

Kapitel 4 – Ordnung und Betrag

Definition 4.1 (Ordnung)

Jede reelle Zahl x hat genau eine der folgenden drei Eigenschaften:

- *x ist negativ: $x < 0$,*
- *x ist gleich Null: $x = 0$,*
- *x ist positiv: $x > 0$.*

Wir definieren...

- *... $x > y$ durch $x - y > 0$,*
- *... $x \geq y$ durch $x - y > 0$ oder $x - y = 0$*

Analog werden $x < y$ und $x \leq y$ definiert.

Damit gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ genau eine der drei Relationen:

$$x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } x > y.$$

Die Zeichen $\leq, \geq, <, >$ und $=$ heißen ORDNUNGSZEICHEN.

Mit Hilfe der Ordnungszeichen definieren wir spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$.
Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Definition 4.2 (Intervalle)

Beschränkte Intervalle:

- ABGESCHLOSSENES INTERVALL: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- OFFENES INTERVALL: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- HALBOFFENES INTERVALL: $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- HALBOFFENES INTERVALL: $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Unbeschränkte Intervalle:

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ und $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ und $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

Notation: Manchmal werden offene Grenzen auch mit eckigen Klammern notiert, d.h. $]a, b[$ statt (a, b) , $[a, b[$ statt $[a, b)$ usw.

Satz 4.3 (Rechenregeln)

Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. Ist $x < y$ und $y < z$, dann gilt $x < z$.
2. Ist $x < y$ dann ist $x + z < y + z$.
3. Ist $z > 0$ und $x < y$, so ist $xz < yz$.

Folgerung 4.4

- Es gilt $x = y$ genau dann, wenn $x \leq y$ und $y \leq x$.
- Ist $x > 0$ und $y > 0$, so ist auch $xy > 0$.
- Ist $z < 0$ und $x < y$, so ist $xz > yz$.
- Ist $0 < x < y$, so gilt $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$.
- Ist $0 \leq x < y$, so gilt $x^2 < y^2$.

Satz 4.5 (Vorzeichen von Produkten)

Es seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ ist äquivalent dazu, dass
es mindestens ein $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $x_j = 0$.
2. $\prod_{i=1}^n x_i \geq 0$ ist äquivalent dazu, dass
gar keine oder nur eine gerade Anzahl der Faktoren x_j negativ ist.

Beispiel:

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, die $(x - 3)(x - 5) > 0$ erfüllen.

Fallunterscheidung ($x = 3$ und $x = 5$ ausgeschlossen):

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{x < 3,} & \underbrace{x \in (3, 5),} & \underbrace{x > 5} \\ \text{beide Faktoren } < 0 & \text{ein Faktor } < 0 & \text{beide Faktoren } > 0 \end{array}$$

Lösung: $\{x \in \mathbb{R} \mid (x - 3)(x - 5) > 0\} = (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$.

Definition 4.6 (Betrag)

Der BETRAG $|x|$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert als der Abstand von x zu 0:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x - y|$ der Abstand von x und y .

Der Betrag "löscht" das Vorzeichen von x .

Satz 4.7 (Eigenschaften des Betrags)

1. $|x| = 0$ ist äquivalent zu $x = 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $-|x| \leq x \leq |x|$ mit Gleichheit an genau einer Stelle, wenn $x \neq 0$.
4. $|xy| = |x||y|$.
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
6. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
7. $\sqrt{x^2} = |x|$.

Satz 4.8 (Quadratische Ungleichungen)

Es gilt

$$x^2 + px + q < 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \frac{D}{4},$$

wobei $D = p^2 - 4q$ die Diskriminante ist.

- Falls $D \leq 0$, so hat $x^2 + px + q < 0$ keine Lösung.
- Für $D > 0$ gilt

$$x^2 + px + q < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \right).$$

Für die umgekehrte Ungleichung $x^2 + px + q > 0$ gilt

- Falls $D < 0$, so ist $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q > 0\} = \mathbb{R}$.
- Für $D \geq 0$ gilt:

$$x^2 + px + q > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \right) \cup \left(\frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \infty \right).$$

4. Typische Anfängerfehler

1. Wurzelziehen und Quadrieren wird gegenseitig aufgehoben:

$$\sqrt{(-4)^2} \neq -4, \text{ sondern } \sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4.$$

2. Bei Multiplikation von Ungleichungen mit negativen Zahlen wird das Ordnungszeichen nicht umgedreht:

$$-2x < -8 \not\Leftrightarrow x < 4.$$

3. Ungleichungen werden quadriert:

$$-4 < -2 \not\Leftrightarrow (-4)^2 < (-2)^2.$$

4. Falsche Betragsrechnung:

$$|4 - 6| \neq |4| - |6| \quad \text{und} \quad |x + 6| \neq |x| + |6| \quad (\text{betrachte z.B. } x = -2).$$