Aufgabe: Bestimme $p, q \in \mathbb{R}$ so, dass $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ hat.

Lsg: $x_1 = 2$ ist Lsg $\Rightarrow \quad 4 + p \cdot 2 + q = 0 \iff 2p + q = -4 \quad \text{I}$

$x_2 = 4$ ist Lsg $\Rightarrow \quad 16 + p \cdot 4 + q = 0 \iff 4p + q = -16 \quad \text{II}$

I − II: $\quad 2p + q - (4p + q) = -4 - (-16)$

$\iff -2p = 12 \iff p = -6$

I und $p = -6$: $\quad \underbrace{2 \cdot (-6)}_{-12} + q = -4 \iff q = -4 + 12 = 8$

Aussage: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\underbrace{10 \text{ teilt } n}_{A} \Rightarrow \underbrace{5 \text{ teilt } n}_{B}$

$\neg B \Rightarrow \neg A \iff \underbrace{5 \text{ teilt nicht } n}_{\neg B} \Rightarrow \underbrace{10 \text{ teilt nicht } n}_{\neg A}$

Aussage: $\underbrace{(p \text{ prim und } p > 2)}_{A} \Rightarrow \underbrace{p \text{ ungerade}}_{B}$

$\neg B \Rightarrow \neg A \iff \underbrace{p \text{ gerade}}_{\neg B} \Rightarrow \underbrace{(p \text{ nicht prim oder } p \leq 2)}_{\neg A}$

Aussage: $\underbrace{a^2 = 2}_{A} \Rightarrow \underbrace{a \notin \mathbb{Q}}_{B}$

$\neg B \iff a \in \mathbb{Q}$, $\quad A \iff a^2 = 2$, also $\neg B \wedge A \iff a^2 = 2$ und $a \in \mathbb{Q}$

$a = \frac{p}{q} \Rightarrow \underbrace{a^2}_{=2} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$

Bch: Die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen ist unendlich

Bew (per Widerspruch). Angenommen, es gäbe endlich viele Primzahlen, d.h.

$$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_r\} \text{ für ein } r \in \mathbb{N}.$$

Definiere

$$n := (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r) + 1.$$

Dann ist n durch keines der p_i, $i = 1, \dots, r$ teilbar, also ist n prim $\lightning$ zu $n \notin \mathbb{P}$