7. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis II

Abgabetermin: Dienstag, 31.05.2005, 16:00 Uhr

Aufgabe 1:
Sei $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeige: Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ existieren überall (insbesondere in $(0,0)$).

b) Definiere $R(x,y) := F(x,y) - F(0,0) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)y$.
Zeige: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|R(x,y)|}{\|(x,y)\|_2}$ existiert nicht.

c) Zeige: F ist weder stetig noch differenzierbar in $(0,0)$.
Warum widerspricht das nicht Satz 3.10?

Aufgabe 2
Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x\cos^2(yz^2)$
$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (\sin t, t^2, e^t)$

a) Bestimme df und c' und berechne die Ableitung $(f \circ c)'$ mit Hilfe der Kettenregel.

b) Bestimme die Formel von $f \circ c$ und finde die Ableitung $(f \circ c)'$ auf direktem Wege.

Aufgabe 3
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Menge, und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.
Zeige: f ist konstant genau dann, wenn $(\nabla f)_{x_0} = 0$ für alle $x_0 \in U$.