert 0 selbst wird von keinem Folgenglied angenommen.

Vermutung: Die Folge (a_n) **konvergiert gegen 0**. Was genau bedeutet das?

Beispiel

2. $b_n = (-1)^n$



Es fällt auf: Die Folge $b_n = (-1)^n$ strebt einerseits für die geraden n gegen die Zahl 1, für die ungeraden n gegen -1.

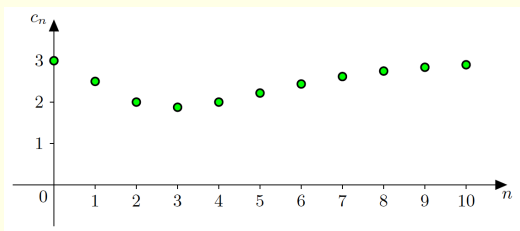
Die Folge konvergiert also wohl **nicht** gegen eine Zahl... sie **divergiert**.

Frage: Besteht die Möglichkeit, dass eine Folge gegen zwei verschiedene Werte (hier: 1 und -1) konvergieren kann?

Antwort: Nein.

Beispiel

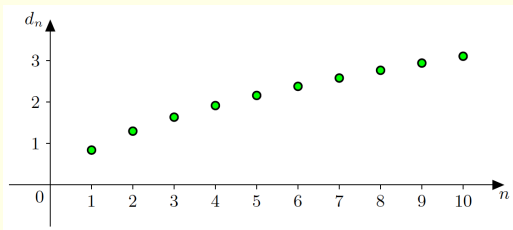
3. $c_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot n$



Die Folgenglieder von c_n zeigen erst ein uneinheitliches Verhalten, steigen dann aber beständig an und scheinen sich dem Wert 3 anzunähern.
Kann man trotz des uneinheitlichen Verhaltens der ersten Folgenglieder von einer Konvergenz gegen $a = 3$ sprechen?

Beispiel

4. $d_n = n \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$



Die Folge d_n scheint beständig größer werdende Werte zu liefern.
Die Frage ist, ob dieses Verhalten irgendwann aufhört oder ob die Folge sich auf diese Weise beständig weiterentwickelt.
Vermutung: Diese Folge hier scheint gegen unendlich zu gehen.

Beispiele zum Selberrechnen!

$$1) \quad a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$2) \quad b_n = \frac{n^2}{2n}$$

Zu 1):

$$\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Zu 2):

$$\frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} : \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$$

Wir sehen uns mal an, wie die Mathematiker den Grenzwertbegriff definiert haben:

Definition

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent zum Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ für alle $n \geq n_0$.

Man schreibt dann: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ oder $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$

Übersichtlicher ist das in der sogenannten Quantorenschreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall n \geq n_0 : a_n \in U_\varepsilon(a)$$

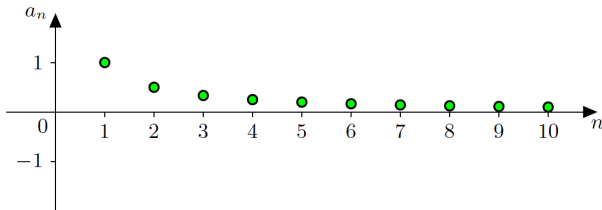
Hierbei bedeuten die Quantoren: $\forall$: Für alle, $\exists$: Es existiert.

Eine Folge heißt **Nullfolge**, falls sie gegen $a = 0$ konvergiert, falls also gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall n \geq n_0 : a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$



Grenzwert ist hier: $a = 0$.

Wir können also einen ε -Schlauch anzeichnen und immer enger werden lassen... **alle** Folgenglieder ab einem bestimmten liegen dann immer drin!

Definition (8.5)

Eine Folge (a_n) heißt **divergent**, falls sie nicht konvergent ist.

In Quantorenschreibweise:

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 = n_0(\varepsilon) \exists n \geq n_0 : a_n \notin (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$$

Anschaulich: Irgendwelche späteren Folgenglieder fliegen also immer aus dem ε -Schlauch!

Korollar

Der Grenzwert einer konvergenten Folge (a_n) ist **eindeutig bestimmt**, d.h. es gilt:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \quad \implies \quad a = b}$$

(Es kann also nicht sein, dass eine Folge zwei verschiedene Grenzwerte hat !)

Beispiel

1. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

- 2.

Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist divergent.

Beispiel

3. Die Folge $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$ strebt gegen ∞

Denn:

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n} = \frac{n \cdot (n - \frac{1}{n})}{n} = n - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

4. Die Folge $a_n = \frac{2n^3 - 2n + 1}{n^3 + n^2 - 1}$ hat den Grenzwert 2

Denn:

$$a_n = \frac{2n^3 - 2n + 1}{n^3 + n^2 - 1} = \frac{n^3 \cdot (2 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3})}{n^3 \cdot (1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3})} = \frac{2 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 2$$

Tipp: Wir klammern immer die **höchste Potenz im Nenner** aus!

Aufgaben zum Selberrechnen:

$$a_n = \frac{n^3 + 7n - 1}{4n^3 + 2n^2 - 3}$$

$$b_n = \frac{n^2 - 2n}{n^3 + n - 5}$$

Lösungen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 7n - 1}{4n^3 + 2n^2 - 3} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n}{n^3 + n - 5} = 0$$

Das was wir jetzt schon mehrmals gemacht haben, nennt sich **Grenzwertsätze**.

Satz (Grenzwertsätze)

Seien (a_n) , (b_n) , (c_n) Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Dann gelten die folgenden **Grenzwertsätze**:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

Insbesondere gilt für $k \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot a$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$, $b_n \neq 0$ für fast alle n) Insbesondere ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

4. Für Folgen (a_n) , (b_n) gilt der **Einschachtelungssatz** / das **Sandwichkriterium**:

$$\text{Ist } a_n \leq c_n \leq b_n \text{ (für fast alle } n \text{) und gilt } a = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n) = a$$

Beispiel

Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Definition

Den Grenzwert der Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nennen wir e , die sogenannte **Eulersche Zahl**:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Korollar

Es gilt sogar für $k \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Aufgabe: Berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$

Lösung: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

Teil B

(Unendliche) Reihen

Definition

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge.

Wir definieren uns daraus eine neue Folge: Die **Folge der Partialsummen** $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$:

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(Das große Summenzeichen ist eine wichtige mathematische Schreibweise... wir üben das gleich mal ein wenig!)

Das n -te Folgenglied der Folge der Partialsummen (s_n) ist also die Summe der ersten Folgenglieder von (a_k) bis einschließlich Folgenglied a_n .

Durch Bildung des Grenzüberganges $n \rightarrow \infty$ entsteht so eine Summe mit unendlich vielen Summanden, eine sogenannte **(unendliche) Reihe**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Zur Übung mit dem Summenzeichen:

$$\sum_{k=0}^5 k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99}$$

Zum Selbstrechnen:

$$\sum_{k=3}^5 (2 \cdot k + 3) = ?$$

Lösung:

$$\sum_{k=3}^5 (2 \cdot k + 3) = (2 \cdot 3 + 3) + (2 \cdot 4 + 3) + (2 \cdot 5 + 3) = (6 + 3) + (8 + 3) + (10 + 3) = 9 + 11 + 13 = 33$$

Zurück zu **Reihen**: Wir summieren also eine Folge komplett auf... unendlich viele Folgenglieder werden aufsummiert... und uns interessieren vor allem die Reihen, die dann nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$ gehen, sondern insgesamt als Ergebnis gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergieren... also dann z.B. den Reihenwert $a = 5$ haben.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \stackrel{!}{=} 5$$

Sowas gibt es tatsächlich... die allermeisten Reihen **divergieren** aber... natürlich!
Frage: Was muss eine Folge haben, damit die Reihe überhaupt die Chance hat zu konvergieren?

Notwendiges Kriterium: Die Folge muss eine **Nullfolge** sein, damit die Reihe konvergieren kann!

Hinweis: Ein notwendiges Kriterium muss erfüllt sein... reicht aber evt. nicht aus!

B3 (Unendliche Reihen): Erste Beispiele

Wie gesagt: Nullfolge reicht nicht immer aus! Die Folge muss außerdem **schnell** gegen 0 konvergieren, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel (Harmonische Reihe)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ ist divergent!}$$

(harmonische Reihe)

Denn: $\frac{1}{k}$ ist zwar eine Nullfolge, aber die Reihe summiert sich trotzdem gegen ∞ auf... sie geht nicht schnell genug gegen 0... die Reihe ist also divergent.

(Auf der nächsten Seite kommt ein gut verständlicher Beweis dazu...)

Sehr interessant: Die harmonische Reihe ist **genau** die Grenze... denn:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad \text{konvergent für } \alpha > 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad \text{divergent für } \alpha \leq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = ?$$

Kleiner Trick: Wir summieren erstmal nur auf bis 2^m : $\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m-1} + \frac{1}{2^m}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} \\ &\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{m \text{ mal}} \\ &= 1 + m \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + m \cdot \frac{1}{2}\right) = \infty$$

Beispiel (Geometrische Reihe)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ ist konvergent f\"ur } |q| < 1$$

(geometrische Reihe)

Dazu: $|q| < 1 \iff q \in (-1; 1)$.

Es gibt dann sogar eine Formel f\"ur den Reihenwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

F\"ur $|q| \geq 1$ ist die geometrische Reihe \"ubrigens divergent.

Aufgabe zum Selbstrechnen:

Untersuche die folgende Reihe auf Konvergenz und berechne, falls möglich, den Reihenwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \begin{array}{l} \text{geom. Reihe, } |q| = \frac{2}{3} < 1 \\ = \end{array} \quad \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Die Reihe konvergiert also mit Reihenwert 3.

B4 (Unendliche Reihen): Konvergenz-Bestimmung

Wir sehen uns noch ein paar Methoden zur Untersuchung von Reihen-Konvergenz an... nämlich das **Wurzelkriterium** und das **Quotientenkriterium**.

Wurzelkriterium: Dies wird genutzt bei vorhandenen Folgen mit "hoch k ", also z.B. bei der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$$

Wir bilden dazu $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und wenn dieser Limes dann kleiner als 1 ist, konvergiert die Reihe. Bei größer als 1 divergiert die Reihe! Sehen wir uns die Sache mal an:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{k^3}{3^k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{k^3}}{\sqrt[k]{3^k}} = \frac{1}{3} < 1,$$

also Reihe konvergent.

Selbstrechnen: Prüfe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^7}{5^k}$ auf Konvergenz!

Lösung: $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{k^7}{5^k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k^7}{5^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{k^7}}{\sqrt[k]{5^k}} = \frac{1}{5} < 1$. Konvergent!

Quotientenkriterium: Dies wird genutzt bei Folgen, wo man zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder gut durcheinander dividieren kann, also z.B. bei der Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$$

Wir bilden dazu $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ und wenn dieser Limes dann kleiner als 1 ist, konvergiert die Reihe. Bei größer als 1 divergiert die Reihe! Sehen wir uns die Sache mal an:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2^k}}{\frac{1}{2^{k-1}}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{2^{k-1}}{1} = \frac{1}{2} < 1, \text{ also Reihe konvergent.}$$

Selbstrechnen: Prüfe $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{3^k}$ auf Konvergenz!

Lösung:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2}{3^{k+1}}}{\frac{2}{3^k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{2} = \frac{1}{3} < 1, \text{ also Reihe konvergent.}$$

Manchmal wundert man sich ja in der Mathematik, wie man durch verrückte Ideen auf einmal tolle Ergebnisse bekommt... so auch hier: Wir legen nämlich noch einen drauf und packen zu der Folge auch noch x^k mit dazu in die Reihe... also

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \quad (\text{Potenzreihe})$$

Dadurch kann man dann erstaunlicherweise fast alle bekannten Funktionen als **Potenzreihen** darstellen... wie z.B.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot (x-1)^k$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Man muss natürlich aufpassen, für welche x genau die Reihen auch wirklich konvergieren (**Konvergenzradius**). ;-)

Übrigens: Hier tauchen oft **Fakultäten** auf.

Dazu: Es ist z.B.

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

und mit ein wenig Überlegung findet man heraus, dass gilt:

$$k! = k \cdot (k - 1)!$$

Selbstrechnen: Was ist $\frac{6!}{4!}$?

$$\text{Lösung: } \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 = 30.$$

Mit Potenzreihen kann man dann auch sehr leicht viele Eigenschaften der dargestellten Funktionen herleiten.

Wie z.B. eine Sache, die Ihr schon längst in der Schule benutzt:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

Fazit: Manchmal muss man in der Mathematik erst unglaublich komplizierte Sachen ausprobieren (eigentlich total verrückte Ideen), um dadurch dann (mit etwas Glück) genial einfache und tolle Ergebnisse zu bekommen!

Danke für Eure Aufmerksamkeit !