Aufgabe: Finde $x, y \in \mathbb{R}$ so, dass $(2^x)^y = 4$ und $2^{-x} = 64$

Lsg: Wegen $2^6 = 64 \overset{(*)}{\Rightarrow} -x = 6 \Leftrightarrow x = -6$

Mit $x = -6$ und der ersten Gleichung folgt

$$(2^{-6})^y = 4 \Leftrightarrow 2^{-6 \cdot y} = \underset{2^2}{\underset{\shortparallel}{4}} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} -6 \cdot y = 2 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Insgesamt: $x = -6,\ y = -\frac{1}{3}$

Begründung zu (*): Die Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto 2^y$ ist streng mon. wachsend, d.h. zu jedem Wert $z \in \mathbb{R}$ gibt es höchstens ein $y \in \mathbb{R}$ mit $2^y = z$.

Strenge Monotonie: $f'(y) = (2^y)' = (\exp(y \ln 2))' = \underbrace{2^y}_{>0} \cdot \underbrace{\ln 2}_{>0} > 0$

zu 13.4:

- $\exists x \in \mathbb{Z}: \quad x > 2 \land x \leq 4$ ist wahr (z.B. $x = 3$, oder $x = 4$)

$$\neg(\exists x \in \mathbb{Z}: x > 2 \land x \leq 4) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}: \neg(x > 2 \land x \leq 4)$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}: (x \leq 2 \lor x > 4) \quad \text{ist falsch}$$

- $\neg(\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 4 \Rightarrow x > 2) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \neg(x^2 > 4 \Rightarrow x > 2)$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: x^2 > 4 \land \underbrace{\neg(x > 2)}_{\Leftrightarrow x \leq 2}$$

Bsp: $\forall x \in \mathbb{R}: \forall y \in \mathbb{R}: \quad x + y = y + x$ ist wahr

$$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R}: \quad x + y = y + x$$
$$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}: x + y = y + x$$
$$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}: x + y = y + x$$

Bsp zu mehreren Quantoren:

$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: n > x$ ist wahr (z.B. $x = 0$, denn $\forall n \in \mathbb{N}: n > 0$)

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}: n > x$ ist wahr (z.B. $x = 0$, oder alternativ $x = n-1$)

- $\neg(\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}: n > x) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \neg(\forall x \in \mathbb{R}: n > x)$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}: \neg(n > x)$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}: n \leq x$$

ist wahr (wähle zu $n \in \mathbb{N}$ beliebig $x = n+1$)

zu 14.2

Achtung: Es reicht nicht „ein paar" $n \in \mathbb{N}$ durchzuprobieren

Bsp: Behauptung: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 2|x| - 1$

Bew: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

1 Fall: $x \geq 0$. Dann gilt $|x| = x$, also

$$x^2 \geq 2|x| - 1 \iff x^2 \geq 2x - 1 \iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff \underbrace{(x-1)^2 \geq 0}_{\text{wahr, da Quadrate immer} \geq 0 \text{ sind.}}$$

2 Fall: $x < 0$. Dann gilt $|x| = -x$, also

$$x^2 \geq 2|x| - 1 \iff x^2 \geq -2x - 1 \iff x^2 + 2x + 1 \geq 0 \iff \underbrace{(x+1)^2 \geq 0}_{\text{wahr, da Quadrate immer} \geq 0 \text{ sind.}}$$

Bsp: Aussage: $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N}_0 : x^2 \geq n$

Bew: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $n = 0$. Dann gilt $n \in \mathbb{N}_0$ und $x^2 \geq \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{0}$, da Quadrate immer ≥ 0. $\square$