

Darstellungen von $SU(2)$, $SO(3)$, $U(2)$ und $O(3)$

gehalten im Seminar zur Darstellungstheorie kompakter Lie-Gruppen im SS 2010 bei
Herrn Prof. Dr. Schwachhöfer an der TU Dortmund

25.5.2010

Artem Averin

Inhaltsverzeichnis

1	Charaktere	3
2	irreduzible Darstellungen von $SU(2)$, $SO(3)$, $U(2)$ und $O(3)$	4
3	Harmonische Polynome	10

1 Charaktere

Alle Zitate beziehen sich auf das Werk „Theodor Bröcker, Tammo tom Dieck: Representations of Compact Lie Groups, Springer.“

1.1 Definition Sei V eine Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe G . Die Abbildung

$$\chi_V: G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \text{Tr}(l_g)$$

heißt Charakter von V . Hierbei bezeichnet $\text{Tr}(l_g)$ die Spur der Linkstranslation $l_g: V \rightarrow V$.

1.2 Satz Sei V eine Darstellung der kompakten Lie-Gruppe G und χ_V ein Charakter von V . Dann gilt:

- (i) χ_V ist eine C^∞ -Funktion
- (ii) $\chi_V(ghg^{-1}) = \chi_V(h)$ für alle $g, h \in G$
- (iii) Sind V und W irreduzible Darstellungen von G , so gilt

$$\langle \chi_W, \chi_V \rangle = \int_G \chi_W \overline{\chi_V} dg = \begin{cases} 1 & , V \cong W \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (1.1)$$

- (iv) $\int_G \chi_V(g) dg = \dim \{v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G\}$
- (v) Zwei Darstellungen V und W von G sind genau dann isomorph, wenn $\chi_V = \chi_W$.
- (vi) Für zwei Darstellungen V und W von G gilt $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$ und $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$.

Beweis: s. II. 4.

1.3 Bemerkung Satz 1.2 (ii) zeigt, dass der Charakter auf den Konjugationsklassen von G konstant ist. Allgemein bezeichnet man für eine Gruppe G eine solche Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, die auf den Konjugationsklassen von G konstant ist, als *Klassenfunktion*. Charaktere von Darstellungen sind also stets Klassenfunktionen.

2 irreduzible Darstellungen von $SU(2)$, $SO(3)$, $U(2)$ und $O(3)$

Ziel dieses Kapitels ist es, die irreduziblen Darstellungen der in der Überschrift angegebenen kompakten Lie-Gruppen zu beschreiben.

2.1 Darstellungen von $SU(2)$ Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$V_n := \left\{ \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k} \mid a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

der $\mathbb{C}$ -Vektorraum (mit den kanonischen Verknüpfungen) aller homogenen Polynome vom Grad n in den beiden komplexen Variablen z_1 und z_2 . Durch die Operation

$$SU(2) \times V_n \rightarrow V_n, (A, P) \mapsto AP(z_1, z_2) := P((z_1, z_2)A)$$

wird eine Darstellung von $SU(2)$ definiert. Es stellt sich nun die Frage, ob die $SU(2)$ -Darstellungen V_n irreduzibel und ob dies sogar alle irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$ (bis auf Isomorphie) sind? Dies soll im folgenden tatsächlich gezeigt werden.

2.2 Satz Die $SU(2)$ -Darstellungen V_n sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ irreduzibel.

Beweis: Zunächst wird folgende Zwischenbehauptung gezeigt: Ist $A: V_n \rightarrow V_n$ ein $SU(2)$ -äquivarianter Endomorphismus, so gilt $A = \lambda \text{id}_{V_n}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Zum Beweis sei $A: V_n \rightarrow V_n$ linear und äquivariant und $a \in \mathbb{C}$, so dass $|a| = 1$ und a^{2k-n} für $0 \leq k \leq n$ verschieden sind. Weiterhin sei

$$g_a := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Aus der Definition von V_n ist ersichtlich, dass $P_k := z_1^k z_2^{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$ eine Basis von V_n ist. Es gilt $g_a P_k = P_k((z_1, z_2) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}) = P_k(a z_1, a^{-1} z_2) = a^{2k-n} P_k$ für alle $0 \leq k \leq n$. Also ist P_k ein Eigenvektor der Linkstranslation l_{g_a} zum Eigenwert a^{2k-n} . Nach Wahl von a sind die $n+1$ Eigenwerte a^{2k-n} für $0 \leq k \leq n$ alle verschieden und wegen $\dim V_n = n+1$ folgt, dass der Eigenraum zum Eigenwert a^{2k-n} eindimensional und somit von P_k für jedes $0 \leq k \leq n$ aufgespannt wird. Wegen $g_a A P_k = A g_a P_k = a^{2k-n} A P_k$ ist auch $A P_k$ Eigenvektor zum Eigenwert a^{2k-n} , so dass

$$A P_k = c_k P_k \tag{2.1}$$

für gewisse $c_k \in \mathbb{C}$ und alle $0 \leq k \leq n$ gelten muss. Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$r_t := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2).$$

Unter Verwendung von (2.1) folgt:

$$\begin{aligned} Ar_t P_n &= AP_n((z_1, z_2) \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}) \\ &= A(\cos(t)z_1 + \sin(t)z_2)^n \\ &= A \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k(t) \sin^{n-k}(t) z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k(t) \sin^{n-k}(t) AP_k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k(t) \sin^{n-k}(t) c_k P_k \end{aligned}$$

Wegen der $\mathrm{SU}(2)$ -Äquivarianz von A muss dies dasselbe sein wie:

$$r_t AP_n = r_t c_n P_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k(t) \sin^{n-k}(t) c_n P_k$$

Koeffizientenvergleich liefert $c_k = c_n$ für alle $0 \leq k \leq n$ und aus (2.1) dann $A = c_n \mathrm{id}_{V_n}$. Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen. Zum Beweis der Irreduzibilität sei U ein $\mathrm{SU}(2)$ -invarianter Untervektorraum von V_n . Nach Einführung eines $\mathrm{SU}(2)$ -invarianten Skalarprodukts auf V_n , welches wegen der Kompaktheit von $\mathrm{SU}(2)$ existiert, sei $A: V_n \rightarrow V_n$ die orthogonale Projektion auf U . Bekanntlich ist A linear. Es wird gezeigt, dass A auch $\mathrm{SU}(2)$ -äquivariant ist. Es sei dazu $g \in \mathrm{SU}(2)$ und $v \in V_n$. v besitzt eine eindeutige Zerlegung $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in U^\perp$. Dann gilt $Agv = Agu + Agw$ und weil U und somit auch $U^\perp$ $\mathrm{SU}(2)$ -invariant sind, gilt $gu \in U$ und $gw \in U^\perp$ und daher $Agu = gu$ und $Agw = 0$, insgesamt also $Agv = gu$. Andererseits gilt $gAv = gA(u+w) = gu$, woraus $Agv = gAv$ und somit die $\mathrm{SU}(2)$ -Äquivarianz folgt. Nach der Zwischenbehauptung gibt es dann ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $A = \lambda \mathrm{id}_{V_n}$. Weil A die orthogonale Projektion auf U ist, ist entweder $\lambda = 0$ und $U = \{0\}$ oder $\lambda = 1$ und $U = V_n$. Dies zeigt die Irreduzibilität.

2.3 Man rechnet leicht nach, dass die Diagonalmatrizen aus $\mathrm{SU}(2)$ die Gestalt

$$e(t) := \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$$

für ein $t \in \mathbb{R}$ besitzen. Weiterhin ist aus der linearen Algebra bekannt, dass jede Matrix aus $\mathrm{SU}(2)$ konjugiert zu einer Diagonalmatrix und somit zu einem $e(t)$ für geeignetes

$t \in \mathbb{R}$ ist. Nachrechnen bestätigt weiterhin, dass $e(t)$ und $e(s)$ genau dann konjugiert sind, wenn $s \equiv \pm t \pmod{2\pi}$. Die Überlegungen zeigen, dass für eine Klassenfunktion $f: \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathbb{C}$ die Abbildung

$$f \circ e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(e(t))$$

gerade und 2π -periodisch sein muss und umgekehrt, dass eine 2π -periodische und gerade Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Klassenfunktion von $\mathrm{SU}(2)$ wohldefiniert. Im folgenden wird daher der $\mathbb{C}$ -Vektorraum M der stetigen Klassenfunktionen von $\mathrm{SU}(2)$ mit dem der stetigen 2π -periodischen und geraden Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ identifiziert.

Die Charakter χ_{V_n} der Darstellungen V_n liegen gemäß Satz 1.2 in M . Für sie gilt $\chi_{V_n}(e(t)) = \mathrm{Tr}(l_{e(t)})$. Zum Berechnen der Spur werde die bekannte Basis P_k ($0 \leq k \leq n$) von V_n betrachtet. Dann ist $l_{e(t)}P_k = P_k((z_1, z_2) \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}) = (e^{it}z_1)^k (e^{-it}z_2)^{n-k} = e^{i(2k-n)t}P_k$ und somit

$$\chi_{V_n}(e(t)) = \sum_{k=0}^n e^{i(2k-n)t} = \begin{cases} 1 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} 2 \cos(2kt) & , n \text{ gerade} \\ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} 2 \cos((2k+1)t) & , n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Anhand dieser Gleichung erkennt man, dass $\mathrm{sp} \{\chi_{V_0}; \dots; \chi_{V_n}\} = \mathrm{sp} \{1; \cos t; \dots; \cos nt\}$ in M für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Aus der Fourier-Analyse ist bekannt, dass $\mathrm{sp} \{\cos nt\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dicht in M ist, also folgt, dass auch $\mathrm{sp} \{\chi_{V_n}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dicht in M ist. Aus dieser Tatsache folgt der nächste Satz, der die eingangs gestellte Frage beantwortet.

2.4 Satz *Ist W eine irreduzible Darstellung von $\mathrm{SU}(2)$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $W \cong V_n$.*

Beweis: Sei W eine irreduzible $\mathrm{SU}(2)$ -Darstellung, die nicht isomorph zu V_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Da V_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ebenfalls irreduzibel ist, gilt nach Satz 1.2 (iii)

$$\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1 \quad (2.3)$$

$$\langle \chi_{V_n}, \chi_W \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.4)$$

Nach Satz 1.2 (i) und (ii) liegt χ_W in der Menge M der stetigen Klassenfunktionen von $\mathrm{SU}(2)$. Weil $\mathrm{sp} \{\chi_{V_n}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ in M dicht liegt existiert eine Folge $(a_n) \subseteq \mathrm{sp} \{\chi_{V_n}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \chi_W$. Aus (2.3) und (2.4) folgt nun der Widerspruch

$$1 = \langle \chi_W, \chi_W \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n, \chi_W \rangle = 0.$$

Mit den Sätzen 2.2 und 2.4 sind nun alle irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{SU}(2)$ bekannt. Es soll noch kurz auf weitere aus 2.3 folgende Resultate eingegangen werden.

Folgerung 2.5 *Für eine stetige Klassenfunktion $f: \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathbb{C}$ gilt*

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} f(g) dg = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f \circ e)(t) \sin^2(t) dt. \quad (2.5)$$

Beweis: Für $f = \chi_{V_n}$ steht auf der linken Seite nach Satz 1.2 (iv)

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} \chi_{V_n}(g) dg = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \geq 1. \end{cases}$$

Das gleiche Ergebnis liefert auch die rechte Seite, denn unter Verwendung von (2.2) gilt zunächst für $t \notin \pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \chi_{V_n}(e(t)) &= \sum_{k=0}^n e^{i(2k-n)t} \\ &= e^{-int} \sum_{k=0}^n (e^{i2t})^k \\ &= \frac{1 - (e^{i2t})^{n+1}}{1 - e^{i2t}} e^{-int} \\ &= \frac{e^{-it} - e^{i(2n+1)t}}{e^{-it} - e^{it}} e^{-int} \\ &= \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-i(n+1)t}}{e^{it} - e^{-it}} \\ &= \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}. \end{aligned}$$

Also hat man tatsächlich

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \chi_{V_n}(e(t)) \sin^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin((n+1)t) \sin(t) dt = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \geq 1. \end{cases}$$

Also ist (2.5) richtig für alle $f = \chi_{V_n}$ und wegen der Linearität des Integrals dann auch für alle $f \in \mathrm{sp}\{\chi_{V_n}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Weil diese Menge aber dicht in der Menge M der stetigen Klassenfunktionen liegt, gilt (2.5) dann wegen der Stetigkeit des Integrals auch für alle $f \in M$, was zu zeigen war.

2.6 Clebsch-Gordan-Formel Für $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$V_k \otimes V_l \cong \bigoplus_{j=0}^q V_{k+l-2j}, \quad (2.6)$$

wobei $q = \min\{k; l\}$.

Beweis: Zum Beweis überlegt man sich, dass eine Isomorphie gegeben ist durch:

$$\varphi: V_k \otimes V_l \rightarrow \bigoplus_{j=0}^q V_{k+l-2j},$$

$$p \otimes q \mapsto \bigoplus_{j=0}^q \frac{1}{j!} \sum_{r=0}^j (-1)^r \binom{j}{r} \frac{\partial^j p}{\partial z_1^r \partial z_2^{j-r}} \frac{\partial^j q}{\partial z_1^{j-r} \partial z_2^r}$$

Der nächste Satz zeigt sich durch schlichtes Nachprüfen und aus dem Homomorphiesatz:

Satz 2.7 Seien G und H kompakte Lie-Gruppen und $f: G \rightarrow H$ ein Epimorphismus und (V, ρ) eine irreduzible Darstellung von G mit $l_g = id_V \forall g \in \ker f$. Dann wird durch

$$\sigma_{(V, \rho)}: H \times V \rightarrow V, (h, v) \mapsto \rho(g, v)$$

für $g \in f^{-1}(\{h\})$ eine irreduzible Darstellung von H definiert. Ist umgekehrt (W, λ) eine irreduzible Darstellung von H , so existiert $(V, \rho) \in \text{Irr}(G, \mathbb{C})$, so dass $(W, \lambda) \cong (V, \sigma_{(V, \rho)})$.

2.8 Bemerkung In der Situation von Satz 2.7 sind also alle irreduziblen Darstellungen von H (bis auf Isomorphie) gegeben durch die irreduziblen Darstellungen von G , für die die Elemente aus $\ker f$ als Identität operieren. Dieses Resultat wird im folgenden zur Auffindung der irreduziblen Darstellungen der verbliebenen Gruppen $SO(3)$, $U(2)$ und $O(3)$ sehr hilfreich sein.

2.9 irreduzible Darstellungen von $SO(3)$ Nach I. (6.18) existiert ein Epimorphismus $f: SU(2) \rightarrow SO(3)$ mit $\ker f = \{\pm E\}$, wobei E die 2x2-Einheitsmatrix in $SU(2)$ bezeichne. Nach 2.7 sind die irreduziblen $SO(3)$ -Darstellungen gegeben durch diejenigen irreduziblen $SU(2)$ -Darstellungen V_n aus 2.1, für die E und $-E$ als Identität operieren. In einer Darstellung V_n operiert E als neutrales Element von $SU(2)$ stets als Identität und für $-E$ gilt $-E \cdot P_k = P_k(-z_1, -z_2) = (-1)^n P_k$, so dass $-E$ genau dann als Identität operiert, falls n gerade ist. Dies führt auf:

2.10 Satz Die irreduziblen $SO(3)$ -Darstellungen sind gegeben durch V_{2n} für $n \in \mathbb{N}_0$. Diese seien im folgenden mit W_n bezeichnet.

2.11 irreduzible Darstellungen von $U(2)$ Man überprüft, dass

$$f: S^1 \times SU(2) \rightarrow U(2), (e^{it}, A) \mapsto e^{it} A$$

ein Epimorphismus mit $\ker f = \{(1, E); (-1, -E)\}$ ist. Wieder aus 2.7 folgt, dass die irreduziblen $U(2)$ -Darstellungen gegeben sind durch die irreduziblen Darstellungen von $S^1 \times SU(2)$, für die $(-1, -E)$ als Identität operiert. $(1, E)$ ist neutrales Element und operiert daher ohnehin als Identität. Die irreduziblen Darstellungen von $S^1 \times SU(2)$ sind nach II. (4.15) gegeben durch $A_m \otimes V_n$, wobei A_m

$$S^1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (\lambda, z) \mapsto \lambda^m z$$

für $m \in \mathbb{Z}$ die irreduziblen Darstellungen von S^1 bezeichnet. Es gilt $(-1, -E) \cdot (1 \otimes P_k) = (-1)^m \otimes (-1)^n P_k = (-1)^{m+n} (1 \otimes P_k)$, so dass folgt

2.12 Satz *Die irreduziblen Darstellungen von $U(2)$ sind gegeben durch $A_m \otimes V_n$ für $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $m + n$ gerade.*

2.13 irreduzible Darstellungen von $O(3)$

$$f: O(3) \rightarrow SO(3) \times C_2, A \mapsto ((\det A) \cdot A, \det A)$$

ist ein Isomorphismus (C_2 bezeichnet die Gruppe $(\{\pm 1\}, \cdot)$), so dass die irreduziblen Darstellungen von $O(3)$ genau die irreduziblen Darstellungen von $SO(3) \times C_2$ sind. Letztere sind nach II. (4.15) gegeben durch $W_n \otimes \mathbb{C}_m$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \{\pm 1\}$, wobei $\mathbb{C}_m$

$$C_2 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \begin{cases} (1, z) & \mapsto z \\ (-1, z) & \mapsto mz \end{cases}$$

die irreduziblen C_2 -Darstellungen bezeichnet. Es gilt also:

2.14 Satz *Die irreduziblen Darstellungen von $O(3)$ sind gegeben durch $W_n \otimes \mathbb{C}_m$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \{\pm 1\}$.*

3 Harmonische Polynome

Die irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{SO}(3)$ sollen in diesem Kapitel noch unter Verwendung anderer Darstellungsräume beleuchtet werden.

3.1 Für $l \in \mathbb{N}_0$ sei

$$P_l := \left\{ \sum_{m,n \geq 0, m+n \leq l} a_{mn} x_1^m x_2^n x_3^{l-m-n} \mid a_{mn} \in \mathbb{C} \right\}$$

der $\mathbb{C}$ -Vektorraum (mit den kanonischen Verknüpfungen) der homogenen Polynome vom Grad l in drei reellen Variablen. Mit der Operation

$$\mathrm{SO}(3) \times P_l \rightarrow P_l, (A, P) \mapsto (AP)(x) := P(xA)$$

erhält man eine Darstellung von $\mathrm{SO}(3)$, die jedoch i.a. nicht irreduzibel ist. Es ist nämlich etwa $\mathrm{sp} \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$ ein $\mathrm{SO}(3)$ -invarianter Unterraum von P_2 . Der Untervektorraum der harmonischen Polynome vom Grad l ist definiert durch

$$H_l := \{f \in P_l \mid \Delta f = 0\}.$$

Es wird im folgenden untersucht, ob H_l $\mathrm{SO}(3)$ -invariant oder vielleicht sogar irreduzibel ist.

3.2 Lemma *Es gilt für $l \in \mathbb{N}_0$*

$$\dim P_l = \frac{1}{2}(l+1)(l+2)$$

$$\dim H_l = 2l + 1.$$

Beweis: Eine Basis von P_l ist offensichtlich gegeben durch die Polynome $x_1^m x_2^n x_3^{l-m-n}$ für $m, n \geq 0$ und $m+n \leq l$. Daher ist $\dim P_l = \sum_{m=0}^l (l-m+1) = \frac{1}{2}(l+1)(l+2)$. Ist $f \in P_l$, so kann f geschrieben werden als

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^l \frac{x_1^k}{k!} f_k(x_2, x_3)$$

wobei f_k homogene Polynome vom Grad $l - k$ in den Variablen x_2 und x_3 sind. Also gilt

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{k=0}^l \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{x_1^k}{k!} f_k(x_2, x_3) + \sum_{k=0}^l \frac{x_1^k}{k!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) f_k(x_2, x_3) \\ &= \sum_{k=2}^l \frac{x_1^{k-2}}{(k-2)!} f_k(x_2, x_3) + \sum_{k=0}^l \frac{x_1^k}{k!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) f_k(x_2, x_3) \\ &= \sum_{k=0}^{l-2} \frac{x_1^k}{k!} f_{k+2} + \sum_{k=0}^l \frac{x_1^k}{k!} \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_3^2} \right),\end{aligned}$$

und somit ist $\Delta f = 0$ genau dann, wenn $f_{k+2} = -\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_3^2}\right)$ für $0 \leq k \leq l-2$ und $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) f_k(x_2, x_3) = 0$ für $k = l-1$ und $k = l$. Letzteres ist aber stets erfüllt, da f_{l-1} ein Polynom vom Grad $l - (l-1) = 1$ und f_l ein Polynom vom Grad $l - l = 0$ in den Variablen x_2 und x_3 ist. Ein Polynom $f \in H_l$ ist also eindeutig festgelegt durch f_0 und f_1 , also zwei homogene Polynome vom Grad l und $l-1$ in zwei Variablen. Daher ist $\dim H_l = (l+1) + l = 2l+1$.

3.3 Lemma Mit der Operation

$$\mathrm{SO}(3) \times C^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3), (A, f) \mapsto (Af)(x) := f(xA)$$

ist die Abbildung

$$\Delta: C^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3), f \mapsto \Delta f$$

$\mathrm{SO}(3)$ -äquivariant.

Der Beweis ergibt sich durch einfaches Nachrechnen. Aus dem Lemma 3.3 ergibt sich sofort das

3.4 Korollar H_l ist ein $\mathrm{SO}(3)$ -invarianter Untervektorraum von P_l .

3.5 Satz Die $\mathrm{SO}(3)$ -Darstellungen H_l sind irreduzibel.

Beweis: Es wird gezeigt, dass $H_l \cong W_l$. H_l besitzt als $\mathrm{SO}(3)$ -Darstellung jedenfalls eine Zerlegung in irreduzible Faktoren, d.h. es gilt

$$H_l \cong \bigoplus_{\nu} W_{n_{\nu}}.$$

Es ist $\dim W_{n_{\nu}} = 2n_{\nu} + 1$ und $\dim H_l = 2l + 1$, daher reicht es aus Dimensionsgründen zu Zeigen, dass $n_{\nu} \geq l$ für gewisses ν . Sei

$$R(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(3)$$

für $t \in \mathbb{R}$. Für den Charakter der $\mathrm{SO}(3)$ -Darstellung W_n erhält man $\chi_{W_n}(R(t)) = \sum_{k=0}^{2n} e^{i(n-k)t}$, daher ist $\chi_{H_l}(R(t))$ nach Satz 1.2 (vi) eine Linearkombination von e^{ikt} , wobei $|k| \leq \max n_\nu$. Andererseits kann auf H_l als $\mathrm{SO}(3)$ -Darstellung ein $\mathrm{SO}(3)$ -invariantes Skalarprodukt eingeführt werden. Die Linkstranslation mit $R(t)$ ist dann unitär und es gibt somit eine Basis, so dass sie die Matrixdarstellung $\mathrm{diag}(e^{ik_1t}, \dots, e^{ik_{2l+1}t})$ besitzt. Für den Charakter gilt dann also $\chi_{H_l}(R(t)) = \sum_{j=0}^{2l+1} e^{ik_jt}$. Man prüft leicht nach, dass $(x_2 + ix_3)^l \in H_l$ ein Eigenvektor der Linkstranslation $l_{R(t)}$ zum Eigenwert e^{-ilt} ist, sodass e^{-ilt} in der Matrixdarstellung der Linkstranslation vorkommt und somit auch als Summand im Charakter auftaucht, woraus wiederum $\max n_\nu \geq l$ und daraus die Behauptung folgt.