TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Dr. Agnes Lamacz-Keymling

Lösungen der Übungsblätter 11-13

Blatt 11

Aufgabe 1)

a) $f'(x) = 2^x \ln(2)$

b) $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

c) $f(x) = x^{(x^x)} = \exp(x^x \ln x)$. Es folgt

$$f'(x) = x^{(x^x)} \left(x^x(\ln x + 1) \cdot \ln x + x^{x-1}\right)$$

d) $f(x) = (x^x)^x = x^{x^2} = \exp(x^2 \ln x)$. Für die Ableitung folgt daher

$$f'(x) = x^{x^2} \cdot (2x \ln x + x) = x^{x^2+1}(2 \ln x + 1).$$

Aufgabe 2)

a) Es gilt

$$2^{3x} = 4^{1-x} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{2(1-x)} \Leftrightarrow 3x = 2(1-x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$$

b) Anwendung der ln-Funktion auf beiden Seiten der Gleichung liefert

$$\begin{aligned} 2^{3x} = 3 \cdot 4^{1+x} &\Leftrightarrow \ln(2^{3x}) = \ln(3 \cdot 4^{1+x}) \Leftrightarrow (3x) \cdot \ln 2 = \ln 3 + (1+x) \ln 4 \\ &\Leftrightarrow x(3 \ln 2 - \ln 4) = \ln 3 + \ln 4 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln 3 + \ln 4}{3 \ln 2 - \ln 4} = \frac{\ln 3 + 2 \ln 2}{3 \ln 2 - 2 \ln 2} = \frac{\ln 3 + 2 \ln 2}{\ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} + 2 \end{aligned}$$

c) Anwendung der ln-Funktion auf beiden Seiten der Gleichung liefert

$$\begin{aligned} 2^{5x-1} = 7^{3x+2} &\Leftrightarrow (5x-1) \ln 2 = (3x+2) \ln 7 \Leftrightarrow x(5 \ln 2 - 3 \ln 7) = \ln 2 + 2 \ln 7 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2 + 2 \ln 7}{5 \ln 2 - 3 \ln 7} \end{aligned}$$

Aufgabe 3)

Aufgabe 4)

a) $\vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{d}$.

b) Nicht möglich.

c) $\vec{a} = \frac{1}{2}(t+1)\vec{b} + (3-2t)\vec{c} + t\vec{d}$, wobei $t \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden darf.

Aufgabe 5)

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{CB} = -\vec{b}, \quad \overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}.$$

Blatt 12

Aufgabe 1)

a) Die Vektoren sind linear abhängig, da $0 \cdot (3, \sqrt{7}, -5) + \beta \cdot (0,0,0)^T = \vec{0}$ für jedes $\beta \in \mathbb{R}$, insbesondere auch jedes $\beta \neq 0$.

b) Die Vektoren sind linear unabhängig, da aus $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 4 = 0$ und $\alpha \cdot 2 + \beta \cdot 5 = 0$ folgt, dass $\alpha = \beta = 0$.

c) Die Vektoren sind für $t = \pm 2$ linear abhängig und für $t \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$ linear unabhängig.

Aufgabe 2)

a) $\|\vec{u}\| = 5$ und $\|\vec{v}\| = 3$.

b) Abstand zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

c) $\cos\psi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{14}{15}$ und damit $\psi = \arccos(\frac{14}{15})$.

d) Der Vektor $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$.

e) Beispielsweise $\vec{a} = (0,1,0)^T$ und $\vec{b} = \vec{u} \times \vec{a} = (-3,0,4)^T$

f) Ebene durch den Ursprung mit Normalenvektor $\vec{v}$.

Aufgabe 3)

Linke Seite: Wegen $\vec{a} \times \vec{b} = (-s,0,0)^T$ gilt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = -s(c_2 \cdot d_3 - c_3 \cdot d_2) = s(c_3 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_3)$$

Rechte Seite:

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}) = c_3(s \cdot d_2 + t \cdot d_3) - (s \cdot c_2 + t \cdot c_3) \cdot d_3 = s(c_3 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_3)$$

Die beiden Seiten stimmen also überein.

Aufgabe 4)

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ beliebig.

b) Unlösbar, da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 5)

a) $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = 3\sqrt{19}$

b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist $\frac{1}{2}\cdot$ Flächeninhalt des von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannten Parallelogramms. Mit $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-8, 14, -8)^T$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, 7-5)^T$ sowie $\vec{v} \times \vec{w} = (-14, -32, -42)^T$ ergibt sich ein Dreiecks-Flächeninhalt von

$$\frac{1}{2}\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-14)^2 + (-32)^2 + (-42)^2} \approx 27.313$$

Blatt 13

Aufgabe 1)

a) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}: \ y \geq x$

b $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}: \ y < x$

c) $\exists m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}: n^2 \neq m$

d) $\exists a, b \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N}: \ a > x \ \vee \ b < x$

e) $\exists x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 2 : x^2 \leq 4$

f) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ \frac{x}{n} \geq 1$

g) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x \in \mathbb{R} : 2^{|x|} < n$

Aufgabe 2)

a) Die Aussage stimmt, denn: Sei $x \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Ist $x \in \mathbb{N}$, so wurde die Aussage bereits in der Vorlesung bewiesen. Für $x = 0$ stimmt die Aussage ebenfalls, da $0^2 = 0$

b) die Aussage stimmt, denn: Sei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig.

1. Fall: $x \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $x^2 \geq x$ nach a).
2. Fall: $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$. Dann gilt insbesondere $x < 0$ und da $x^2 \geq 0$, folgt $x \leq x^2$.

c) Die Aussage ist falsch, denn $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, aber $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x$

d) Die Aussage ist falsch, betrachte wieder $x = \frac{1}{2}$.

e) Die Aussage ist richtig, denn für beliebiges $x \in \mathbb{Q}$ ist die Aussage $2 < 3$ wahr.

f) Die Aussage ist richtig, denn: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Für $x = 0$ ist die Aussage offensichtlich richtig $(0 < 1)$. Für $x \neq 0$ ist $x^2 + 1 = |x^2 + 1| > 0$ und damit

$$\left| \frac{x}{x^2+1} \right| < 1 \ \Leftrightarrow \ |x| < x^2 + 1 \ \Leftrightarrow \ -|x| < x^2 + 1 - 2|x| \ \Leftrightarrow \ -|x| < (|x| - 1)^2$$

Da $x \neq 0$, gilt $-|x| < 0$ und $(|x| - 1)^2 \geq 0$, also tatsächlich $-|x| < (|x| - 1)^2$.

Aufgabe 3)

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: \ y < x$. Negation: $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}: \ y \geq x$.

Die Aussage stimmt, denn: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $y = x - 1$. Dann gilt $y = x - 1 < x$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: \ y > x$. Negation: $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}: \ y \leq x$.

Die Aussage stimmt, denn: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $y = x + 1$. Dann gilt $x < x + 1 = y$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}:\ m > n$. Negation: $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}:\ m \leq n$.

Die Aussage stimmt, denn: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $m = n + 1$. Dann gilt $m \in \mathbb{N}$ und $m = n + 1 > n$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}:\ m < n$. Negation $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} : m \geq n$.

Die Negation ist richtig. Wähle $n = 1$. Dann gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$ auch $m \geq 1$ und damit $m \geq n$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}:\ m \leq n$. Negation: $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}:\ m > n$.

Die Aussage stimmt, denn: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $m = 1$. Da $n \in \mathbb{N}$, ist auch $n \geq 1$ und damit $m \leq n$.

Aufgabe 4)

a) $\frac{x}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{x}{2} = n \Leftrightarrow x = 2n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $x \in \mathbb{N}$.

Die umgekehrte Folgerung gilt nicht, betrachte $x = 1$ als Gegenbeispiel.

b) $x \in \{1, 4\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

Beweis: Wir überprüfen die Aussage $x^2 - 5x + 4 = 0$ für jedes $x \in \{1, 4\}$ einzeln:
$x = 1$: dann ist $x^2 - 5x + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$.
$x = 4$: dann ist $x^2 - 5x + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$.

Die Umgekehrte Folgerung ist auch richtig, verwende z.B. die $p - q$ -Formel.

c) $0 < x < 2 \Rightarrow x^2 < 5$.

Beweis: Sei x mit $0 < x < 2$ beliebig. Da die Funktion $f : [, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ streng monoton wachsend ist (siehe Vorlesung), gilt $x^2 = f(x) < f(2) = 4 < 5$.

Die umgekehrte Folgerung gilt nicht, betrachte z.B. $x = 2$ mit $x^2 = 4 < 5$.

Aufgabe 5)

Die Aussage

$$\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 < 4 \wedge x^3 > 8$$

ist falsch.
Beweis: Wir beweisen die Negation $\forall x \in \mathbb{R}:\ x^2 \geq 4\ \vee\ x^3 \leq 8$. Sei also $x \in \mathbb{R}$ beliebig.
1. Fall: $x \in (-2, 2)$, also $x^2 < 4$. Dann folgt auch $x^3 < 2^3 = 8$.
2. Fall: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. Dann gilt $x^2 \geq 2$.