Aufgabe: Finde alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{3-x} > 1$.

Lsg **1. Fall**: $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$:

$$\frac{1}{3-x} > 1 \overset{3-x>0}{\Leftrightarrow} 1 > 3 - x \Leftrightarrow x > 3-1 \Leftrightarrow x > 2$$

Lösungsmenge $\mathbb{L}_1$ in diesem Fall: $\mathbb{L}_1 = (2,3)$

2. Fall: $3 - x < 0 \Leftrightarrow x > 3$. In diesem Fall ist $\frac{1}{\underbrace{3-x}_{<0}} < 0$, also $\frac{1}{3-x} < 1$.

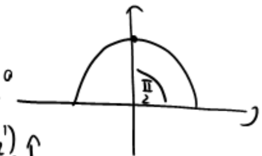
$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \emptyset$

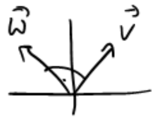
Alternativ: $\frac{1}{3-x} > 1 \overset{3-x<0}{\Leftrightarrow} 1 < 3 - x \Leftrightarrow x < 2$

Insgesamt: $x \in \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (2,3)$

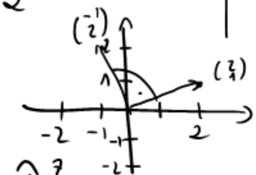
zu Satz 12.2

3. $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \overset{\|\vec{v}\|, \|\vec{w}\| \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90°$



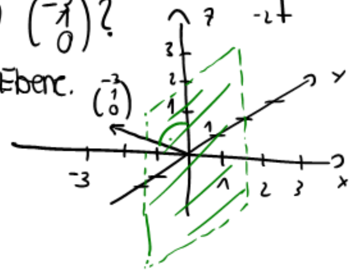


Bsp: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$

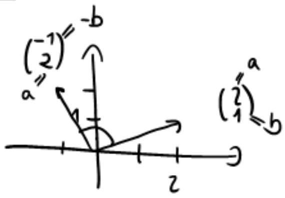


Frage: Welche Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ stehen senkrecht auf $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$?

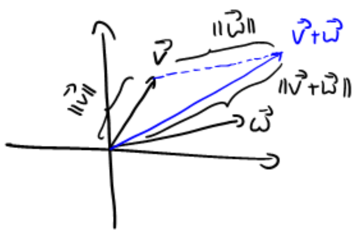
Antwort: Alle $\vec{v} \in \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ ← Ebene.



4.



zu 12.3



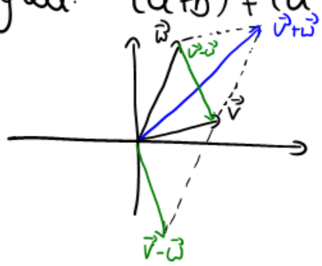
Bsp: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$\|\vec{v} - \vec{w}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$

$\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| - \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1 - 1 = 0$

Satz 12.4

Analog zu: $(a+b)^2 + (a-b)^2 = (a^2 + \cancel{2ab} + b^2) + (a^2 - \cancel{2ab} + b^2) = 2a^2 + 2b^2$



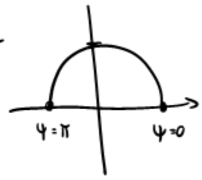
Bsp zu 12.5: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

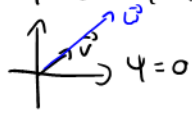
Beobachtung:

- $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$
- $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = -12 + 30 - 18 = 0$

zu 12.6

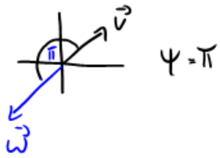
3./4. $\vec{v} \times \vec{\omega} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{v} \times \vec{\omega}\| = 0 \overset{\|\vec{v}\|, \|\vec{\omega}\| \neq 0}{\Rightarrow} \sin \psi = 0 \overset{\psi \in [0,\pi]}{\Leftrightarrow} \psi = 0 \vee \psi = \pi$



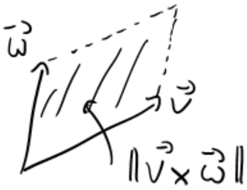


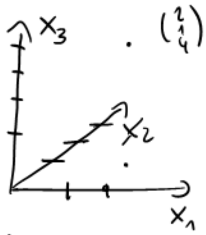
Es gilt: $\psi = 0 \Leftrightarrow \vec{v}, \vec{\omega}$ zeigen in die gleiche Richtung

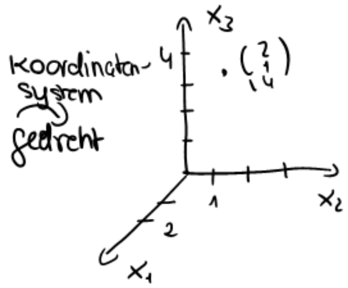
$\psi = \pi \Leftrightarrow \vec{v}, \vec{\omega}$ " " genau entgegengesetzte Richtungen



6.







Bsp zu 13.1

- $G = \mathbb{N}$. A ist die Aussageform, die jedem $x \in \mathbb{N}$ die Aussage "$\frac{2}{x} \in \mathbb{Q}$" zuordnet.

  Besonderheit: Die Aussage "$\frac{2}{x} \in \mathbb{Q}$" ist für jedes $x \in \mathbb{N}$ richtig/wahr

- $G = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$. A ist die Aussageform, die jedem $(x,y) \in G$ die Aussage "$x < y$" zuordnet.

  $A((1,2))$ ist wahr, da $1<2$

  $A((3,3))$ ist falsch, da $3 \not< 3$

Bsp zu 13.2

- $G = \mathbb{R}$, $A(x)$ die Aussage $x < x+1$. Dann ist die Aussage

  $\forall x \in \mathbb{R}: x < x+1$ wahr.

  $\exists x \in \mathbb{R}: x < x+1$ wahr.

- $G = \mathbb{R}$, $A(x)$ die Aussage $x^2 = 4$. Dann ist die Aussage

  $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 4$ wahr (nämlich $x = 2 \vee x = -2$)

  $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 = 4$ falsch (für $x = 1$ z.B. gilt $x^2 = 1 \neq 4$)

Bsp zu 13.3

- "$x^2 = 4$" ist für $G = \mathbb{R}$ erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.
- "$x < x+1$" ist für $G = \mathbb{R}$ allgemeingültig, aber auch erfüllbar
- "$x = x+1$" ist für $G = \mathbb{R}$ ist nicht erfüllbar und auch nicht allgemeingültig.
- "$x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$" ist für $G = \mathbb{R}$ erfüllbar (für $x = 3$ gilt tatsächlich $3^2 > 4 \Rightarrow 3 > 2$), aber nicht allgemeingültig, denn für $x = -3$ gilt $\underbrace{(-3)^2}_{=9} > 4$, aber $-3 \not> 2$.

Bsp zu den Sprechweisen

$\exists!\ x \in \mathbb{N}: x^2 = 4$ ist wahr (nämlich $x = 2$)