Kapitel 14 – Beweisführung

Regel 14.1 (Beweis von Aussagen mit einem Existenzquantor)

Eine Existenzaussage $\exists x \in G : A(x)$ *kann man beweisen, indem man ein konkretes* $x \in G$ *angibt, so dass* $A(x)$ *wahr ist.*

Der Beweis beginnt dann üblicherweise so: "Wähle $x =$*..."*

Beispiele:

- Aussage: $\exists n \in \mathbb{N} : n < 4$.

  Beweis: Wähle $n = 2$. Dann ist $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $n < 4$.

- Aussage: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 4 = 0$.
  Ein passendes x ist hier nicht offensichtlich. Es lässt sich aber durch Anwendung der p-q-Formel als $x = -4$ oder $x = -1$ ermitteln.

  Beweis: Wähle $x = -1$. Dann ist

$$x^2 + 5x + 4 = (-1)^2 + 5(-1) + 4 = 1 - 5 + 4 = 0.$$

Regel 14.2 (Beweis von Aussagen mit einem Allquantor)

Eine Allaussage $\forall x \in G : A(x)$ *kann man beweisen, indem für einen beliebigen Wert* x *aus* G *nachweist, dass* $A(x)$ *wahr ist.*

Der Beweis beginnt dann üblicherweise so: "Sei $x \in G$ *beliebig ..."*

Beispiel:

- Aussage: $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$.

  Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

  $$n^2 \geq n \Leftrightarrow n^2 - n \geq 0 \Leftrightarrow n(n-1) \geq 0.$$

  Wegen $n \in \mathbb{N}$ folgt $n \geq 1$. Somit sind beide Faktoren, n und $n-1$ und damit auch das Produkt nichtnegativ.

14. Beweise von Aussagen mit zwei Quantoren

Beispiele:

1. Aussage: $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} : \ y < x$.

   Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $y = x - 1$. Dann ist $y \in \mathbb{R}$ und es gilt tatsächlich

   $$y = x - 1 < x.$$

   Bemerkung: Die Wahl von y hängt von dem vorgegebenen x ab!

2. Aussage: $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : \ x \leq n$.

   Beweis: Wähle $x = -1$. Ist dann $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so folgt aus $n \geq 1$ die Ungleichung

   $$x = -1 < 1 \leq n,$$

   also insbesondere $x \leq n$.

14. Indirekter Beweis und Widerspruchsbeweis

Für Aussagen A und B gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge A)$$

Um die Aussage $A \Rightarrow B$ zu beweisen, kann man gleichwertig...

1. ... $\neg B \Rightarrow \neg A$ nachweisen. Man nimmt dann an, dass B nicht richtig wäre und versucht daraus abzuleiten, dass auch A falsch ist. Diese Beweisform heißt INDIREKT oder Beweis durch KONTRAPOSITION.
2. ... $\neg(\neg B \wedge A)$ nachweisen. Man nimmt dann an, dass B nicht richtig und A richtig ist, um dies zu einem Widerspruch zu einer dieser beiden Annahmen zu führen. Diese Beweisform heißt WIDERSPRUCHSBEWEIS.

Bemerkung: Hat man den Beweis einer aussage A und nicht einer Implikation $A \Rightarrow B$ zu erbringen, so kann man $\neg A$ annehmen, um dies zu einem Widerspruch zu führen. Auch dies ist ein WIDERSPRUCHSBEWEIS.

14. Beispiele für Beweisformen

1. DIREKT Aussage: $\forall n \in \mathbb{N}: 10$ teilt $n \Rightarrow 5$ teilt n.

   Beweis: Sei 10 ein Teiler von n. Dann ist $m := \frac{n}{10} \in \mathbb{N}$ und es folgt

   $$n = 10m = 5 \cdot (2m) \Rightarrow \frac{n}{5} = 2m \in \mathbb{N}.$$

   Damit ist auch 5 ein Teiler von n.

2. INDIREKT Aussage: (p Primzahl und $p > 2$) $\Rightarrow p$ ungerade.

   Beweis: Sei p gerade, d.h. 2 teilt p. Dann ist p keine Primzahl oder $p = 2$. Also ist die Negation der Aussage (p Primzahl und $p > 2$) richtig.

3. WIDERSPRUCH Aussage: $a^2 = 2 \Rightarrow a \notin \mathbb{Q}$.

   Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$. Dann hat a die Darstellung $a = \frac{p}{q}$, wobei man $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd wählen kann. Da $p^2 = 2q^2$, ist p^2 und damit auch p gerade. Daher ist p^2 durch 4 teilbar. Es folgt, dass q ebenfalls gerade ist.

   Das ist ein Widerspruch dazu, dass p und q teilerfremd sind.

Oft will man in der Mathematik bestimmte Aussagen widerlegen. Dies geschieht oft durch Angabe eines GEGENBEISPIELS.

Beispiel 14.3 (Widerlegen von Aussagen durch ein Gegenbeispiel)

1. **Aussage:** *Jede ganze Zahl ist gerade.*
   Die Aussage ist falsch, denn 3 *ist eine ganze Zahl, aber nicht gerade.*
2. **Aussage:** $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$.
   Die Aussage ist falsch, denn für $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ *gilt* $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x$.
3. **Aussage:** $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n^2 + n + 41$ *ist eine Primzahl.*
   Die Aussage ist falsch, denn für $n = 41$ *gilt*

   $$n^2 + n + 41 = 41 \cdot 41 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43.$$

   Damit ist $n^2 + n + 41$ *für* $n = 41$ *keine Primzahl.*