

Der Satz von Hopf-Rinow

Lena Gäbler

19. April 2011

Seminarvortrag bei Herrn Professor Dr. Schwachhöfer

1. Vorbereitung

Definition 1 Eine Folge heißt Cauchy-Folge, falls gilt

$$(a_n) \in \mathbf{R} \text{ und } \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ so dass } \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon$$

Definition 2

$$\text{Der Abstand } d(p, q) \text{ von } p \in S \text{ zu } q \in S \text{ ist } d(p, q) = \inf l(\alpha_{p,q}),$$

wobei das Infimum über alle stückweise differenzierbaren Kurven, die p und q verbinden, genommen wird.

Wenn eine Geodäte γ p und q verbindet und dabei

$$l(\gamma) = d(p, q)$$

hat, nennen wir diese Geodäte minimierend oder Kürzeste.

Bemerkung Wenn c eine Kürzeste von p nach q ist, dann ist c eine Geodäte.

Definition 3 Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine offene Menge

$$U \subseteq M \text{ heißt } \underline{\text{normal}}, \text{ falls es } \forall p, q \in U$$

genau eine (bis auf Umparametrisierung) Kurve c von p nach q gibt, so dass $L(c) = d(p, q)$

Es gilt also:

1.

$$p, q \in U \text{ koennen durch genau eine Kuerzeste verbunden werden}$$

2.

$$\forall p, q \in U \text{ ist } \exp_p \text{ ein Diffeomorphismus auf } B_\delta(0)$$

Definition 4 Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt vollständig, falls alle Geodäten auf ganz $\mathbf{R}$ definiert sind.

2. Hauptteil

Proposition Eine abgeschlossene Fläche $S \subset \mathbf{R}^3$ ist vollständig.

Beweis Sei

$$\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow S, \gamma(0) = p \in S$$

eine parametrisierte Geodäte von S, die o.B.d.A. nach Bogenlänge parametrisiert ist. Wir müssen zeigen, dass es möglich ist, die Geodäte zu einer Geodäte zu erweitern, die auf ganz $\mathbf{R}$ definiert ist.

$$\tilde{\gamma} : \mathbf{R} \rightarrow S.$$

Betrachte zuerst, dass wenn

$$\tilde{\gamma}(s), s \in \mathbf{R} \text{ definiert}$$

dann ist es laut dem Existenz und Eindeutigkeitssatz von Geodäten möglich, die Geodäte in einer Umgebung um diesen Punkt in $\mathbf{R}$ zu erweitern. Deshalb ist die Menge aller Punkte

$$\{s \in \mathbf{R} \mid \tilde{\gamma}(s) \text{ definiert}\} = A$$

offen in $\mathbf{R}$. Wenn wir zeigen, dass diese Menge auch abgeschlossen ist ($A \subset \mathbf{R}$ offen und abgeschlossen, dann ist $A = \mathbf{R}$, da $\mathbf{R}$ zusammenhängend), ist es möglich diese Geodäte auf ganz $\mathbf{R}$ zu definieren.

Annahme:

$$\tilde{\gamma} \text{ ist } \forall s < s_0 \text{ definiert, wobei } s_0 = \sup\{s \in \mathbf{R} \mid \gamma(s) \text{ definiert}\}$$

Wir zeigen dass auch für $s = s_0$ $\tilde{\gamma}$ definiert ist. Betrachte eine Folge

$$(s_n) \rightarrow s_0 \text{ mit } s_n < s_0, n = 1, 2, \dots$$

Wir zeigen, dass

$$(\tilde{\gamma}(s_n)) \text{ in } S \text{ konvergiert.}$$

Sei

$$\epsilon > 0 \text{ gegeben, dann } \exists n_0 \text{ so dass } \forall n, m > n_0 : |s_n - s_m| < \epsilon$$

Wenn p und q aus S, dann ist

$$|p - q| \leq d(p, q),$$

da der direkte Abstand der zwei als Gerade kürzer ist, als der Abstand über die Geodäte. Also,

$$|\tilde{\gamma}(s_n) - \tilde{\gamma}(s_m)| \leq d(\tilde{\gamma}(s_n), \tilde{\gamma}(s_m)) \leq L(\tilde{\gamma}|_{[s_m, s_n]}) = \int_{s_m}^{s_n} \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt = |s_n - s_m| < \epsilon$$

Wobei die zweite Ungleichheit aus der Definition von d folgt und der Tatsache, dass $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$ und

$$|s_n - s_m| \text{ gleich der Bogenlänge von } \tilde{\gamma} \text{ zwischen } s_n \text{ und } s_m \text{ ist}$$

Es folgt, dass

$$(\tilde{\gamma}(s_n)) \text{ eine Cauchy - Folge in } \mathbf{R}^3 \text{ ist}$$

Diese Cauchy-Folge konvergiert zu einem Punkt q . Da

$$q \text{ Grenzwert von } (\tilde{\gamma}(s_n)) \text{ und } S \text{ abgeschlossen, ist } q \in S$$

Das beweist die Aussage.

Sei nun

$$(W, \delta) \text{ eine normale Umgebung von } q$$

und seien

$$\tilde{\gamma}(s_n), \tilde{\gamma}(s_m) \in W, |s_n - s_m| < \delta$$

Dann gilt:

1.

$$p, q \in W \text{ koennen durch genau eine Kuerzeste verbunden werden}$$

2.

$$\forall p, q \in W \text{ ist } \exp_p \text{ ein Diffeomorphismus auf } B_\delta(0)$$

Sei γ die eindeutige Geodäte mit

$$l(\gamma) < \delta, \tilde{\gamma}(s_n), \tilde{\gamma}(s_m) \text{ verbindend.}$$

Dann stimmen die beiden Geodäten überein. Da

$$\exp_{\tilde{\gamma}(s_n)} \text{ ein Diffeomorphismus in } B_\delta(0) \text{ ist und } W \subset \exp_{\tilde{\gamma}(s_n)}(B_\delta(0)),$$

$$\gamma \text{ setzt } \tilde{\gamma} \text{ nach } q \text{ fort.}$$

Also ist $\tilde{\gamma}$ bei $s = s_0$ definiert und der Beweis ist beendet.

Korollar Eine kompakte Fläche $S \subset \mathbf{R}^3$ ist vollständig.

Bemerkung Das Korollar ist klar, da kompakt bedeutet, dass die Fläche abgeschlossen und beschränkt ist. Die Vollständigkeit folgt nach dem obigen Satz schon aus der Abgeschlossenheit.

Der Satz von Hopf-Rinow Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei p aus M . Die folgenden Aussagen sind äquivalent

1.

$\exp_p$ ist auf ganz $T_p(M)$ definiert

2. M ist vollständig als metrischer Raum

3. M ist geodätisch vollständig

Aus diesen 4 Aussagen folgt

4.

$\forall q \in M \exists$ eine Geodaete γ , welche p und q verbindet und $l(\gamma) = d(p, q)$ hat

Beweis

1 nach 4) Sei

$d(p, q) = r$ und $B_\delta(p)$ eine normale Kreisscheibe um p mit $K_\delta(p) = K$ als Rand von $B_\delta(p)$.

Sei x_0 ein Punkt, wo die stetige Funktion $d(q, x)$, $x \in K$ ein Minimum erreicht. Dieses Minimum existiert, da die Menge kompakt ist.

Dann ist $x_0 = \exp_p \delta v$, wobei $v \in T_p M$ und $|v| = 1$.

Sei γ eine Geodaete durch $\gamma(s) = \exp_p sv$. Wir zeigen, dass $\gamma(r) = q$ gilt.

Um dies zu zeigen, betrachte

$$A = \{s \in [0, r]; d(\gamma(s), q) = r - s \text{ gilt}\}$$

A ist nicht leer, da die Gleichung wahr ist für $s = 0$. Außerdem ist A abgeschlossen in $[0, r]$, da für

$$(s_n) \in A \text{ mit } s_n \rightarrow s_0 \text{ gilt}$$

$$d(\gamma(s_n), q) = r - s_n \Rightarrow d(\gamma(s_0), q) = r - s_0 \Rightarrow s_0 \in A,$$

da für s_0 die Eigenschaft von A erfüllt ist. Wir zeigen, dass für

$$s_0 \in A \text{ mit } s_0 < r \text{ ein } \delta' \text{ existiert, so dass } s_0 + \delta' \in A \text{ mit } \delta' \text{ hinreichend klein.}$$

Wenn das gilt, ist $\sup A = r$, da man für jedes $s_0 < r$ ein solches δ finden kann. Da A abgeschlossen ist, ist $\sup A = \max A$, also

$$r \in A \Rightarrow \gamma(r) = q$$

Um zu zeigen, dass die Gleichung erfüllt ist für

$$s_0 + \delta', \text{ sei } B_\delta(\gamma(s_0)) \text{ eine normale Kreisscheibe um } \gamma(s_0)$$

mit

$$K' = \partial B'_\delta(\gamma(s_0)) \text{ als Rand und } x'_0 \text{ ein Punkt wo } d(x, q), x \in K', \text{ ein Minimum hat.}$$

Es reicht zu zeigen, dass $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$, da dann die Verbindungskurve nicht geknickt ist. Wenn $x'_0 \neq \gamma(s_0 + \delta')$ wäre, dann hätte die Verbindungskurve einen Knick und es würde in $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ eine eindeutige Kürzeste ohne Knick geben und die geknickte Kurve könnte nicht die Kürzeste sein, Also muss x'_0 so liegen, dass die kürzeste Verbindung keinen Knick hat. Es ist

$$d(\gamma(s_0), q) = \delta' + \min d(x, q) = \delta' + d(x'_0, q),$$

da K' kompakt und so ein Minimum erreicht wird, und

$$d(\gamma(s_0), q) = r - s_0,$$

also erhalten wir

$$r - s_0 = \delta' + d(x'_0, q) = \delta' + d(\gamma(s_0 + \delta'), q) \quad (1)$$

oder

$$d(\gamma(s_0 + \delta'), q) = r - (s_0 + \delta').$$

Also gilt die Gleichung $d(\gamma(s), q) = r - s$ für

$$s_0 + \delta' \Rightarrow s_0 + \delta' \in A.$$

Wir betrachten die Dreiecksungleichung und die erste Gleichheit von (1), um zu zeigen, dass

$$\gamma(s_0 + \delta') = x'_0 \text{ ist}$$

Also

$$d(p, x'_0) \geq d(p, q) - d(q, x'_0) = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'$$

Außerdem hat die geknickte Kurve, die

p und x'_0 verbindet und von p nach $\gamma(s_0)$ durch γ geht

und von $\gamma(s_0)$ nach x'_0 durch den geodätischen Strahl geht

die gleiche Länge, wie

$$s_0 + \delta', \text{ also } d(p, x'_0) = s_0 + \delta'$$

also ist die Kurve geodätisch. Insbesondere ist die Kurve nicht geknickt, also ist

$$\gamma(s_0 + \delta') = x'_0$$

1 nach 2)

Sei (q_n) eine Cauchy - Folge in (M, d)

Aus (4) folgt, dass eine Kürzeste existiert von p nach q_n :

$\gamma_n : \mathbf{R} \rightarrow M$, $\gamma_n(1) = q_n$ und $\gamma_n(t) = \exp_p(tv_n)$, $q_n = \exp_p(v_n)$. Es gilt $\|v_n\| = d(p, q_n)$, da

$$d(p, q_n) = \int_0^1 \|\gamma'_n(t)\| dt = \int_0^1 \|v_n\| dt = \|v_n\|$$

Außerdem ist

$$\|v_n\| = d(p, q_n) \leq d(p, q_m) + d(q_m, q_n), \text{ wobei } d(p, q_m) = \|v_m\|$$

$$\Rightarrow |\|v_n\| - \|v_m\|| \leq d(q_n, q_m)$$

Also ist $(\|v_n\|)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbf{R}$ und daher konvergent in $\mathbf{R}$

Jede konvergente Folge ist beschränkt

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbf{R}, \text{ so dass } \|v_n\| \leq K \forall n.$$

$$\Rightarrow v_n \in \overline{B_K(0)}$$

D.h. es existiert eine konvergente Teilfolge (Bolzano Weierstraß).

$$v_{n_k} \rightarrow v_0, q_{n_k} = \exp_p(v_{n_k}) \rightarrow \exp_p(v_0)$$

Es gilt allgemein: Besitzt eine Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge so ist sie selbst konvergent und somit ist M vollständig als metrischer Raum.

2 nach 3) Angenommen M sei nicht geodätisch vollständig, dann sind manche normierten Geodäten von M definiert für

$$s < s_0 \text{ aber nicht } s = s_0$$

Sei (s_n) eine konvergente Folge, konvergent zu s_0 mit $s_n < s_0$

Gegeben sei $\epsilon > 0$ dann $\exists n_0$, so dass wenn $n, m > n_0 : |s_n - s_m| < \epsilon$

$$\Rightarrow d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq L(\gamma|_{[s_n, s_m]}) = |s_n - s_m| < \epsilon$$

$$\Rightarrow (\gamma(s_n)) \text{ ist Cauchy - Folge in } M$$

Da M vollständig bezüglich der Metrik d ist, konvergiert

$$(\gamma(s_n)) \rightarrow p_0 \in M.$$

Sei (W, δ) nun eine total normale Umgebung um p_0 .

Wähle

$$n_1, \text{ so dass } n, m > n_1, \text{ dann ist } |s_n - s_m| < \delta \text{ und } \gamma(s_n) \text{ und } \gamma(s_m) \in W.$$

Dann existiert eine eindeutige Geodäte $\tilde{\gamma}$, deren Länge weniger ist als

$$\delta, \text{ und die } \gamma(s_n) \text{ mit } \gamma(s_m) \text{ verbindet.}$$

Es ist klar, dass $\tilde{\gamma}$ übereinstimmt mit

$$\gamma \text{ auf } [s_n, s_m]$$

und daher auf dem genannten Definitionsbereich.

$$\text{Da } \exp_\gamma(s_n) \text{ Diffeomorphismus auf } B_\delta(0) \text{ und } W \subset \exp_\gamma(s_n)(B_\delta(0)),$$

$$\text{setzt } \tilde{\gamma} \gamma \text{ nach } s_0 \text{ fort}$$

3 nach 1) Offensichtlich, da die Aussage 3 für alle Punkte in M gilt, also auch insbesondere für den Punkt p .

3. Literaturangaben

1. Carmo, Manfredo Perdigao do. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs
2. Carmo, Manfredo Perdigao do. 1992. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston
3. Kaballo. Winfried. 2000. *Einführung in die Analysis 1*. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg