Kapitel 15 – Lesen mathematischer Texte

Mathebücher liest man nicht in Seiten pro Stunde,
sondern in Stunden pro Seite.

Generelle Tipps:

- **Nehmen Sie sich Zeit!**
  Stellen Sie sich darauf ein, dass es lange dauert, eine Seite zu verstehen und es dazu meist mehr als nur einen Anlauf benötigt. Mathe braucht Zeit, um im Kopf zu reifen.
- **Stellen Sie sich selbst und anderen präzise Fragen.**
  Keine Frage: Ich verstehe Definition 10.4 nicht.
  Nicht präzise Frage: Wie ist Definition 10.4 zu verstehen?
  Präzise Frage: Warum existiert in Definition 10.4 der Exponentialfunktion eine Umkehrfunktion des Logarithmus?

nach "Wie liest man mathematische Texte" von Prof. Dr. Petra Schwer

- **Sprechen Sie mit anderen über das Material.**
  Versuchen Sie dabei, sich so genau wie möglich auszudrücken und Fachvokabular zu verwenden. Oft stellt man erst im Gespräch mit anderen fest, ob man etwas verstanden hat oder nicht.
- **Lesen ist auch Schreiben.**
  - Schreiben Sie sich selbst Zusammenfassungen für die einzelnen Themen.
  - Schreiben Sie alle Details zu den vorhandenen Beispielen auf. Diese sind in Büchern/Skripten oft knapp gehalten. Führen Sie alle Argumente detailliert aus.
  - Überlegen Sie sich selbst neue Beispiele und schreiben Sie diese auf.
- **Dranbleiben und Weitermachen.**
  Geben Sie nicht sofort auf, wenn Sie eine Zeile nicht verstehen. Wenn Sie etwas wirklich nicht verstehen, lesen Sie weiter (um später an die Stelle zurückzukommen). Manchmal wird der Sachverhalt durch eine weitere Erklärung weiter unten im Text klar.

nach "Wie liest man mathematische Texte" von Prof. Dr. Petra Schwer

15. Beispiel eines mathematischen Textes

Definition: Gegeben sei eine beliebige Menge M. Die Menge $\mathcal{P}(M)$, definiert durch

$$\mathcal{P}(M) := \{A \,|\, A \subset M\} \tag{1}$$

heißt $\textsc{Potenzmenge}$ von M.

Beispiel: Für $M := \{\text{BVB}, \text{S04}\}$ gilt

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{\text{BVB}\}, \{\text{S04}\}, \{\text{BVB}, \text{S04}\}\}$$

Bemerkung: Die Menge $\mathcal{P}(M)$ ist niemals leer.

Satz: Für beliebige Mengen M, N gilt:

$$M \subset N \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}(N) \tag{2}$$

Beweis: $<$ ... $>$

Aufgabe: Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathcal{P}(M) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$.

15. Eigenschaften mathematischer Texte

1. Mischung aus gewöhnlicher Sprache und Formeln.
2. Verschiedene Textelemente:
   - Hervorhebungen, z.B. Fettdruck, Kursivschrift, Kapitalschrift.
   - abgesetzte Formeln.
   - abgesetzte Bereiche, z.B. Definition, Beispiel, Bemerkung, Satz, Aufgabe.
3. Hohe Informationsdichte:
   - viele Informationen pro Satz.
   - wenige Füllwörter und Wiederholungen.
   - Symbole mit Informationsgehalt.

Konsequenz: Einen mathematischen Text kann man nicht querlesen! Das Weglassen einzelner Wörter oder Symbole kann die Bedeutung des Textes völlig verfälschen.

Ein mathematischer Text lässt sich in mehreren Schritten erarbeiten.

Schritt 1: Überblick verschaffen.

- Worum geht es in dem Text? In welche Abschnitte/Textelemente ist dieser gegliedert?
- Welcher Teil sieht besonders schwierig aus und warum?
- Welche Definitionen, Konzepte, Aussagen sind wesentlich? Gibt es Beispiele?
- Was weiß ich schon über das Thema? Kommt mir in dem Text etwas bekannt vor?

In unserem Fall: Es wird der Begriff der POTENZMENGE samt Beispiel eingeführt. Es gibt einen Satz, der etwas über die Beziehung der Potenzmengen zweier Mengen M und N aussagt. Definition und Beispiel sehen nicht so schwer aus, der Satz scheint etwas komplizierter und die Aufgabe schwierig, da das Symbol $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ auftaucht, dessen Bedeutung einem so gar nicht klar ist. Wir haben bereits Mengen und Mengenrelationen behandelt, die leere Menge $\emptyset$ und das $\subset$-Zeichen sind uns bekannt.

Schritt 2: Definitionen und Aussagen verstehen.

- Definitionen lesen.
  - Handelt es sich bei der Definition um eine zusätzliche Eigenschaft eines bekannten Objekts oder wird ein ganz neues Objekt eingeführt?
  - Warum ist der neue Begriff wohldefiniert?
  - Wofür braucht man den neuen Begriff? (Das ist manchmal schwer auf Anhieb zu verstehen.)

Definition: Gegeben sei eine beliebige Menge M. Die Menge $\mathcal{P}(M)$, definiert durch

$$\mathcal{P}(M) := \{A \,|\, A \subset M\} \tag{1}$$

heißt $\textsc{Potenzmenge}$ von M.

Es handelt sich um die Definition eines neuen Objekts. Der Begriff ist wohldefiniert, da für eine gegebene Menge M der Begriff einer Teilmenge $A \subset M$ bereits bekannt und wohldefiniert ist. Die Potenzmenge ist also diejenige Menge, die alle Teilmengen von M als Elemente enthält.

- Beispiele verstehen und generieren.
  - Kann ich die gegebenen Beispiele verstehen und die eventuell vorhandenen argumentativen Lücken selbst füllen?
  - Kann ich ein neues Beispiel generieren?
  - Was ist ein Nicht-Beispiel, also ein Objekt, das so ähnlich aussieht, aber die Bedingungen nicht oder nicht alle erfüllt?

Beispiel: Für $M := \{\text{BVB}, \text{S04}\}$ gilt

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{\text{BVB}\}, \{\text{S04}\}, \{\text{BVB}, \text{S04}\}\}$$

- vorhandenes Beispiel: $\emptyset, \{\text{BVB}\}, \{\text{S04}\}, \{\text{BVB}, \text{S04}\}$ sind offensichtlich Teilmengen von M. Aber: Sind es auch alle?
- neues Beispiel: Für $M = \{5, 6, 7\}$ können Teilmengen nur $0, 1, 2$ oder 3 Elemente enthalten. Wir folgern

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{5, 6, 7\}\}$$

- Nicht-Beispiel: $\{\{1\}, \{2\}\}$ kann nicht Potenzmenge eine Menge M sein, denn dann wäre $1, 2 \in M$ und damit $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(M)$.

- Sätze lesen.
  - Verstehe ich die Aussage? Welcher Teil gehört zur Voraussetzung und welcher zur Folgerung?
  - Was sind Beispiele für diese Aussage?
  - Was passiert, wenn ein Objekt eine oder mehrere Voraussetzungen nicht erfüllt?
  - Wie passt die Aussage in den restlichen Kontext?

Satz: Für beliebige Mengen M, N gilt:

$$M \subset N \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}(N) \tag{2}$$

- Die Voraussetzung ist, dass M, N zwei Mengen mit $M \subset N$ sind. Die Folgerung ist, dass $\mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}(N)$.
- Beispiel: Für $M := \{1\}$ und $N := \{1, 2\}$ gilt $M \subset N$ und

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}\} \subset \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} = \mathcal{P}(N)$$

- Kontext: Wir kennen bereits Mengen, Mengenrelationen und eine neue Menge, die Potenzmenge. Der Satz besagt, dass sich die Teilmengeneigenschaft auf Potenzmengen überträgt.

Schritt 3: Übungsaufgaben lösen.

- Verstehen Sie zunächst die Aufgabenstellung.
- Reden Sie über die Aufgaben.
- Die Bearbeitung einer Aufgabe ist nicht fertig, wenn Sie die Idee der Lösung im Kopf haben. Mathematik sauber aufzuschreiben, ist ein separater Schritt, der manchmal schwieriger sein kann als die eigentliche Lösungsidee zu entwickeln.
- Erklären Sie die Lösung anderen.

Aufgabe: Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathcal{P}(M) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$.

Zuerst zu klären: Was ist $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$?

Antwort: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ ist die Potenzmenge der Potenzmenge von M, d.h.

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) = \{A \,|\, A \subset \mathcal{P}(M)\}.$$

Die Aufgabe ist also gelöst, wenn wir klären können, ob $\mathcal{P}(M) \subset \mathcal{P}(M)$.
Das stimmt natürlich, da jede Menge eine Teilmenge von sich selbst ist.