

MATHEMATIK VORKURS NAT-ING I – BLATT 12 LÖSUNG

THEMENGEBIET: VEKTOREN

Aufgabe 1)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

- a) Die Vektoren sind linear abhängig, da $0 \cdot (3, \sqrt{7}, -5) + \beta \cdot (0, 0, 0)^T = \vec{0}$ für jedes $\beta \in \mathbb{R}$, insbesondere auch jedes $\beta \neq 0$.
- b) Die Vektoren sind linear unabhängig, da aus $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 4 = 0$ und $\alpha \cdot 2 + \beta \cdot 5 = 0$ folgt, dass $\alpha = \beta = 0$.
- c) Die Vektoren sind für $t = \pm 2$ linear abhängig und für $t \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$ linear unabhängig.

Aufgabe 2)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{u} = (4, 0, 3)^T$ und $\vec{v} = (2, -1, 2)$.

- a) $\|\vec{u}\| = 5$ und $\|\vec{v}\| = 3$.
- b) Abstand zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$.
- c) $\cos \psi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{14}{15}$ und damit $\psi = \arccos(\frac{14}{15})$.
- d) Der Vektor $\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$.
- e) Beispielsweise $\vec{a} = (0, 1, 0)^T$ und $\vec{b} = \vec{u} \times \vec{a} = (-3, 0, 4)^T$
- f) Ebene durch den Ursprung mit Normalenvektor $\vec{v}$.

Aufgabe 3)

Linke Seite: Wegen $\vec{a} \times \vec{b} = (-s, 0, 0)^T$ gilt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = -s(c_2 \cdot d_3 - c_3 \cdot d_2) = s(c_3 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_3)$$

Rechte Seite:

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}) = c_3(s \cdot d_2 + t \cdot d_3) - (s \cdot c_2 + t \cdot c_3) \cdot d_3 = s(c_3 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_3)$$

Die beiden Seiten stimmen also überein.

Aufgabe 4)

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ beliebig.

b) Unlösbar, da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 5)

a) $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = 3\sqrt{19}$

b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist $\frac{1}{2} \cdot$ Flächeninhalt des von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannten Parallelogramms. Mit $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-8, 14, -8)^T$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, 7 - 5)^T$ sowie $\vec{v} \times \vec{w} = (-14, -32, -42)^T$ ergibt sich ein Dreiecks-Flächeninhalt von

$$\frac{1}{2} \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-14)^2 + (-32)^2 + (-42)^2} \approx 27.313$$

Bemerkung: Etwas schwieriger als der Rest sind Aufgaben 1c) und Aufgabe 3.