Aufgaben vielfältig gestalten
Handreichung zu den Bremer Parallelarbeiten in Klasse 6

erstellt von

Nikola Leufer, Susanne Prediger

Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

Universität Dortmund

in Kooperation mit und für das Landesinstitut für Schule, Bremen 2007

Einführung

Was ist der Anlass dieser Handreichung?

Die Parallelarbeiten in Klasse 6 bieten einen wichtigen Anlass für die schulinterne Kommunikation über die Implementation der Bildungspläne. Deswegen haben Behörde und Schulen im Jahr 2007 besondere Aufmerksamkeit darauf gelegt, dass die Parallelarbeiten den Anforderungen und dem Geist des neuen Bremer Bildungsplans Rechnung tragen.
Die Aufgaben der Parallelarbeit sollten sich nicht auf kalkülorientiertes Abfragen von Standardverfahren beschränken, sondern auch inhaltliches Verständnis sowie die prozessbezogenen Kompetenzbereiche Argumentieren/Kommunizieren, Problemlösen und Modellieren in angemessenem Umfang einbeziehen. Dazu sind geeignete Aufgaben erforderlich, die nicht immer einfach zu konstruieren sind.
Eine nahezu flächendeckende Analyse der Parallelarbeiten für Klasse 6 im Schuljahr 2006/07 an der Universität Dortmund hat ergeben, dass es einigen Schulen bereits sehr gut gelingt, durch neue Aufgabentypen diese Kompetenzbereiche einzubeziehen, natürlich ohne dabei auf die Grundaufgaben zum Test der basalen Fertigkeiten zu verzichten. Auch die meisten anderen Schulen haben sich auf den Weg zu einer sukzessiven Umsetzung dieser Ziele gemacht. Dabei sind noch große Unterschiede festzustellen.

Wozu wurde diese Handreichung entwickelt?

Um diesen Weg weiter zu stärken und die Schulen in ihrer Entwicklungsaufgabe zu unterstützen, sind in dieser Handreichung Aufgaben zusammengestellt, mit denen die Grundaufgaben im Hinblick auf breitere Kompetenzbereiche ergänzt und variiert werden können.
Diese Grundaufgaben und ihre Variationen werden hier auch als Aufgabensammlung für künftige Parallelarbeiten zur Verfügung gestellt. Noch wichtiger erscheint uns jedoch, durch das strukturierte Gegenüberstellen und das Benennen der Aufgaben-Charakteristika für den Prozess des Variierens an sich zu sensibilisieren, der sich natürlich auch in andere Themengebiete und andere Jahrgänge übertragen lässt. Denn wer Aufgaben gezielt variieren kann, muss sich nicht auf Aufgabensammlungen verlassen!

Inhalt und Aufbau der Handreichung

Dieser Handreichung liegt eine intensive Analyse aller gestellten Parallelarbeiten zugrunde, bei der alle Aufgaben hinsichtlich wesentlicher Aufgabenmerkmale klassifiziert wurden. Dieser Prozess ist in der Broschüre „Informationen zum Aufgaben-Klassifikationsschema als wissenschaftlicher Hintergrund der Rückmeldung zu den Bremer Parallelarbeiten in Klasse 6“ ausführlich erläutert.

Im Folgenden werden Grundaufgaben für die unterschiedlichen mathematischen Stoffgebiete der Klassen 6 mit ihren jeweiligen Codierungen vorgestellt. Als Grundaufgaben wurden diejenigen Aufgaben ausgesucht, die mit gutem Recht in vielen Bremer Parallelarbeiten zu finden sind. Codiert werden die Aufgabenkriterien „Mathematisches Stoffgebiet“, „Aufgabenformat“, „Offenheit“ der Aufgabenstellung, „Komplexität bzw. Kompliziertheit“ und insbesondere die Aktivierung prozessbezogener Kompetenzen wie „Modellieren“, „Argumentieren“, „Problemlösen“ sowie der Grad an notwendigem inhaltlichen Verständnis für die Bearbeitung der Aufgabe. Eine ausformulierte Einschätzung der Grundaufgaben befindet sich direkt unter den Codes.

Produktive und kreative Varianten der Grundaufgaben ergeben sich häufig schon aus einer einfachen Veränderung des Aufgabenformates, einer gezielten Öffnung der Aufgabe oder einer inhaltlichen Einbettung der Aufgabe in einen authentischen Kontext. Zu allen Grundaufgaben finden Sie eine reichhaltige aber natürlich längst nicht vollständige Zusammenstellung von Varianten, die ebenfalls nahezu alle von Bremer Schulen stammen. Der variierte Aspekt der Grundaufgaben-Varianten wird jeweils durch den entsprechenden neuen Codewert verdeutlicht.

Codierung

Die betrachteten Kriterien der Grundaufgaben werden jeweils mit einem Code bewertet, der häufig die Form 0 (nicht vorhanden) oder 1 (vorhanden) annimmt. Gerade bei den prozessbezogenen Kompetenzen sind jedoch differenziertere Aussagen nötig: So wird beispielsweise der Modellierungscharakter der Aufgabe entsprechend der Modellierungstätigkeiten codiert (Strukturierung, Mathematisierung, Validierung), die für die Lösung der Aufgabe nötig sind. Auch beim Antwortformat (Argumentieren/Begründen) müssen die vielen Möglichkeiten der Schülertätigkeit qualitativ unterschieden werden: So würde z. B. eine anzufertigende Tabelle den Code 1b erhalten, während eine Erläuterung mathematischer Verfahren an einem selbstgewählten Beispiel den Code 3b erhält. Eine genauere Erklärung der einzelnen Codes finden Sie im Anhang.

Die Zusammenstellung dieser Aufgaben soll Ideen liefern und dazu ermutigen, Grundaufgaben zu variieren – im Hinblick auf eine vielfältige Aufgabengestaltung und die Aktivierung prozessbezogener Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern.

Inhaltsverzeichnis

1. Klassische arithmetische Grundkenntnisse: Einfache Grundrechenarten

Grundaufgabe: „Arithmetische Grundkenntnisse“

85363	b) 4 3 ? 7
- 4387	+ 2 ? 9 3
- 4909	? 0 1 ?

10	Stoffgebiet	Arithmetik
010	Aufgabenformat	Zahl
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Diese Aufgaben prüfen klassische inhaltliche arithmetische Kompetenzen, in der Regel ohne prozessbezogene Kompetenzen zu aktivieren: Sie sind meist einschrittig und nicht komplex. Die Aufgabenstellung entspricht einem den Schülerinnen und Schülern bekannten Format. Sie ist damit eindeutig, ebenso der Lösungsweg. Das Antwortformat ist eine Zahl bzw. mehrere Zahlen. Die Arbeiten geben dazu meist Raum für den zugehörigen Rechenweg. Die Schülerinnen und Schüler benötigen zur Bearbeitung arithmetische Kenntnisse, aber in der Regel keine inhaltlichen Vorstellungen zu den mathematischen Inhalten und keine Verfahren, die über die Standardroutinen hinausgehen.

Variation 1: Problemlösen und offenere Aufgabe

4 3 ? 7	4 3 ? 7
+ 2 ? ? 5	+ 2 ? ? 5
6 ? 0 ?	7 ? 0 ?

(Tipp: es könnte auch mehrere Lösungen geben)

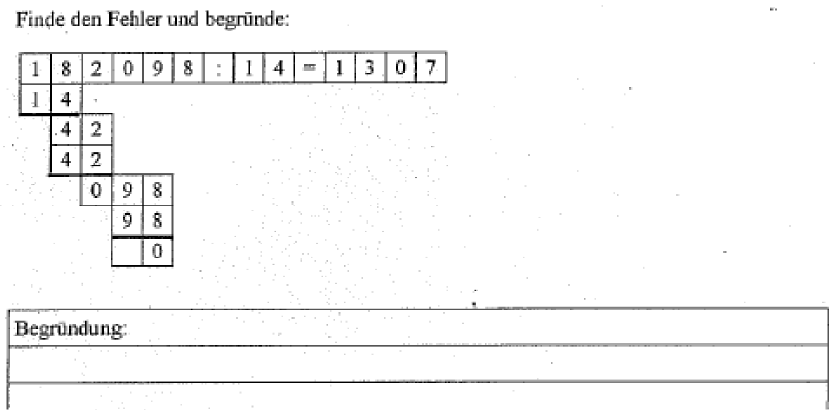
001	Offenheit	Endzustand offen
1	Problemlöseanteil	ja

Eine gezielte Öffnung der Aufgabe lässt mehrere Lösungen zu und thematisiert in dieser Sequenz dennoch das Problem des Zehnerübergangs, ohne zusätzlichen Rechenballast zu erzeugen.
Die ungewohnte Möglichkeit, selbst nach passenden Zahlenpaaren zu suchen, kann als Problemlöseanteil gewertet werden.

Variation 2: Verbalisierung von Verfahren (Argumentieren/Begründen, mehrschrittige Aufgabe)

Martin hat bei der Berechnung eines Terms Fehler gemacht. Sein Nachbar hat deshalb seine Rechnung durchgestrichen. Unterstreiche Martins Fehler. Welche Rechenregeln hat er nicht beachtet? Berechne dann den Term richtig.

$$\begin{aligned} & 3 + 47 \cdot 2 - (40 - 2) \\ = \; & 50 \cdot 2 - 40 - 2 \\ = \; & 100 - 40 - 2 \\ = \; & 60 - 2 \\ = \; & 58 \end{aligned}$$


Finde den Fehler und begründe:

1	8	2	0	9	8	:	1	4	=	1	3	0	7
1	4												
	4	2											
	4	2											
		0	9	8									
			9	8									
				0									

Begründung:

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig

Die Umformulierung einer Standardaufgabe vom Typ „Berechne!“ zu einer fehlerhaft gelösten Aufgabe erfordert ein anderes Antwortformat und erzeugt auf einfache Weise Argumentations- bzw. Begründungsbedarf sowie eine Reflektion der Rechenregeln.

Variation 3: Realitätsbezug (einfaches Modellieren)

Stefan bestellt 17 CDs. Er muss 187 Euro bezahlen. Wie teuer ist eine CD?

110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Modellierungscharakter	Mathematisierung
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Die Aufgabe enthält eine arithmetische Problemstellung, ist ebenfalls einschrittig, aber hier im Gegensatz zur Grundaufgabe in einen realistischen Kontext eingebettet. Schülerinnen und Schüler müssen somit selbständig ein „mathematisches Modell der Situation“, also die geeignete Rechenoperation, finden. Auf diese Weise werden nicht nur Rechenfertigkeiten getestet, sondern auch die Verfügbarkeit der notwendigen Grundvorstellung zur Division.

2. Kürzen/Erweitern/Umwandeln von Brüchen: Einschrittiges Rechnen mit Brüchen

Grundaufgaben: „Kürzen/Umwandeln“

$\frac{6}{10} =$

$11\frac{3}{8} =$ ______

Grundaufgaben: „Umwandeln von Brüchen in Dezimalzahlen und umgekehrt“

Schreibe in der Dezimalschreibweise: $1\frac{5}{10} =$

Schreibe als Dezimalzahl: $60\% =$

10	Stoffgebiet	Arithmetik
010	Aufgabenformat	Zahl
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Diese Aufgaben prüfen auf klassische Art das „Kürzen und Erweitern von Brüchen“ sowie einschrittiges „Rechnen mit Brüchen“ bzw. „Umwandeln von (gemischten) Brüchen in Dezimalzahlen“ und umgekehrt – also zentrale Themen der Jahrgangsstufen 5/6. Die Aufgaben sind in der Regel einschrittig und entsprechen einem den Schülerinnen und Schülern wohlbekannten Format. Die Schülerinnen und Schüler benötigen zur Bearbeitung arithmetische Fertigkeiten der Klassen 5/6, aber in diesem Fall keine inhaltlichen Vorstellungen zu den mathematischen Inhalten und keine Verfahren, die über die Standardroutinen hinausgehen.

Variation 1: Mehrschrittige Aufgabe

$3\frac{1}{2} + 6\frac{2}{5}$

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig

Diese Aufgabe prüft ebenfalls das „Rechnen mit gemischten Zahlen“, jedoch ist sie zwei- bzw. mehrschrittig. Wenn Schülerinnen und Schüler Umformungen vornehmen müssen, um überhaupt im Sinne der Additionsaufgabe mit den Zahlen hantieren zu können, wird eine wichtige Verknüpfung verschiedener Fertigkeiten gleichzeitig verlangt, was einschrittige Aufgaben allein nicht leisten können.

Variation 2: Verbalisierte Verfahren rückübersetzen (Aufgabenformat)

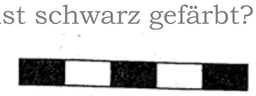
a) Addiere zur doppelten Summe der Zahlen $3\frac{4}{9}$ und $4\frac{5}{18}$ das Dreifache der Differenz von $4\frac{1}{3}$ und $\frac{7}{6}$.

210	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Diese Aufgabe formuliert eine Rechnung mit gemischten Zahlen in ungewöhnlicher Weise: Die Anweisungen für die mathematischen Operationen müssen vor der Bearbeitung der Aufgabe zunächst „übersetzt" werden, was ein Verständnis und eine Reflektion der mathematischen Verfahren (und somit in gewisser Weise ein elementares inhaltliches Verständnis) erfordert. Selbst formulieren müssen die Schüler hier jedoch nicht.

Variation 3: Graphische Darstellungsform der Aufgabenstellung (Aufgabenformat)

Welcher Bruchteil ist schwarz gefärbt?

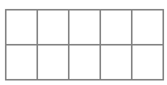


002	Aufgabenformat	Abbildung
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese für Brüche ebenfalls klassische Aufgabenstellung startet nicht von der symbolischen Darstellung, sondern von einer Abbildung, der die für die Lösung relevanten Informationen entnommen werden müssen. Eine Interpretation von Brüchen als „Anteile" ist notwendig.

Variation 4: Graphisches Antwortformat (Antwortformat)

Färbe 2/10 der Fläche!

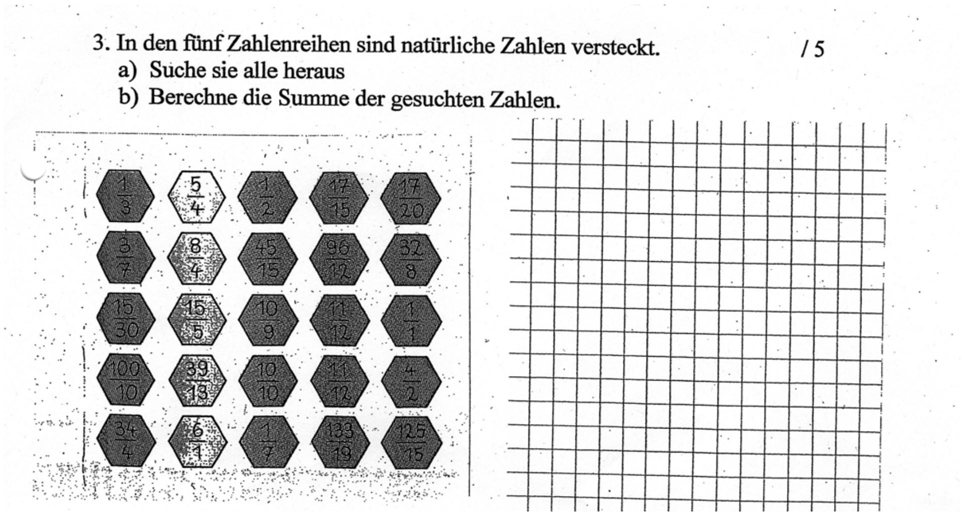


1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Auch diese Variation gehört zu den viel benutzten Aufgaben: Hier müssen Schülerinnen und Schüler einen Bruch als „Anteil" einer vorgegebenen Abbildung interpretieren und färben, also eine Antwort im graphischen Format geben.

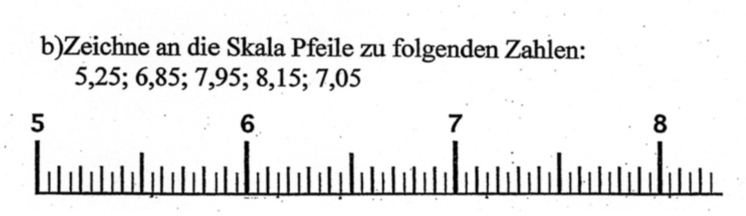
Die letzten beiden Aufgabentypen lassen sich noch auf unterschiedliche Weise variieren (s. weiter unten).

Variation 5: Inhaltliche Vorstellungen einbeziehen



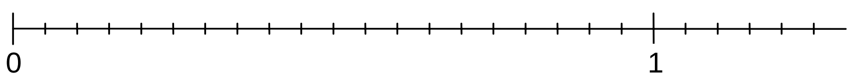
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Aufgabenteil b): Um diese Aufgabe zu lösen, müssen Schülerinnen und Schüler „echte Brüche“ von den „als Brüchen verkleideten natürlichen Zahlen“ unterscheiden. Um diese zu erkennen, müssen inhaltliche Vorstellungen (z. B. Was sind „Brüche überhaupt?“ bzw. die Verortung auf dem Zahlenstrahl) aktiviert werden.



Kennzeichne die Bruchzahlen am Zahlenstrahl:

$\frac{1}{20}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{9}{10}$; $1\frac{1}{4}$



1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Bei der Aufgabe (oben) wird die Ordnung von Dezimalbrüchen, bei der Aufgabe (unten) die Ordnung von Bruchzahlen thematisiert. In beiden Fällen ist kein Umwandeln der Brüche nötig, um sie in den Zahlenstrahl eintragen zu können. Die Aufgaben können daher als einschrittig bezeichnet werden. Die Brüche werden als „Zahlen am Zahlenstrahl“ und in diesem Sinne inhaltlich interpretiert.

Variation 6: Mehrschrittige Aufgabe und Aktivierung inhaltlicher Vorstellungen

Setze zwischen die Zahlen die Zeichen <, > oder = ein.

40,15 ___ 40,2 0,05 ___ 0,5

10,700 ___ 10,70

Setze ein: > , < oder =

$\frac{7}{15}$ $\frac{7}{16}$

Ordne der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.

$\frac{2}{9}$ $\frac{12}{3}$ $\frac{2}{5}$ 1

Aufgabe 4

Gib drei Brüche an, die zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ liegen.

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Bei diesen Aufgaben müssen Brüche zunächst in eine Form umgewandelt werden, in der sich die Ordnungsbeziehung gut erkennen lässt. Sie sind in diesem Sinne mehrschrittig und erfordern damit eine Verknüpfung von Fähigkeiten.

Ein inhaltliches Verständnis von Brüchen erfordern sie insofern, als Brüche als Zahlen am Zahlenstrahl betrachtet oder inhaltlich (z. B. als Anteile) interpretiert werden müssen, um sie nach der Größe ordnen zu können.

Variation 7: Verbalisierung von Verfahren: Inhaltliche Vorstellungen und Argumentieren/Begründen (Aufgabenformat)

Auf welchem Rechenweg erhält man ein Viertel von 28? Kreuze an.

a) 28 - 4 b) 28 : 7 c) 28 : 4 d) 28 * 4

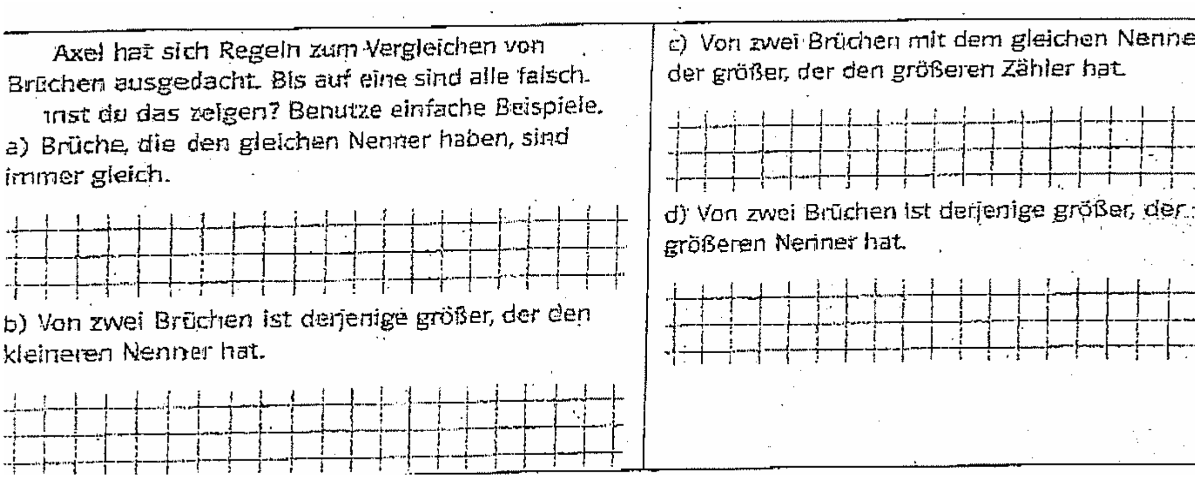
210	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe erfordert eine Reflektion und eine Erklärung des mathematischen Begriffs „Viertel“ und dem Verfahren, wie man ein Viertel „von etwas“ bestimmen kann. Insofern dies auf mathematischer Ebene z. B. die Grundvorstellungen „Teil eines Ganzen“ bzw. die „Operatorvorstellung“ von Brüchen thematisiert, kann hier von einer Aktivierung inhaltlicher Vorstellungen gesprochen werden.

Erkläre, wie man einen Bruch in eine Prozentzahl umwandelt.

100	Aufgabenformat	Text
3a	Argumentieren/Begründen	Argumentation/Verbalisierung notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Schülerinnen und Schüler erklären bei dieser Aufgabe ihre Vorgehensweise beim Umwandeln von Brüchen mit eigenen Worten. In derselben Weise wie bei der oberen Aufgabe kann von einer Aktivierung inhaltlicher Deutungen von Brüchen und Prozentzahlen gesprochen werden. Das Antwortformat dieser Aufgabe ist eine durchaus anspruchsvolle Erläuterung eines mathematischen Verfahrens.


Axel hat sich Regeln zum Vergleichen von Brüchen ausgedacht. Bis auf eine sind alle falsch.
nst du das zeigen? Benutze einfache Beispiele.

a) Brüche, die den gleichen Nenner haben, sind immer gleich.

b) Von zwei Brüchen ist derjenige größer, der den kleineren Nenner hat.

c) Von zwei Brüchen mit dem gleichen Nenne der größer, der den größeren Zähler hat.

d) Von zwei Brüchen ist derjenige größer, der größeren Nenner hat.

200	Aufgabenformat	Text
3b	Argumentieren/Begründen	Argumentation/Verbalisierung am Beispiel notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe erfordert ausgeprägte Vorstellungen der thematisierten mathematischen Objekte und Verfahren. Da davon ausgegangen werden kann, dass für die Lösung der Aufgabe Grundvorstellungen von Brüchen aktiviert werden müssen – auch wenn sie inhaltlich hier nicht angesprochen werden – erfordert das Erklären und das Finden von Beispielen eine inhaltliche Deutung von Brüchen. Schülerinnen und Schüler argumentieren hier auf hohem Niveau anhand selbst zu suchender geeigneter Beispiele.

Variation 8: Realitätsbezug (Einfaches Modellieren)

Andrea will ihre Oma mit dem Fahrrad besuchen. Die Strecke ist 35 km lang. Andrea hat bereits 3/5 der Strecke zurückgelegt. Wie viele Kilometer muss sie noch fahren?

110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Modellierungscharakter	Mathematisierung
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe erfordert in ganz elementarer Form ein Modell, mit dem der Sachverhalt mathematisch dargestellt werden kann. Hierfür müssen Grundvorstellungen zu Brüchen aktiviert werden: z. B. der Bruch als „Teil eines Ganzen“ oder als „relativer Anteil“.

Variation 9: Realitätsbezug (Mehrschrittiges Modellieren)

Aufgabe 4: a) Von meinem Geld gebe ich am ersten Tag $\frac{1}{4}$, am zweiten $\frac{2}{5}$, am dritten $\frac{1}{6}$ des ursprünglich vorhandenen Geldes aus. Welcher Anteil bleibt übrig? Wieviel Geld habe ich noch, wenn ich anfangs 60 € hatte?

5. Ein Gymnasium hat 900 Schüler und Schülerinnen. $\frac{4}{5}$ der Schüler und Schülerinnen besuchen die Sekundarstufe II. An einem Mathematikwettbewerb haben $\frac{5}{18}$ aller Schüler und Schülerinnen teilgenommen. Davon waren.. $\frac{2}{5}$ Jungen.

a) Wie viele Schüler und Schülerinnen besuchen die Sekundarstufe I ?

b) Wie viele Jungen haben am Wettbewerb teilgenommen?

Fünf Achtel der Mitglieder eines Sportvereins spielen Fußball. Ein Drittel der Fußballspieler, das sind 20 Personen, spielen auch Volleyball. Wie viele Mitglieder hat dieser Verein?

110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Modellierungscharakter	Mathematisierung
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Modellierungsaufgaben sind mehrschrittig und erfordern in besonderem Maße Grundvorstellungen zu Brüchen, um eine Multiplikation von Brüchen bzw. das Berechnen von „Anteilen von Anteilen“ im Sinne des Textes inhaltlich zu deuten. Das Entnehmen und Deuten der für das mathematische Modell relevanten Informationen aus den Texten und das Erkennen von „Multiplikation“ als zielführendes mathematisches Modell kann als elementare Modellierungskompetenz (Mathematisierung) gewertet werden.

1.Australien besteht zu $\frac{1}{25}$ aus Ackerland, zu 5% aus Wald, zu 60% aus Weideland und im Übrigen aus Ödland, vor allem Wüste. / 6
a) Welcher Bruchteil der Gesamtfläche ist dies?
b) Zeichne ein geeignetes Viereck und stelle die Anteile farbig dar.

Ayers Rock, Australien

110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Modellierungscharakter	Mathematisieren
1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Betrachtung des Aufgabenteils b): Das Rechnen mit Prozentzahlen und Bruchzahlen wird hier in einen realitätsnahen Kontext eingebettet. Die Informationen aus dem Text sollen explizit in ein mathematisches Modell (Viereck) übertragen werden. Das Antwortformat ist damit eine Darstellung, deren Anfertigung die Fähigkeit zu einer inhaltliche Deutung von Brüchen voraussetzt.

Natürlich lässt sich der Aufgabentyp „Text- und Modellierungsaufgabe“ noch vielfältig variieren (s. weiter unten).

Variation 10: Offenere Aufgabe und Modellierung

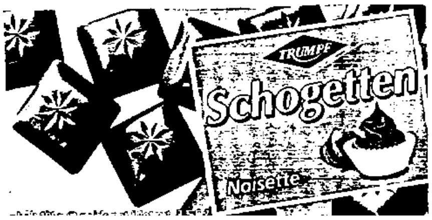
Wie viele Kinder können hier mitessen,
wenn jedes Kind eine ¾ Pizza bekommt?

111	Aufgabenformat	Text, Zahl, Abbildung
010	Offenheit	Lösungsweg offen
2	Modellierungscharakter	Mathematisierung
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Um diese Aufgabe zu lösen, sind mehrere Lösungsstrategien (Zeichnung (Nutzung der Abbildung), Addition, Multiplikation oder Division) denkbar. Die gegebene Situation muss (in elementarer Weise) mathematisiert werden und aktiviert hierfür z. B. die Grundvorstellungen „Bruch als Teil eines Ganzen“ sowie die Grundvorstellung des Aufteilens bzw. Verteilens. Die Aufgabe hat daher Modellierungscharakter.

Variation 11: Modellieren und Argumentieren/Begründen

In dieser Packung waren 18 Stückchen Schokolade,
$\frac{2}{3}$ der Stücke sind bereits entnommen worden.
Wie viele Stücke sind noch in der Schachtel?
Erläutere deinen Lösungsweg.



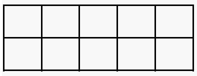
110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Modellierungscharakter	Mathematisieren
2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Modellierungsaufgabe aktiviert ebenfalls die Grundvorstellung von Brüchen als „Teil eines Ganzen“ bzw. als „relativer Anteil“. Als Antwort wird neben dem Ergebnis auch eine Erläuterung des Lösungswegs erwartet. Prinzipiell wären auch bei dieser Aufgabe unterschiedliche Strategien zur Lösungsfindung möglich.

3. Interpretieren von Bruchteilen

Grundaufgabe: „Färben von Bruchteilen“

Färbe 2/10 der Fläche!



10	Stoffgebiet	Arithmetik
101	Aufgabenformat	Zahl, Abbildung
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Dieser klassische Aufgabentyp aus der Arithmetik verknüpft auf einfache Weise das zentrale Thema „Brüche“ mit inhaltlichen Vorstellungen. Schülerinnen und Schüler interpretieren einen vorgegebenen Bruch als Anteil einer vorgegebenen Figur/Abbildung und färben entsprechend. Die Aufgaben entsprechen einem bekannten Format, haben keinen Problemlöseanteil und sind einschrittig.

Variation 1: Graphische Darstellungsform der Aufgabenstellung (Aufgabenformat)

Welcher Bruchteil ist schwarz gefärbt?

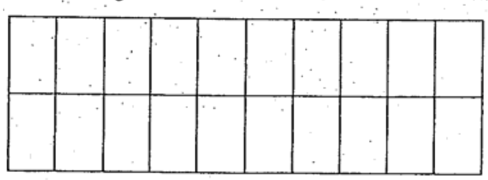
002	Aufgabenformat	Abbildung
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig

Diese Aufgabe dreht die „Ausgangsaufgabe“ um: Die Informationen müssen einer Abbildung entnommen werden, das Antwortformat ist eine Zahl (Bruch), keine Färbung/Zeichnung.

Dieser Aufgabentyp lässt sich noch auf verschiedene Weise variieren (s. weiter unten).

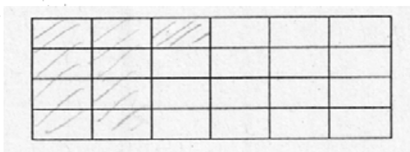
Variation 2: Mehrschrittige Aufgabe

Färbe den geforderten Bruchteil im Rechteck ein!



Färbe $\frac{3}{10}$ vom Rechteck

Markiere $\frac{3}{8}$ der Fläche.



012	Aufgabenformat	Zahl, Abbildung
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
(1)	Problemlöseanteil	(ja)

Die beiden vorgegebenen Figuren weisen nicht die Anzahl von Feldern auf, die im Bruch im Nenner steht und machen die Aufgabe dadurch komplizierter. Die Grundvorstellung „Teil eines Ganzen“ kann nicht unmittelbar auf die Zeichnung übertragen werden. Was das „Ganze“ ist, müssen Schülerinnen und Schüler anhand der Zeichnung festlegen. Diese Mehrschrittigkeit der Aufgabe kann als Problemlöseanteil gewertet werden, wenn die Lernenden dies nicht bereits geübt haben.

Variation 3: Offenere Aufgabe (Aufgabenformat)

Stelle folgenden Bruch zeichnerisch dar

$\frac{2}{5}$

010	Aufgabenformat	Zahl
001	Offenheit	Endzustand offen

Eine Öffnung erfährt die Aufgabe in dieser Form. Den Schülerinnen und Schülern ist freigestellt, ob sie eine Pizza, ein Rechteck, ein Wasserglas, eine Gruppe von Kindern o. ä. zeichnen möchten, um den Bruch – und damit auch ihre Grundvorstellung von Brüchen – darzustellen.

Variation 4: Offenere und mehrschrittige Aufgabe (Aufgabenformat)

Zeichne ein Rechteck und färbe eine Fläche ein.
Finde nun einen hierzu gleichgroßen Bruch.

Nimm **einen** Nenner größer 10.

100	Aufgabenformat	Text
011	Offenheit	vielfältige Lösungsweg, Endzustand offen
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Bei dieser Aufgabe können Schülerinnen und Schüler ein beliebiges Rechteck und einen beliebigen Bruch wählen. Die Aufgabe erfordert nicht nur eine Interpretation eines Bruchs wie in der Grundaufgabe, sondern auch ein inhaltliches Verständnis der Gleichwertigkeit von Brüchen. Die Aufgabe kann auf unterschiedliche Weise, z. B. durch Verfeinern der Einteilung, durch Rechnung o. ä., gelöst werden.

Variation 5: Mehrschrittige Aufgabe und Argumentieren/Begründen

Zwei Schüler haben die Bruchteile in den Rechtecken (3cm breit und 5 cm hoch) farbig angemalt und stellen fest, dass die Flächen gleichgroß sind.

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

Zeichne diese Rechtecke und teile sie so auf, dass man den Bruch mit dem größeren Nenner erkennen kann.

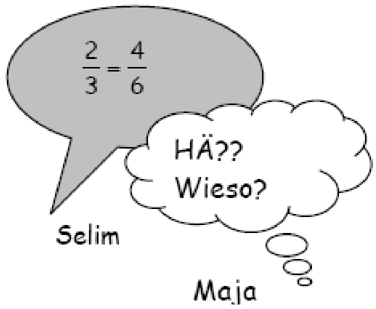
Färbe nun die angegebenen Bruchteile ein und erkläre mit einem Satz, warum diese gleich sind.

110	Aufgabenformat	Text, Bild
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
3b	Argumentieren/Begründen	Argumentation/Verbalisierung an Darstellung notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe aktiviert neben einer inhaltlichen Vorstellung von Brüchen als „Teil eines Ganzen“ auch eine Vorstellung der „Gleichwertigkeit von Brüchen“. Die in der Aufgabenstellung geforderte Erklärung kann als anspruchsvoll bezeichnet werden, da sie anhand einer selbst erstellten Skizze erfolgt.

Variation 6: Offenere, mehrschrittige Aufgabe und Argumentieren/Begründen

Selim behauptet, dass $\frac{2}{3}$ genau so groß ist wie $\frac{4}{6}$, aber Maja glaubt ihr das nicht. Kannst Du ein Bild malen oder eine Situation beschreiben, die die Gleichheit erklärt? (nicht ausrechnen, sondern erklären!)
Kennst Du noch zwei andere Brüche, die denselben Wert haben?



110	Aufgabenformat	Text, Zahl
001	Offenheit	Endzustand offen
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittige Aufgabe
3b	Argumentieren/Begründen	Argumentieren/Verbalisieren am Beispiel
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe „kehrt“ in gewisser Weise die vorvorherige „um“ und öffnet die vorherige: Die beiden Brüche, deren Gleichwertigkeit gezeigt werden soll, sind vorgegeben, dafür ist komplett freigestellt, wie die Gleichwertigkeit der Brüche erklärt werden kann.

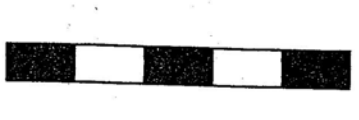
Variation 7 : Mehrschrittige Aufgabe und Problemlöseanteil

Zeichne ein Rechteck, trage darin die beiden folgenden Bruchteile an und kennzeichne sie farbig: 3/12 (rot), 3/8 (blau)

110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
1	Problemlöseanteil	ja
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe lässt offen, wie groß das Rechteck sein soll, in dem die Bruchteile eingetragen werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen also entweder bemerken, dass sich der erste Bruch kürzen lässt oder dass sie eine Einteilung finden müssen, die sich sowohl durch 12 als auch durch 8 teilen lässt. Dies kann insofern als Problemlöseanteil gewertet werden, als hierfür Strategien wie systematisches Probieren und Verändern (der Einteilung) nützlich bzw. nötig sein können.

Grundaufgabe: „Erkennen von Bruchteilen“



Welcher Bruchteil ist schwarz gefärbt?

10	Stoffgebiet	Arithmetik
102	Aufgabenformat	Darstellung
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Die Aufgabenstellung ist eine Abbildung, der die für die Lösung relevanten Informationen entnommen werden müssen. Das Lösen der Aufgabe ist einschrittig und erfordert eine inhaltliche Interpretation von Brüchen, hier z. B. als „Teil eines Ganzen“.

Variation 1: Vernetzung mit Größen (Inhaltliche Vorstellungen)

13) Schreibe ...

a) 20 min, 6 min, 15 min, 30 min, 12 min als Bruchteile von 1 Stunde (h)!

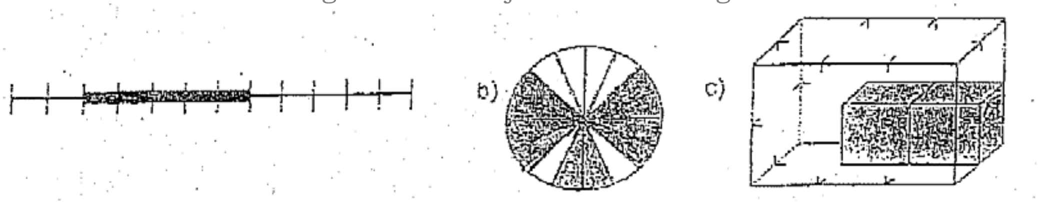
z.B. 5 min. $= \frac{5}{60}h = \frac{1}{12}h$

110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe aktiviert explizit die Vorstellung von Brüchen als „relative Anteile“ von Größen.

Variation 2: Vernetzung mit räumlichen Vorstellungen (Inhaltliche Vorstellungen)

Welcher Bruchteil der Figuren ist hier jeweils schwarz gefärbt?

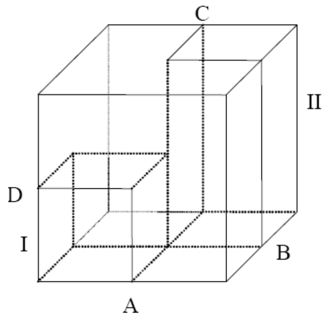


12	Stoffgebiet	Arithmetik, Geometrie
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

In dieser Variante der Aufgabe werden nicht nur zweidimensionale sondern auch ein- und dreidimensionale Bruchteile bestimmt. Eine räumliche Vorstellung der Figuren ist hierfür nötig.

Variation 3: Vernetzung mit räumlichen Vorstellungen (Umgang mit Einheiten)

14) Der ganze Würfel steht für $1m^3$. Gib die Bruchteile I) und II) an.



I: ____ m^3

II: ____ m^3

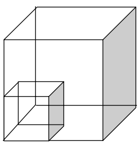
12	Stoffgebiet	Arithmetik, Geometrie
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Eine Vernetzung inhaltlicher Deutung von Brüchen, Raumvorstellung und dem Umgang mit Größen liefert diese Aufgabe.

Variation 4: Vernetzung mit räumlichen Vorstellungen (mehrschrittige Aufgabe)

a) Welchen Anteil stellt der kleine Würfel vom großen Würfel dar? Begründe Deine Antwort!

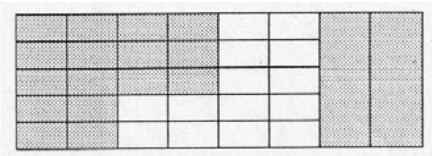
b) Wie viele solcher kleiner Würfel wären nötig, wenn 50% des großen Würfels ausgefüllt werden sollen?



12	Stoffgebiet	Arithmetik, Geometrie
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Um diese Aufgabe zu bearbeiten ist ein grundlegendes Raumverständnis nötig. Der Bruch wird wieder inhaltlich interpretiert als Teil eines Ganzen. Der Aufgabenteil b) ist insofern mehrschrittig, als die Angabe 50% zunächst als eine „Hälfte des Volumens“ interpretiert werden müssen, um anschließend die richtige Menge kleiner Würfel angeben zu können.

Variation 5: Mehrschrittige und offenere Aufgabe

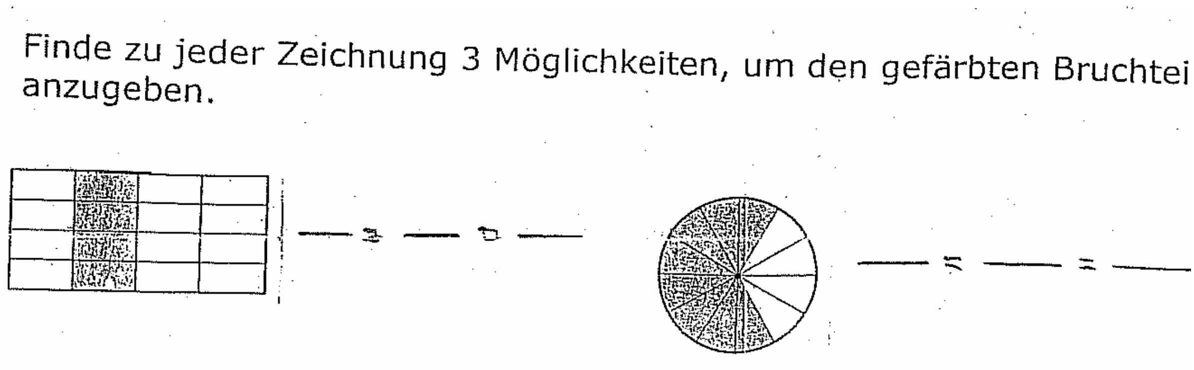


b.) Welche Aufgabe wird im folgenden Bild durch die eingefärbte Fläche dargestellt? Stelle einen Term auf und berechne ihn!

001	Offenheit	Endzustand offen
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Schülerinnen und Schüler müssen bei der Bearbeitung dieser Aufgabe selbständig Bruchteile ermitteln und anschließend einen Term aufstellen (Addition oder Subtraktion) und berechnen. Die Aufgabe ist daher mehrschrittig, und es gibt mehr als nur eine Lösung. Sie bindet die Grundanforderung „Erkennen von Bruchteilen“ in einen flexibleren Umgang mit Bruchteilen ein.

Variation 6: Vielfältigkeit der Lösungswege und Aktivierung inhaltlicher Vorstellungen



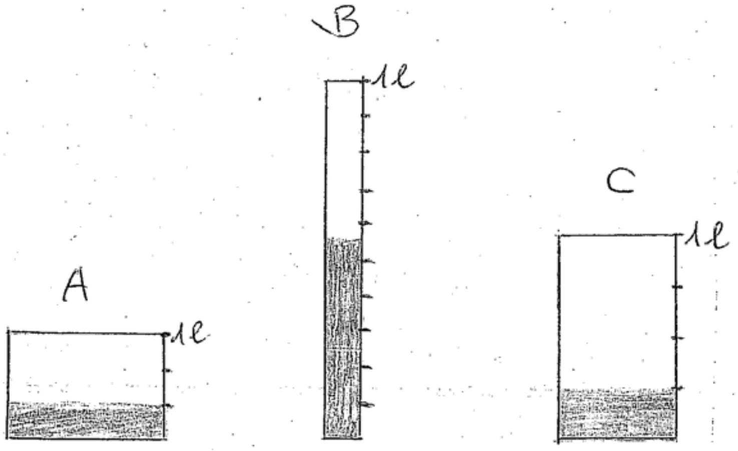
001	Offenheit	Endzustand offen
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe thematisiert in besonderem Maße die unterschiedlichen Möglichkeiten, einen Bruchteil anzugeben. Die Aufgabe erfordert damit eine intensive Aktivierung von Grundvorstellungen zu Brüchen insbesondere zur „Gleichwertigkeit von Brüchen“ und ist insofern mehrschrittig.

Variation 7: Aktivierung und inhaltliche Vorstellungen (Realitätsbezug)
und Argumentieren/Begründen

Beantworte mit Hilfe der 3 Skizzen folgende Fragen:

1a) In welchem Gefäß befindet sich am meisten Wasser?
b) In welchem Gefäß befindet sich am wenigsten Wasser?
2. Das Wasser aus Gefäß C wird in Gefäß B gegossen. Wie hoch steht dort dann das Wasser? Zeichne es ein.



Begründe deine Antworten!

102	Aufgabenformat	Text, Darstellung
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Modellierungscharakter	Mathematisierung
2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe aktiviert in besonderem Maße inhaltliche Interpretationen von Brüchen. Das Ordnen von Brüchen geschieht anhand ihrer Interpretation als „Wasserstand" in einem 1l-Gefäß und Aufgabenteil 2) gibt sogar eine inhaltliche Interpretation der Addition von Brüchen vor, die die Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten der Aufgabe nachvollziehen.

Variation 8: Mehrschrittige Aufgabe und Realitätsbezug (Modellieren)

1.Australien besteht zu $\frac{1}{25}$ aus Ackerland, zu 5% aus Wald, zu 60% aus Weideland und im Übrigen aus Ödland, vor allem Wüste. / 6

a) Welcher Bruchteil der Gesamtfläche ist dies?

b) Zeichne ein geeignetes Viereck und stelle die Anteile farbig dar.

Ayers Rock, Australien

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Modellierungscharakter	Mathematisierung
1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig
3	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Betrachtung des Aufgabenteils b): Die realistischen Informationen des Textes müssen in ein mathematisches Modell (Viereck) übertragen werden. Diese Aufgabe erfordert daher neben dem mehrschrittigen, flexiblen Umgang mit Prozentzahlen und Bruchzahlen eine Grundvorstellung des Anteil-Nehmens und Addierens.

4. Runden und Schätzen

Grundaufgabe: „Runden“

Runde 7899 und 7490 auf Tausender.
Runde 0, 8735 auf zwei Stellen hinter dem Komma.

10	Stoffgebiet	Arithmetik
010	Aufgabenformat	Zahl
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Große Zahlen oder Dezimalzahlen sollen gerundet werden. Die Aufgaben sind einschrittig und erfordern lediglich Kenntnisse der Rundungsregeln, jedoch keine Größen- oder Ordnungsvorstellungen. Sie aktivieren keine inhaltliche Interpretation.

Variation 1: Mehrschrittige Aufgabe

Berechne schriftlich!
Runde anschließend die Ergebnisse der Aufgaben a.) und b.) auf zwei Stellen hinter dem Komma.

a.) 317,8 + 0,385 + 75   b.) 20 - 1,456 - 2,8411

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig

Dieser klassische Aufgabentyp ist mehrschrittig: Nach der Berechnung des Terms soll das Ergebnis gerundet werden: Die Aufgabe verknüpft somit mehrere Fertigkeiten.

Variation 2: Umkehraufgabe und Realitätsbezug

5. Zu einem Fußballspiel kamen rund 45000 Zuschauer (auf Tausender gerundet).
Die genaue Zahl der Zuschauer lag zwischen:

❍ 44000 und 46000 ❍ 44001 und 45099
❍ 44500 und 45499 ❍ 40001 und 49999

Zu einem Konzert kamen rund 7000 Zuschauer (auf Tausender gerundet).
Wie viele Zuschauer könnten es gewesen sein? Kreuze alle möglichen Lösungen an.
☐ 6430 ☐ 7319 ☐ 7502 ☐ 6872

(1)	Problemlöseanteil	(ja)
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgaben sind im Prinzip die Umkehraufgaben der Grundaufgabe. Wenn dieses umgekehrte Vorgehen nicht geübt wurde, kann dies als Problemlöseanteil gewertet werden. Die Aufgaben stellen einen authentischen Realitätsbezug her, da in diesen Kontexten (Konzert, Fußballspiel) tatsächlich häufig gerundete Zahlen genannt werden. Modellierungskompetenzen sind bei dieser Aufgabe nicht nötig: Das mathematisches Modell ist bereits vorgegeben, es muss nicht gefunden werden.

Variation 3: Inhaltliches Verständnis und Realitätsbezug

Welche Zahlen dürfen auf keinen Fall gerundet werden? Warum?

a) Telefonnummer: 72 64 52

b) Flusslänge: 6784 km

c) Schuhgröße: 43

d) Kontonummer: 45 678 002

e) Einwohnerzahl einer Stadt: 143 673

100	Aufgabenformat	Text
5	Modellierungscharakter	Validierung
2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Bei dieser Aufgabe wird die authentische Einbettung von Rundungs-Fragen als Anlass für die Frage genommen, in welchen Kontexten das Runden sinnvoll ist, wann und was darf man nicht runden? Dies wird hier als Reflektion und insofern als „Validierung eines mathematischen Modells“ gewertet: Schülerinnen und Schüler müssen Sinn und Anwendbarkeit der mathematischen Operation „Runden“ bewerten und begründen.

Grundaufgabe: „Schätzen“

Schätze!

a) die Höhe deines Klassenzimmers,
b) die Länge und Breite deines Mathematik-Lehrbuchs,
c) die Dauer des Pausenzeichens des Schulgongs,
d) die Fläche eines 10-€-Scheins (in cm²).

10	Stoffgebiet	Arithmetik
100	Aufgabenformat	Text
001	Offenheit	Endzustand offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Diese Aufgabe fragt im einschrittigen, isolierten Format eine wichtige, aber oft vergessene Fertigkeit ab: das Schätzen. Lernende brauchen dazu Stützpunktvorstellungen (elementare Größenvorstellungen).

Variation: Offene, mehrschrittige Aufgabe, Argumentieren/Begründen und Modellierung (Fermi-Aufgabe)

Wie groß müsste der Mensch sein,
der den nebenstehend abgebildeten Schuh tragen könnte?
Erläutere Deinen Lösungsweg!

102	Aufgabenformat	Text, Abbildung
111	Offenheit	Aufgabe offen
(3)	Komplexität/Kompliziertheit	(komplex)
3	Modellierungscharakter	Strukturierung und Mathematisierung
2	Argumentieren/Begründen	Begründung/Erläuterung notwendig
(1)	Problemlösanteil	(ja)
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Bei dieser Aufgabe müssen Schülerinnen und Schüler das mathematische Modell der Aufgabe selbst finden und hierfür nötige Annahmen selbst einführen, wozu Stützpunktvorstellungen unbedingt notwendig sind. Das Rechnen mit gerundeten und geschätzten Werten ergibt sich somit aus dem Charakter der Aufgabenstellung. Die Kompliziertheit/Komplexität bzw. der Problemlöseanteil der Aufgabe hängt von der jeweiligen Wahl des Lösungsweges ab – die Aufgabe ist jedoch in jedem Fall mehrschrittig und erfordert inhaltliches Verständnis mathematischer Vorgehensweisen. Es sind unterschiedliche Lösungen möglich.

5. Text- und Modellierungsaufgaben

Grundaufgabe: „Text- und Modellierungsaufgaben“

Stefan bestellt 17 CDs. Er muss 187 Euro bezahlen. Wie teuer ist eine CD?

10	Stoffgebiet	Arithmetik
110	Aufgabenformat	Text, Zahl
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
2	Modellierungscharakter	Mathematisierung
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Diese Grundaufgabe bettet eine einfache Rechnung in einen realistischen Kontext ein. Die Fragestellung erwartet weder eine Begründung noch eine Verbalisierung von Sachverhalten. Zum Lösen der Aufgabe ist in ganz elementarer Form ein Modell erforderlich, mit dem der Sachverhalt mathematisch dargestellt werden kann. Hierfür müssen Grundvorstellungen zu einfachen mathematischen Operationen – hier zur Division – aktiviert werden.

Variation 1: Mehrschrittige Aufgaben und Verbindung mit Brüchen

Julia hat für den Ausflug zu einem Tierpark 10,50 € gespart.

Die Zugfahrt kostete 4,40 €, der Eintritt betrug 1,50 €, der Prospekt für den Tierpark kostete 50 Cent und für Tierfutter gab sie 1,30 € aus.

Zu Mittag möchte sie einen Salatteller für 2,05 € und ein Getränk für 0,65 € kaufen.

a) Wie viel € hat sie vor dem Mittagessen ausgegeben?

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe nutzt den realistischen Kontext, um das Rechnen mit einfachen Dezimalbrüchen einzubetten. Zur Lösung der Aufgabe müssen Schülerinnen und Schüler ein elementares mathematisches Modell entwickeln. Die Anzahl der genannten Werte und die Frage „Wie viel Euro Julia **vor** dem Mittagessen ausgegeben hat“ erfordert ein genaues Lesen des Textes.

Sechs Freunde gehen in eine Pizzeria. Sie haben Geld für 4 ganze Pizzen zusammengeworfen.

a) Wie viel bekommt jeder einzelne von den 4 Pizzen ab, wenn sie gerecht aufgeteilt werden? Gib eine Lösung in einem vollständig gekürzten Bruch an. Begründe deine Antwort mit einer Rechnung.

b) Wie viel muss jeder für seinen Anteil bezahlen, wenn eine Pizza 6 Euro kostet? Erläutere deine Antwort mit einer Rechnung.

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

In dieser Aufgabe sind inhaltliche Vorstellungen von Brüchen erforderlich, um das mathematische Modell zu der gegeben Situation zu entwickeln. Neben dem Ergebnis wird auch eine Erläuterung durch den Rechenweg erwartet.

Variation 2: Argumentieren und Begründen

- Die 30 Schüler der Klasse 6e wollen den Zoo in Hannover besuchen. Der Klassenlehrer Herr Tierfreund sammelt von jedem Schüler 23 € ein. Für den Bus müssen 350 € bezahlt werden. Der Eintritt im Zoo kostet für jeden Schüler 9,50 €. Jeder Schüler bekommt im Zoo ein Eis für 1,50 €. Einige Schüler möchten noch einen Zooaufkleber für 50 Cent haben. Wie viele Aufkleber kann Lehrer Tierfreund von dem eingesammelten Geld noch kaufen? Erläutere Deine Lösung anhand Deines Rechenweges!

- Auf der Einkaufsliste stehen 2 Naturjoghurt, 4 Haselnussjoghurt und 1 Stück Käse. Reichen 7 € für den Einkauf? Erläutere Deine Überlegungen.

- Julia hat für den Ausflug zu einem Tierpark 10,50 € gespart. Die Zugfahrt kostete 4,40 €, der Eintritt betrug 1,50 €, der Prospekt für den Tierpark kostete 50 Cent und für Tierfutter gab sie 1,30 € aus. Zu Mittag möchte sie einen Salatteller für 2,05 € und ein Getränk für 0,65 € kaufen.
  b) Reicht Julias Geld für das gewünschte Mittagessen oder muss sie sich noch etwas leihen? Erläutere deine Antwort.

2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig

Neben dem Rechnen mit Dezimalbrüchen und dem genauen Lesen des z. T. langen Aufgabentextes erfordern diese Aufgaben eine Erläuterung anhand der eigenen Rechnung als Antwort.

Variation 3: Problemlösen

Tim und Tom haben insgesamt 36 Bücher. Wie viele Bücher hat Tim, wenn Tom 3mal so viele hat?
Er hat ______Bücher.

1

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
1	Problemlöseanteil	ja
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Diese rein mit Grundschulmathematik zu lösende Aufgabe ist dennoch eine Problemlöseaufgabe, weil den Lernenden in Klasse 5/6 kein Standardverfahren zur Lösung zur Verfügung steht. Der Divisor ist in der Aufgabenstellung nicht explizit angegeben.
Die Schülerinnen und Schüler müssen also selbst Strategien finden, um die Aufgabe zu lösen. Möglich sind hier entweder systematisches Probieren oder eine inhaltliche Strukturierung der geschilderten Situation: 4 Anteile von Büchern sind im Gespräch, davon hat Tim 3, also beginne mit 36:4.

Variation 4: Öffnung, Vielfältigkeit der Lösungen und Modellierung (Strukturierung)

Stefan bestellt zu Weihnachten für seine ganze Familie CDs. Er muss dafür 187 Euro bezahlen. Es gibt CDs zu 10, 12, 15, 17 und 25 Euro.

Wie viele CDs zu welchen Preisen könnte er gekauft haben?

011	Offenheit	vielfältige Lösungswege, Endzustand offen
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
3	Modellierungscharakter	Strukturierung, Mathematisierung
(1)	Problemlöseanteil	(ja)
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Wird die Ausgangsaufgabe der Grundaufgabe in dieser Weise geöffnet, sind mehrere Strategien zur Lösungsfindung möglich: Division, Addition und Subtraktion, Systematisches Probieren und vor allem Mischformen. Es sind in diesem Sinne unterschiedliche Modelle und Lösungen möglich.

Variation 5: einfache Modellierung (Validierung)

Eine Schule mit 437 Kindern bestellt für einen Schulausflug Busse. In einem Bus sind 53 Sitzplätze. Wie viele Busse sind nötig, wenn noch 12 Lehrkräfte mitfahren?

7	Modellierungscharakter	Mathematisierung, Validierung
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Diese Modellierungsaufgabe bettet eine sehr einfache Rechenaufgabe in einen Kontext ein, der das mathematische Ergebnis des Rechenmodells in Frage stellt: Es gibt schließlich nur ganze Busse. Für diese Aufgabe muss der Realitätsbezug ernst genommen und das Ergebnis entsprechend validiert werden. Schülerinnen und Schüler durchlaufen somit den ganzen Modellierungskreislauf (Strukturierung nicht notwendig).

Variation 6: mehrschrittige Modellierung

Lisa möchte 5 Tage Ski fahren.
Folgende Preise gibt es bei den Liftkarten:

Liftkarten

Tageskarten	35 €
Zweitageskarte (Preis für 2 Tage)	60 €
Wochenkarte (Preis für 7 Tage)	170 €

Finde die günstigste Möglichkeit für Lisa heraus!

8	Modellierungscharakter	Modellierung
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Diese Modellierungsaufgabe erfordert neben dem Aufstellen unterschiedlicher Preismodelle (Strukturierung, Mathematisierung) eine einfache Validierung der Ergebnisse, da die unterschiedlichen Kosten verglichen und bewertet werden müssen. Bei der Bearbeitung der Aufgabe sind demnach alle Tätigkeiten des Modellierungskreislaufs gefordert.

6. Größen und Einheiten

Grundaufgabe: „Rechnen mit und Umwandeln von Einheiten“

Wandle in die angegebene Einheit um:

5 km =	________	m	17 kg =	________	g	12 ct =	______	
3 m =	________	cm	42000 g =	________	kg	62 € =	______	
155 cm =	________	m	250 g =	________	kg			

10	Stoffgebiet	Arithmetik
010	Aufgabenformat	Zahl
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

In diesen Aufgaben werden Kenntnisse aus vorherigen Jahrgangsstufen und Inhalte der Jahrgangsstufen 5/6 abgefragt. Für diese Art der Umrechnung sind inhaltliche Interpretationen nicht nötig. Stützpunktvorstellungen zu Größen können hier bei der Bearbeitung als Kontrollmöglichkeit nützlich sein.

Variation 1: Realitätsbezug

Frau Müller braucht mit dem Zug für die Strecke von Bremen nach Frankfurt **4h 46min**. Herr Klein fährt mit dem Auto und braucht für die gleiche Strecke **312min**. Wer von beiden ist schneller am Ziel.

Diese Aufgabe bettet das Umrechnen von Größen in einen realistischen Kontext ein, in dem die Umwandlung dem Ziel des anschließenden Vergleiches dient. Sie ist in diesem Sinne einschrittig und verfügt nicht im eigentlichen Sinne über Modellierungscharakter, da keine Übersetzung in ein mathematisches Modell notwendig ist. Sie besitzt daher denselben Code wie die Grundaufgabe.

Variation 2: Unterschiedliche Lösungsdarstellungen (Vielfältigkeit der Darstellungen)

Kreuze die wahren Aussagen an.

☐ 13 kg = 130 g	☐ 3,5 m = 35 cm
☐ 13 kg = 1,3 t	☐ 3,5 m = 35 dm
☐ 13 kg = 130 mg	☐ 3,5 m = 0,35 km
☐ 13 kg = 0,013 t	☐ 3,5 m = 350 cm
☐ 13 kg = 13000 g	☐ 3,5 m = 35 mm

Unterstreiche die richtige(n) Lösung(en):

	46 cm		3 h 54 min
	46 dm		3 h 54 dm
4,6 m =	0,46 km	234 min =	14040 sec
	460 cm		3 h 52min 12sec
	46 mm		3,8 h

001	Offenheit	Endzustand offen

Diese Aufgaben erwarten zwar als Antwortformat nur „Kreuze“ bzw. Markierungen (Unterstreichung), jedoch thematisieren sie die prinzipielle Möglichkeit unterschiedlicher Darstellungen derselben „Größe“ und sind gleichzeitig instruktive Fehlersuchaufgaben.

Variation 3: Inhaltliche Interpretation

2 . Maßeinheiten

a) Ordne jedem Gegenstand das passende Gewicht zu

10 Liter Wasser	120 g
Lokomotive	10 kg
Fahrrad	5 g
Bleistift	120 t
Handy	25 kg
Kleinwagen	

Welcher Gegenstand bleibt übrig? ____________________

110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Eine inhaltliche Verbindung zwischen Größen und realen Objekten und damit eine elementare Grundvorstellung von Größen erfordert diese Aufgabe. Das Antwortformat ist eine (graphische) Zuordnung von Größen zu vorgegebenen Objekten.

Variation 4: Inhaltliche Interpretation und Verbindung mit Brüchen

Schreibe

b) 100 g, 10 g, 500 g, 200 g, 20 g, 250 g, 25 g, 1 g

z.B. 50 g = $\frac{50}{1000}kg = \frac{1}{20}kg$

als Bruchteile von 1kg.

2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe verbindet das Rechnen mit Größen bzw. Einheiten mit dem zentralen Thema der Klassen 5/6: der Bruchrechnung. Durch die Interpretation von bspw. 200g als Bruchteil von 1kg werden sowohl inhaltliche Vorstellungen von Brüchen (als „Teil eines Ganzen" bzw. als „relativer Anteil") aktiviert. Auch werden die Umrechnungen von Kilogramm in Gramm inhaltlich interpretiert. Wenn das Kürzen der Brüche in diesem Kontext nicht als wesentlicher Schritt zur Aufgabenlösung betracht wird, kann die Aufgabe als einschrittig bezeichnet werden.

Variation 5: Aktivierung inhaltlicher Interpretation und mehrschrittige Modellierung (Validierung)

Einer der größten Tanker der Welt kann etwa 350 000 Tonnen Öl laden. Ein Kesselwagen der Bahn fasst etwa 48 000 kg. Wie viele Güterzüge mit je 32 Wagen sind nötig, um die Ölmenge des Hochseetankers abzutransportieren? / 4

110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Kompliziertheit/Komplexität	mehrschrittig
8	Modellierungscharakter	Modellierungsaufgabe
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Bei dieser Aufgabe sind Grundvorstellungen von Größen nötig, um ein zielführendes mathematisches Modell aufzustellen (Strukturierung, Mathematisierung). Die (möglicherweise geringfügig unterschiedlichen) Modelle enthalten jeweils mindestens eine Multiplikation und eine Division, weshalb die Aufgabe als mehrschrittig und kompliziert (da mit großen Zahlen gerechnet werden muss) bezeichnet werden kann. Die Lösung der Modellierung muss insofern validiert werden, als auch hier beachtet werden muss, dass es nur ganze Wagen und Güterzüge mit 32 Wagen gibt.

Variation 6: Aktivierung inhaltlicher Interpretation,
Verbindung mit Runden/Schätzen und Realitätsbezug (Modellierung)

b) Der Reifenumfang beim Vorderrad meines Fahrrades beträgt 223,5 cm.
Ich fahre genau 1 Minute mit gleichbleibender Geschwindigkeit und zähle dabei insgesamt 89 Umdrehungen des Vorderrades.
Wie weit bin ich gefahren? Rechne erst genau (Ergebnis in cm) und runde dann auf Meter.
Berechne mit dieser gerundeten Zahl, welche Strecke bei gleicher Geschwindigkeit in einer Stunde zurückgelegt würde. Gib das Ergebnis in Meter und auf Kilometer gerundet an.

110	Aufgabenformat	Text, Zahl
3	Komplexität/Kompliziertheit	komplex
3	Modellierungscharakter	Strukturierung, Mathematisierung
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Der relativ komplizierte Kontext der Aufgabe erfordert ein souveränes Verständnis des Zusammenhangs der angegebenen Größen, um das zugehörige mathematische Modell zu erstellen, sowie einen souveränen Umgang mit unterschiedlichen Einheiten und großen Zahlen. Die Ergebnisse der somit durchaus komplexen Aufgabe sollen darüber hinaus gerundet angegeben werden.
Die Aufgabe zeigt im Vergleich zu der Grundaufgabe das große Spektrum an Fähigkeiten, die im Umgang mit Größen gefragt werden können.

7. Teiler, ggT und kgV

Grundaufgabe: „Teilbarkeit“

Ist die Zahl 34564 durch 3 teilbar?

10	Stoffgebiet	Arithmetik
010	Aufgabenformat	Zahl
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Diese Standard-Aufgabe zu „Teilbarkeit“ prüft einschrittig und ohne weitere prozessbezogene Kompetenzen zu aktivieren, ob Schülerinnen und Schüler die Regeln für Teilbarkeit anwenden können.

Variation: mehrschrittige Aufgabe

3.) Teilbarkeit

a) Prüfe und umkreise, wenn man die angegebene Zahl durch 2, 3 oder 5 teilen kann.

3696	2	3	5	10
4410	2	3	5	10
27333	2	3	5	10

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig

Diese Aufgabe ist insofern mehrschrittig, als die „großen“ Zahlen auf Teilbarkeit durch unterschiedliche „kleinere“ Zahlen untersucht werden müssen. Da nicht nur auf Teilbarkeit durch Primzahlen untersucht wird, sondern auch auf Teilbarkeit durch 10, können die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang zwischen der Teilbarkeit durch 2 und 5 und der Teilbarkeit durch 10 entdecken – und/oder nutzen. Als Lösung müssen nur Zahlen eingekreist werden, eine Begründung ist nicht verlangt.

Grundaufgabe: „Teiler“, „Vielfache“

Wie viele Teiler hat die Zahl 24?
Bestimme die ersten 7 Elemente der Vielfachenmenge von 13

10	Stoffgebiet	Arithmetik
010	Aufgabenformat	Zahl
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

In dieser Standard-Aufgabe zu „Teilern“ und „Vielfachen“ sollen Schülerinnen und Schüler Teilermengen und Vielfachenmengen aufstellen und abzählen bzw. als Antwort die Anzahl der Teiler einer Zahl nennen. Neben den rechnerischen Fertigkeiten wird dabei vor allem die Kenntnis der Vokabeln geprüft.

Variation 1: Argumentieren und Begründen

Julian behauptet, dass die Zahl 24 genau 7 Teiler hat und die Zahl 10 nur 3 Teiler hat.

a. Schreibe die Teilermenge auf.
b. Überprüfe Julians Behauptung. Wie könnte er darauf gekommen sein?

2	Argumentieren/Begründen	Begründung/Erläuterung notwendig
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Betrachtung von Teilaufgabe b): Diese Umformulierung der Standardaufgabe „Wie viele Teiler hat …“ aktiviert in elementarer Weise die Kompetenzen Argumentieren und Begründen, indem eine (falsche) Behauptung überprüft werden soll. Bei dieser Aufgabe werden Verfahren reflektiert, indem herausgefunden werden soll, welchen systematischen Fehler Julian begangen haben könnte.

Variation 2: Offenere Aufgabe und Verbalisierung von Verfahren

Aufgabe 6: Wie viele Teiler hat eine Zahl?

a.) Suche Dir vier Zahlen zwischen 20 und 100 und bestimme, wie viele Teiler sie hat. Wie kann man alle Teiler einer Zahl am schnellsten und sichersten finden?

b.) Findest Du auch eine Zahl, die eine ungerade Anzahl von Teilern hat? Woran könnte das liegen?

100	Offenheit	Aufgabenstellung (bedingt) offen
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
3a	Argumentieren/Begründen	Begründung/Erläuterung notwendig
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Im Aufgabenteil a) gibt diese Aufgabe nicht die Zahlen vor, zu denen Teiler gesucht werden sollen – dies sollen die Schüler hier selbst entscheiden. Auch im zweiten Aufgabenteil kann die Zahl, deren Teiler angegeben werden sollen, selbst bestimmt werden. In beiden Teilaufgaben sollen die nötigen „allgemeinen Verfahren“ reflektiert und beschrieben werden. Die Aufgaben sind in diesem Sinne mehrschrittig und setzen ein inhaltliches Verständnis der Verfahren voraus.

Grundaufgabe „kgV“ und „ggT“

Bestimme die ersten 7 Elemente der Vielfachenmenge von 12 und 16.
Bestimme nun das kgV dieser beiden Zahlen.

6) Bestimme den größten gemeinsamen Teiler (ggT): /3

		Nebenrechnungen
a)	ggT (2 ; 3) =	
b)	ggT (4 ; 10) =	
c)	ggT (12 ; 28) =	

7) Bestimme die kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV): /3

		Nebenrechnungen
a)	kgV (2 ; 3) =	
b)	kgV (6 ; 8) =	
c)	kgV (7 ; 8) =	

10	Stoffgebiet	Arithmetik
010	Aufgabenformat	Zahl
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Unter Bezugnahme auf die Teiler- bzw. Vielfachenmenge einer Zahl sollen kgV und ggT bestimmt werden. Die untere Aufgabe lässt offen, ob die Schülerinnen und Schüler kgV und ggT mit Hilfe von Teilermengen oder Primfaktorzerlegung bestimmen.

Variation 1: Komplexe Aufgabe und Problemlöseanteil

Aufgabe 1

a) Schreibe die Teilermenge der Zahl 20 auf.
b) Gib anstelle der Platzhalter a und b eine geeignete Zahl an: $kgV(a;b)=12$
c) Zerlege die Zahlen 660 und 400 in Primfaktoren und bestimme damit ihren größten gemeinsamen Teiler und ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches.

3	Komplexität/Kompliziertheit	komplex
1	Problemlöseanteil	ja

Betrachtung von Aufgabenteil b) und c): Bei dieser Variante können unterschiedliche Lösungen gefunden werden (bspw. kgV (4,3) = 12, aber auch kgV (4,6) = 12). Die Einführung zweier Variablen („Platzhalter") und der ungewohnte Aufgabentyp kann als komplexes Problem bzw. als Problemlöseanteil gewertet werden.
Der Aufgabenteil c) gibt explizit das Verfahren (Primfaktorzerlegung) vor, mit dem ggT und kgV gefunden werden sollen. Dies ermöglicht ein Umgehen mit größeren Zahlen als in der Grundaufgabe.

Variation 2: Realitätsbezug (Modellieren)

Aufgaben

1 Auf einem großen U-Bahnhof verkehren die Linien A, B, C und D. Morgens um 5 Uhr nimmt die U-Bahn ihren Betrieb auf. Alle 4 Linien starten zur gleichen Zeit. Laut Fahrplan verkehren die Linien in regelmäßigen Abständen; man sagt dazu: die Züge verkehren in einem bestimmten Takt.

Linie A	Linie B	Linie C	Linie D
5:00	5:00	5:00	5:00
6-Minuten-Takt	12-Minuten-Takt	8-Minuten-Takt	10-Minuten-Takt

Besonders viele Fahrgäste kann man erwarten, wenn mehrere Züge gleichzeitig abfahren.
a) Zu welchen Zeiten fahren alle 4 Linien gleichzeitig am Bahnhof ab?
b) Nach wie viel Minuten fahren die Linien A und C das erste Mal wieder fahrplanmäßig gemeinsam ab?
c) Wann fahren die Linien A, B und C gleichzeitig ab?

(Neue Wege 6, S. 18)

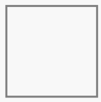
110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Modellierungscharakter	Mathematisierung
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Die Schulbuchaufgabe aus „Neue Wege 6" gibt einen realistischen, teilweise bereits strukturierten Kontext vor, zu dem das zielführende mathematische Modell die Berechnung des kgV ist. Die Lernenden benötigen Modellierungskompetenzen und reflektieren inhaltlich, was das kleinste gemeinsame Vielfache eigentlich ist und wofür seine Berechnung nützen kann.

8. Umfang, Flächeninhalt und Volumen

Grundaufgabe: „Berechnung von Umfang/Flächen/Volumen“

- Ein Quadrat hat die Seitenlänge 3,5 cm. Berechne den Umfang U und bestimme den Flächeninhalt A.



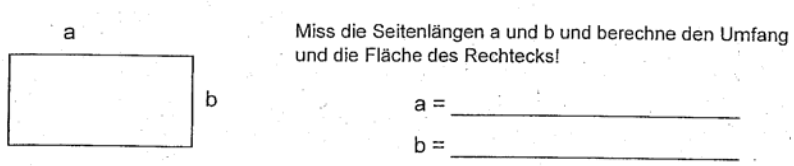
3,5 cm

- Berechne das Volumen des Quaders mit den Seitenlängen 3cm, 4cm, 5cm.

20	Stoffgebiet	Geometrie
010	Aufgabenformat	Zahl
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Bei dieser Grundaufgabe sollen nach einem Standardverfahren Umfang und Flächeninhalt eines zweidimensionalen bzw. Volumen eines dreidimensionalen (einfachen) geometrischen Körpers berechnet werden. Die Maße sind explizit in der Aufgabenstellung genannt (Aufgabenformat 010) und/oder der Skizze zu entnehmen (Aufgabenformat 001). Aktiviert werden müssen typische Kenntnisse von Umfang, Flächen und Volumen aus den Klassen 5/6.

Variation 1: Verbindung mit Messtätigkeit (Aufgabenformat)



102	Aufgabenformat	Text, Abbildung
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig

Diese Aufgabe gibt die Maße, mit denen zu rechnen ist, nicht vor, sondern verbindet die Aufgabe mit einer Messtätigkeit. Insofern fordert sie in kleinem Rahmen Werkzeugkompetenz und fördert Größenvorstellungen.

Variation 2: Umkehrung (Antwortformat) und Zulassen mehrerer Lösungen

Zeichne zwei verschiedene Rechtecke mit 24 cm^2 Flächeninhalt!
Notiere Länge und Breite jeweils in der Tabelle.

Länge	Breite	Fläche
cm	cm	24 cm^2
cm	cm	24 cm^2

001 1b	Offenheit Argumentieren/Begründen	Endzustand offen Darstellung verlangt

Diese Aufgabe dreht die Grundaufgabe um: Der Flächeninhalt ist vorgegeben, es sollen nun zwei verschiedene Rechtecke gezeichnet und die Länge ihrer Seiten angegeben werden. Prinzipiell lässt diese Aufgabenstellung in dieser Form mehrere Lösungen zu bzw. thematisiert zumindest die Möglichkeit mehrerer Lösungen.

Variation 3: Aktivierung elementarer Größenvorstellungen

10) Zeichne ein Quadrat mit Seiten von 6 cm Seitenlänge!

a) Welchen Umfang hat dieses Quadrat? U = ____________________

b) Wie viele Quadrate mit 1,5 cm Seitenlänge passen in das große Quadrat hinein, ohne dass sie sich überlagern?

Anzahl der 1,5cm-Quadrate: ________________

010 1	Offenheit Inhaltliches Verständnis	Lösungsweg offen notwendig (elementar)

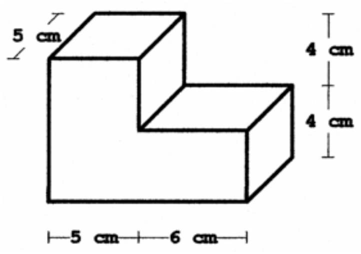
Betrachtung von Aufgabenteil b): Die Überlegung, wie viele kleine Quadrate in das große passen, lässt sich graphisch, prinzipiell aber auch mit Hilfe der angegebenen Seitenlängen rechnerisch lösen. Die Fläche des Quadrates wird daher nicht wie üblich (in cm²) sondern in der „neuen Maßeinheit“ der kleinen Quadrate angegeben. Eine Reflektion des Zusammenhangs von Seitenlänge und Fläche eines Quadrates ist erforderlich.

Variation 4: Mehrschrittige Aufgabe (Kompliziertheit)

Berechne

a) das Volumen und

b) die Oberfläche des abgebildeten Körpers.

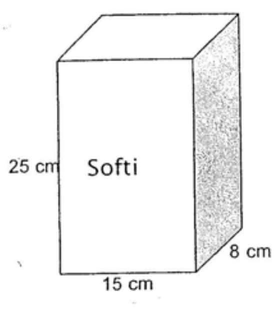


2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Diese Variante ist komplizierter als die Grundaufgabe, da sie zumindest elementare Raumvorstellungen erfordert, um die Figuren so einteilen zu können, dass dann in mehreren Schritten das Volumen berechnet werden kann.

Variation 5: Realitätsbezug (einschrittige Aufgabe)

4. Wieviel Karton wird für diese Waschmittelverpackung gebraucht?



21	Stoffgebiet	Geometrie, Arithmetik
(0)	Modellierungscharakter	(nein)
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig

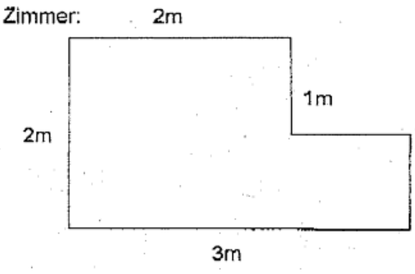
Diese Aufgabe ist eine klassische realistische Einbettung der Aufgabe, das Volumen eines Körpers zu berechnen, wobei hier mit relativ großen Zahlen gerechnet werden muss. Der Realitätsbezug erfordert es, ein mathematisches Modell zur Berechnung der Aufgabe zu erstellen, was hier jedoch nur bedeutet, die bekannte Formel zur Berechnung der Oberfläche eines Quaders als ein solches Modell zu interpretieren.

Variation 6: Realitätsbezug (Mehrschrittige Aufgabe)

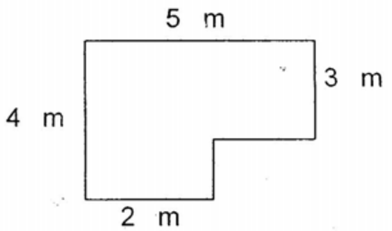
a) Wie viel m Fußleisten muss Anne kaufen?
Für die Tür muss sie 1m abrechnen.

b) Wie viel m² Teppichboden benötigt sie mindestens, um ihr Zimmer vollständig auszulegen?

Annes Zimmer:



Das gezeichnete Grundstück soll eingezäunt werden. Wieviel Meter Zaun braucht man?



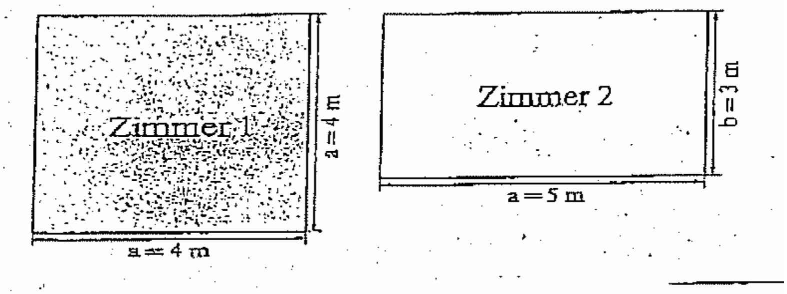
101	Aufgabenformat	Text, Abbildung
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
(0)	Modellierungscharakter	(nein)
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Bei dieser Aufgabe müssen Fläche bzw. der Umfang einer zusammengesetzten Figur, also z. B. die Fläche eines Zimmers oder die Länge eines Zaunes, berechnet werden. Da das „mathematische Modell" in Form einer vorgefertigten Abbildung bereits angegeben ist, erfordert diese Art der Einbettung in einen realistischen Kontext keine wirklichen Modellierungskompetenzen. Die Interpretation der Abbildung als „Modell" der beschriebenen Situation kann als „inhaltliches Verständnis" erfasst werden.

Die Längen einer Seite sind nicht angegeben, so dass die Schülerin sich diese aus den genannten Größen erschließen muss. Diese Mehrschrittigkeit erfordert etwas Eindenken in die Aufgabe. Da davon ausgegangen werden kann, dass Schülerinnen und Schüler diesen mehrschrittigen Aufgabentyp kennen, wird dies nicht als „Problemlöseanteil" gewertet.

Variation 7: Argumentieren/Begründen durch Größenvergleiche

Familie Neubauer ist umgezogen. Peter und Ina bekommen neue Kinderzimmer. Jeder möchte das größere Zimmer haben. Welches ist das Größere der beiden?



Familie Schmidt hat die Fußbodenbeläge in den Kinderzimmern erneuert. Die Zimmer von Stefan, Sabine und Hella sind mit Korkfliesen ausgelegt worden.

Stefan sagt: „Sabine hat es gut. Sie hat am meisten Platz in ihrem Zimmer."

Frage: Stimmt es, was Stefan sagt? ________________

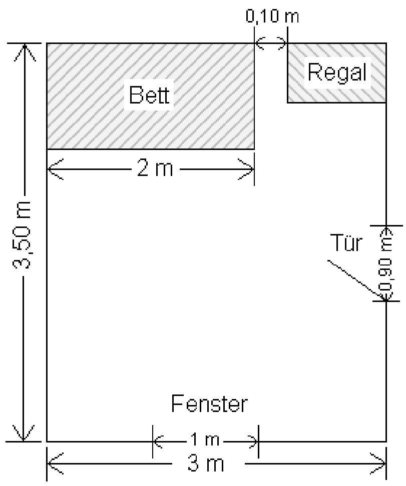
Begründung: ____

101	Aufgabenformat	Text, Abbildung
5	Modellierungscharakter	Validierung
2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Da auch bei diesen Aufgaben das mathematische Modell vorgegeben ist, kann nicht von einer wirklichen Modellierungsaufgabe gesprochen werden. Das abschließende Vergleichen der beiden Ergebnisse der Berechnung lässt sich jedoch als Validierung auffassen.
Vor allem die untere Aufgabe bettet die prinzipiell unkomplizierte Rechnung in einen Kontext ein, in dem die Lösung der Rechenaufgabe für die Argumentation notwendig ist, wer denn nun das größere Zimmer hat. Der Begründungsbedarf geht jedoch vermutlich in dem Verweis auf das (größere und kleinere) Rechenergebnis auf.

Variation 8: Mehrschrittige und realitätsbezogene Aufgabe (Modellierung)

Annes Zimmer erhält einen neuen Teppichboden und Fußbodenleisten. Die Fußbodenleisten sollen rundherum angebracht werden.



a) Wie viel m Fußbodenleisten muss Anne kaufen?

____

b) Wie viel m^2 Teppichboden benötigt sie, um ihr Zimmer vollständig auszulegen?

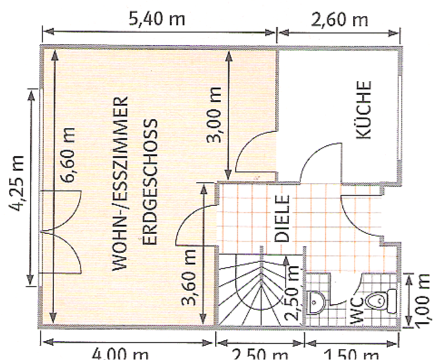
____

c) Wie breit darf das Regal neben dem Bett höchstens sein?

____

Die erste Etage der Wohnung von Familie Peters hat folgenden Grundriss.

Das Wohn-/Esszimmer soll mit Teppichboden ausgelegt werden. Ein Quadratmeter kostet 18 €. Welche Kosten entstehen?

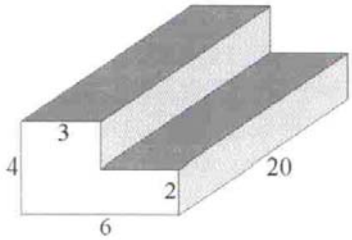


101	Aufgabenformat	Text, Abbildung
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
3	Modellierungscharakter	Strukturierung, Mathematisierung
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

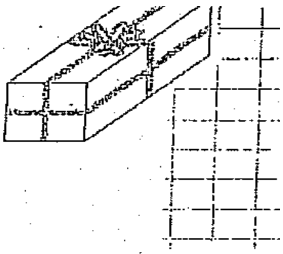
Diese Varianten der Grundaufgabe nehmen den realistischen Kontext ernst: Sie haben insofern Modellierungscharakter, als die Schülerinnen und Schüler sich mit realen Plänen auseinandersetzen und diese – unter Berücksichtigung weiterer Angaben in der verbalen Aufgabenstellung – strukturieren müssen, um die nötigen Informationen entnehmen und ein Modell für die Lösung der Aufgabe aufstellen zu können.

b) Das Treppenpodest soll rundherum angestrichen werden. Hierzu ist der Gesamtflächeninhalt zu berechnen.

(Länge der Kanten in m)



Du willst ein Geschenk für einen Freund in einem Karton mit den Maßen 10 cm, 10 cm und 30 cm verpacken. Es soll mit einem Band (siehe Bild) verschnürt werden, für die Schleife wird ein halber Meter gebraucht.
Berechne, wie viele Meter Band insgesamt notwendig sind.



101	Aufgabenformat	Text, Abbildung
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
3	Modellierungscharakter	Strukturierung, Mathematisierung
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Die Einbettung einer Grundaufgabe des Typs „Berechne den Flächeninhalt“ in einen realistischen Kontext erfordert nicht immer eine (anspruchsvolle) Modellierung, da mit einer Skizze das mathematische Modell meist vorgegeben wird. Nimmt man den Kontext der oberen Aufgabe jedoch ernst, so muss bedacht werden, dass es nicht sinnvoll ist, ein Treppenpodest unten anzustreichen und diese Fläche somit nicht berücksichtigt werden darf. So betrachtet erfordert diese Einbettung also tatsächlich ein durchdachtes mathematisches Modell.
Zur Bearbeitung der unteren Aufgabe müssen Schülerinnen und Schüler aus den Angaben in Text und Abbildung ebenfalls ein mathematisches Modell erstellen, wofür hier eine stabile Vorstellung der betrachteten geometrischen Figur (Quader) notwendig ist.

Variation 9: Mehrschrittige, geöffnete Modellierungsaufgabe

Zeichne eine Skizze Deines Traumzimmers!

Die Zimmerwände sollen nun erst einmal weiß gestrichen werden.
Berechne zunächst deinen Bedarf an Farbe (Achtung, überlege Dir dabei, ob Fenster und Türen auch gestrichen werden müssen!)

Im Baumarkt findest Du das abgebildete Angebot. Wie viele Eimer Farbe musst Du kaufen?

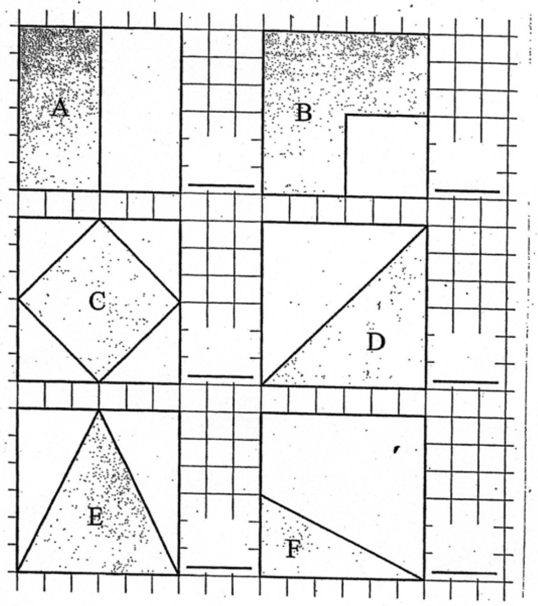
21	Stoffgebiet	Geometrie, Arithmetik
101	Aufgabenformat	Text, Abbildung
101	Offenheit	Aufgabenstellung, Endzustand offen
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
8	Modellierungscharakter	Modellierungsaufgabe
2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig
(1)	Problemlöseanteil	(ja)
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Die Bearbeitung dieser Aufgabe erfordert evtl. etwas mehr Zeit, als in einer Arbeit mit zehn Aufgaben dafür aufgewendet werden kann, sie könnte in einem anderen Format von „Parallelarbeit“ integriert sein (siehe z. B. die Parallelarbeit im Anhang).
Die Aufgabenstellung lässt offen, wie kompliziert der Grundriss des „Traumzimmers“ sein soll. Ebenfalls selbsttätig müssen Annahmen über Deckenhöhe, Türen, Fenster u. ä. gemacht werden, um ein Modell für den Gesamtfarbbedarf zu erhalten. Dabei kann es sich lohnen, manche Größen abzuschätzen und nicht präzise zu berechnen. Ist der Gesamtbedarf ermittelt, kann die Anzahl Farbeimer angegeben werden, die nötig sind. Sinnvoll sind in diesem Sinnzusammenhang nur ganze Zahlen.

Variation 10: Mehrschrittige Aufgabe und Aktivierung geometrischer Grundvorstellungen

4. Vergleiche die Flächeninhalte. / 8

a) Figur _________ hat den größten Flächeninhalt.
b) Figur _________ hat den kleinsten Flächeninhalt.
c) Der Flächeninhalt der Figuren _______________ ist gleich groß.
d) Der Flächeninhalt der Figuren _______________ ist genau doppelt so groß der Flächeninhalt der Figur _________ .
e) Der Flächeninhalt der Figur _________ ist genau dreimal so groß wie der Flächeninhalt der Figur_________ .



102	Aufgabenformat	Text, Abbildung
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
(1)	Problemlöseanteil	(ja)
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

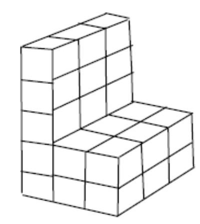
In den Aufgabenteilen a) – e) sind die (in der Aufgabenstellung verbalisierten) Fragen allein durch geschickte Einteilungen der Figuren und den Vergleich der Figuren untereinander zu beantworten. Die Berechnung der einzelnen Flächeninhalte ist nicht notwendig, wenn die Schülerinnen und Schüler stabile Vorstellungen der Flächen und Figuren haben. Je nach Vorgehen und Vorkenntnissen der Lernenden kann diese Aufgabe über einen Problemlöseanteil verfügen oder nicht.

9. Würfelbauten und Würfelnetze

Grundaufgabe: „Würfelbauten“

a.) Aus wie viel Würfeln besteht folgende Figur?

b.) Wie viele Würfel müssen bei der Figur hinzugeführt werden, damit ein vollständiger Quader entsteht?



20	Stoffgebiet	Geometrie
102	Aufgabenformat	Text, Abbildung
010	Offenheit	Lösungsweg offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Bei diesem Format der „Würfelaufgaben“ müssen Würfel in einer zusammengesetzten Figur gezählt werden, wofür eine realistische Vorstellung des perspektivisch abgebildeten Körpers benötigt wird. Der zweite Teil der Aufgabe besteht in der Frage, wie viele Würfel zu einem vollständigen Quader fehlen. Die Aufgabe lässt unterschiedliche Lösungsstrategien zu (z. B. Zählen einzelner Würfel oder das Bilden von „9er-Platten“), um die Aufgabe zu lösen und kann daher – abhängig von der gewählten Lösungsstrategie – als ein- oder mehrschrittig bezeichnet werden.

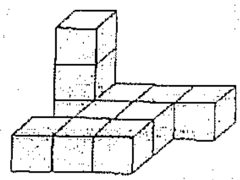
Variation 1: kompliziertere Aufgabe

12 a) Aus wie vielen Würfeln besteht die Figur?

____

b) Wie viele Würfel fehlen zum vollständigen Quader der vorgegebenen Höhe, Länge und Breite?

____



2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig

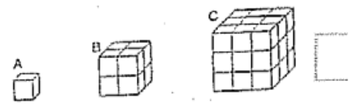
Die Figur in der Aufgabe ist grundsätzlich komplizierter als die Figur in der Grundaufgabe. Die Strategien zum „geschickten“ Lösen der Aufgabe (wie das Bilden von „9er-Platten“) sind bei dieser Variante nicht möglich.

Variation 2: Aktivierung von Grundvorstellungen (Division)

d) Vergleiche die Würfel. Wie oft passt der Würfel A in die beiden anderen Würfel hinein?

Würfel A passt in Würfel B ....mal

Würfel A passt in Würfel C ....mal



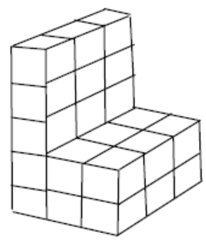
21 1	Stoffgebiet Inhaltliches Verständnis	Geometrie, Arithmetik notwendig (elementar)

Die Fragestellung: „Vergleiche die Würfel. Wie oft passt Würfel A in Würfel B?“ erfordert wieder elementare räumliche Vorstellungen, um der Abbildung die erforderlichen Informationen entnehmen und die Aufgabe lösen zu können. Die Fragestellung aktiviert darüber hinaus die Grundvorstellung vom Dividieren als „Passen in“ und stellt so eine Vernetzung zur Arithmetik dar.

Variation 3: Verbindung mit Bruchrechnung und Aktivierung von Grundvorstellungen (Brüche)

a.) Aus wie viel Würfeln besteht folgende Figur?

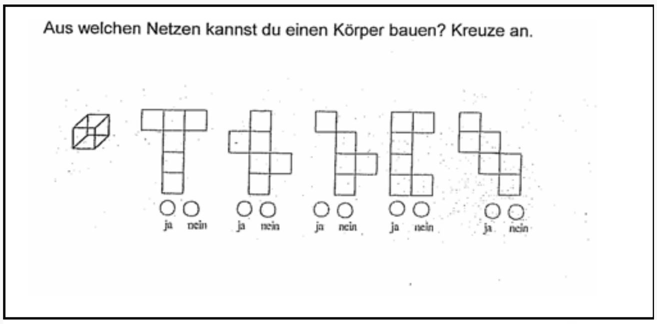
b.) Welcher Bruchteil fehlt zu einem vollständigen Quader?

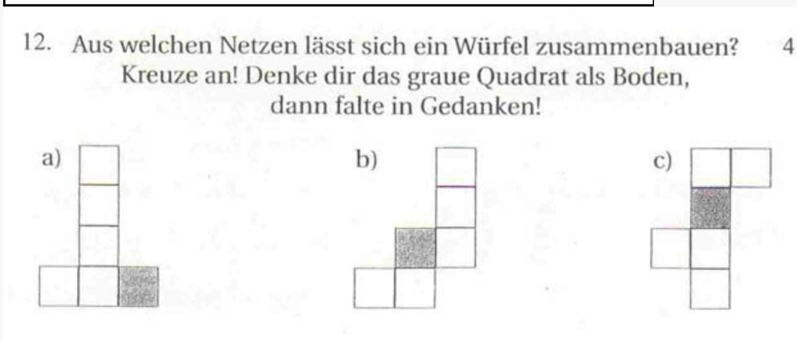


21 2	Stoffgebiet Inhaltliches Verständnis	Geometrie, Arithmetik notwendig

Diese Variante zieht auf ganz einfache Weise eine Verbindung zu einem zentralen Inhalt der Klassen 5/6: der Bruchrechnung. Der komplette Quader muss als „Ganzes“ gesehen werden und die fehlenden Würfel als „Teil des Ganzen“ interpretiert werden, um die Aufgabe graphisch oder rechnerisch zu bearbeiten. Es werden somit nicht nur räumliche Vorstellungen der betrachteten Figur, sondern auch inhaltliche Vorstellungen zu Brüchen aktiviert.

Grundaufgaben: „Würfelnetze“


Aus welchen Netzen kannst du einen Körper bauen? Kreuze an.

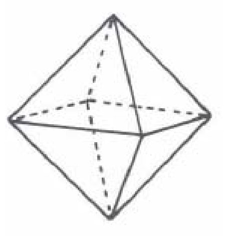

12. Aus welchen Netzen lässt sich ein Würfel zusammenbauen? 4
Kreuze an! Denke dir das graue Quadrat als Boden, dann falte in Gedanken!

20	Stoffgebiet	Geometrie
102	Aufgabenformat	Text, Abbildung
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
(1)	Problemlöseanteil	(ja)
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

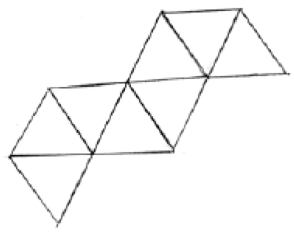
Die Aufgabe aktiviert das räumliche Vorstellungsvermögen: Schülerinnen und Schüler falten „in Gedanken“ Würfelnetze zu Würfeln zusammen. Mit genügend Übung kann dies für Lernende eine „Routinetätigkeit“ sein; ist dieser Aufgabentyp den Schülern dagegen unbekannt, kann man dies als Problemlösen betrachten.

Variation 1: Oktaedernetze

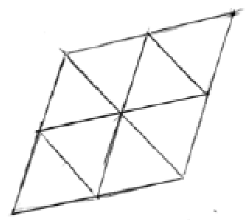
Hier siehst Du ein Oktaeder.
Lassen sich aus den unten stehenden Netzen Oktaeder bauen?



Netz A



Netz B

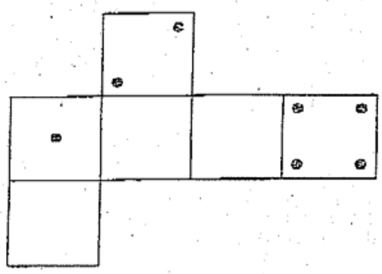


Diese Aufgabe besitzt dieselbe Codierung wie die Grundaufgabe. Die Variante gibt jedoch ein den Lernenden weniger vertrautes Objekt vor und aktiviert somit umso intensiver das Vorstellungsvermögen, das zum „Falten in Gedanken" nötig ist.

Variation 2: Antwortformat

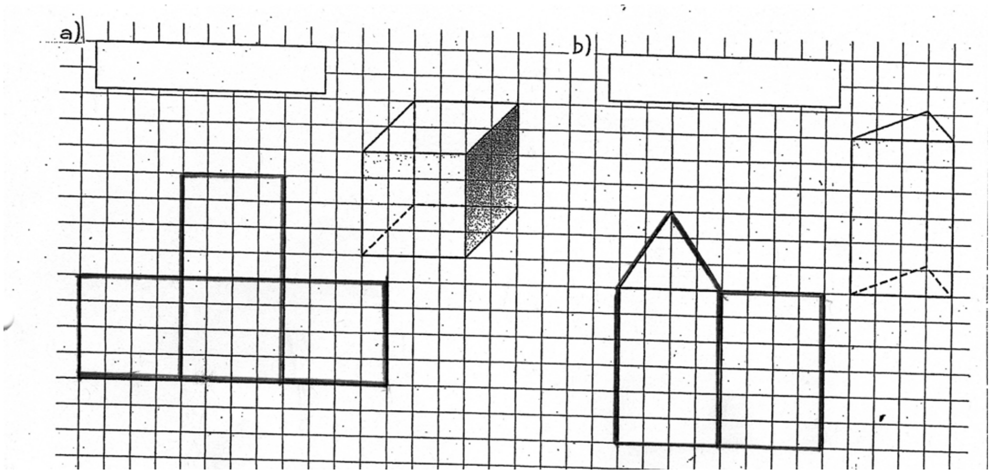
Bei einem Spielwürfel beträgt die Augensumme zweier gegenüberliegender Würfelflächen immer 7.

Ergänze die Zeichnung.



Diese Variante der Grundaufgabe nutzt die Überlegung, wie man diesen Würfel zusammen bauen kann für die Beschriftung der Würfelseiten. Das leicht veränderte Antwortformat ermöglicht prinzipiell eine Selbstüberprüfung der Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der Aufgabe (durch gedankliches „Hochklappen“).

Die Netze der abgebildeten Körper wurden nicht vollständig gezeichnet. Ergänze sie farbig. Wie heißen die Körper?



1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig

Bei dieser Variante der Grundaufgabe wird als „Antwortformat“ eine Zeichnung bzw. das Ergänzen einer Zeichnung und das Benennen der entstandenen Körper erwartet.

10. Punkte und Figuren, Drehungen und Spiegelungen

Grundaufgabe: „Einfache Zeichnungen im Koordinatensystem“

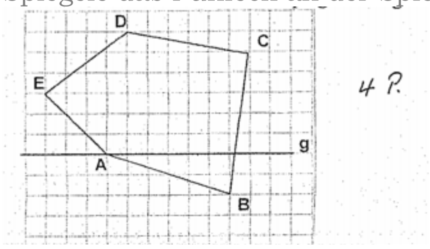
Zeichne in das Koordinatensystem das Dreieck ABC mit den Koordinaten die Punkte A(1/2), B(6/1) und C(3/5) ein. (Koordinatensystem vorgegeben)

20	Stoffgebiet	Geometrie
101	Aufgabenformat	Text, Abbildung
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Die Aufgabe erfordert Kenntnisse im Umgang mit Koordinatensystemen: Punkte müssen in einem Koordinatensystem richtig erkannt, gekennzeichnet und verbunden werden. Die Aufgabe lässt sich als einschrittig bezeichnen, sie erfordert keine weiteren prozessbezogenen Kompetenzen und auch keine inhaltlichen Vorstellungen zu den mathematischen Objekten.

Grundaufgabe: „Spiegelungen“

Spiegele das Fünfeck an der Spiegelachse g



20	Stoffgebiet	Geometrie
101	Aufgabenformat	Text, Abbildung
000	Offenheit	nicht offen
(1)	Komplexität/Kompliziertheit	(einschrittig)
0	Modellierungscharakter	nein
1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Diese Aufgabe prüft grundlegende geometrische Fertigkeiten der Klassen 5/6: Das Spiegeln von Figuren an vorgegebenen Achsen. Daher kann die Aufgabe eigentlich nicht als „kompliziert“ bezeichnet werden. Das Antwortformat ist eine Zeichnung; eine Verbalisierung der Vorgehensweise ist nicht gefordert.

Variation 1: mehrschrittige Aufgabe

Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A (1|1), B (7|2), C (2|4) und
D (4|6), E (8|8), F (7|10) und die Gerade g durch die Punkte P (0|1) und Q (4|3).

a) Zeichne das Dreieck ABC in das Koordinatensystem ein. Verwende 1 cm als 1 Einheit.

b) Spiegle das Dreieck ABC an der Spiegelachse g. Gib die Koordinaten des Bildpunktes B' an.

c) Zeichne die Punkte D, E und F ein. Ergänze den Punkt G, so dass ein Rechteck entsteht. Wie lauten die Koordinaten von G? Zeichne alle möglichen Spiegelachsen ein.

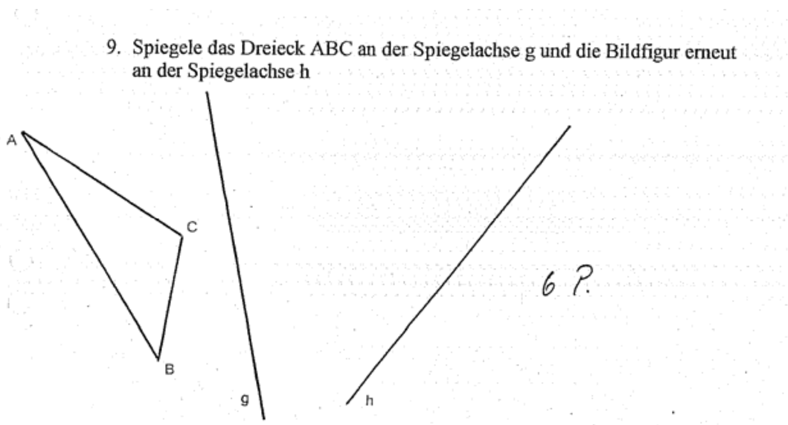
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig

Diese mehrschrittige Aufgabe verbindet den Umgang mit dem Koordinatensystem und die Fertigkeit des Einzeichnens von Figuren und Spiegeln von Figuren (Teilaufgaben a) und b)) sowie die Kenntnis von Spiegelachsen.

d) Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks DEFG. Es ist jede Lösung erlaubt, aber dokumentiere deine Lösung.

010	Offenheit	Lösungsweg (bedingt) offen
2	Argumentieren/Begründen	notwendig

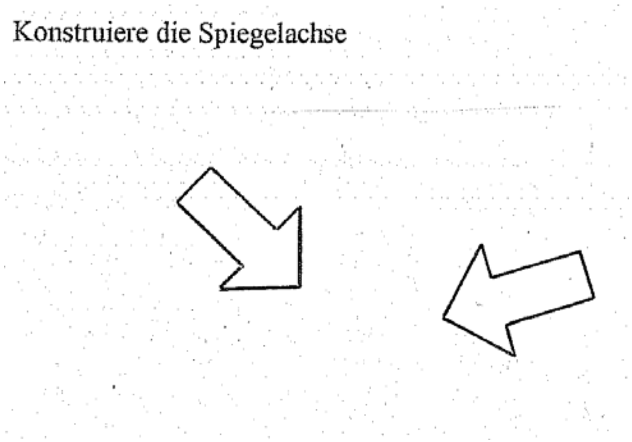
Teilaufgabe d) thematisiert vielfältige Lösungswege zur Flächenberechnung: Hier kann die Struktur des Koordinatensystems als eine Möglichkeit genutzt werden, um den Flächeninhalt des Vierecks zu berechnen. Andere Strategien werden explizit jedoch zugelassen; die Lösung muss erläutert werden.



2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig

Bei dieser Aufgabe werden zwei Spiegelungen (ohne Koordinatensystem) nacheinander ausgeführt. Dabei kann die Auswirkung des wiederholten Spiegelns (an nichtparallelen Spiegelachsen) beobachtet werden.

Variation 2: Umkehraufgabe (Aufgabenformat, Problemlöseanteil)



001	Aufgabenformat	Abbildung
1	Problemlöseanteil	ja

Diese Aufgabe ist im Prinzip die „Umkehraufgabe“ zu der Grundaufgabe „Spiegele die Figur an der Spiegelachse“: Die gespiegelten Figuren sind vorgegeben, die Spiegelachse muss konstruiert werden. Wenn die Lernenden das nicht geübt haben, hat die Aufgabe einen großen Problemlöseanteil.

Vergleiche hierzu auch die Aufgaben zur „Symmetrie“ weiter unten.

Variation 3: Mehrschrittige Aufgabe, Aktivierung von Grundvorstellungen (Winkel)

Zeichne in das Koordinatensystem die Punkte A(1/2), B(6/1) und C(3/5) ein und verbinde sie durch Strecken. Du erhältst ein Dreieck.

a) Spiegele dieses Dreieck an der x-Achse. Zeichne die gespiegelten Punkt A’, B’ und C’ ein und gib ihre Koordinaten an.

b) Drehe das Dreieck um den Ursprung (0/0) mit dem Drehwinkel a=120°.

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

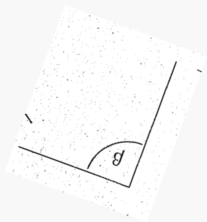
In der mehrschrittigen Aufgabe werden Figuren gespiegelt oder gedreht. Das Antwortformat ist in beiden Fällen eine Darstellung. Betrachtung von Aufgabenteil b): Der Vorgang der Drehung einer Figur um einen Winkel aktiviert zusätzlich inhaltliche Vorstellungen von (orientierten) Winkeln.

Vergleiche hierzu auch die Aufgaben zu Winkeln und Drehungen um Winkel (s. nächster Abschnitt).

11. Winkel

Grundaufgaben: „Winkel messen“

Miss den folgenden Winkel:



20	Stoffgebiet	Geometrie
002	Aufgabenformat	Abbildung
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Bei diesen Aufgaben soll ein abgebildeter Winkel gemessen werden. Dies erfordert Kenntnis über den Umgang mit dem Geodreieck, eine Standardroutine der Klassen 5/6. Darüber hinaus werden keine der hier betrachteten prozessbezogenen Kompetenzen aktiviert.

Variation 1: Antwortformat

Beschreibe die folgenden Winkel**.**

1a	Argumentieren/Begründen	Antwortsatz/Verbalisierung notwendig

Diese Variante verzichtet auf die Messtätigkeit und fordert nur eine Beschreibung des betrachteten Winkels (stumpf, überstumpf, spitz …). Sie fokussiert damit auf die Anwendung des Fachvokabulars.

Zeichne den folgenden Winkel: 120°

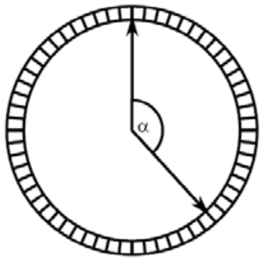
010	Aufgabenformat	Zahl
1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig

Bei dieser Aufgabe soll ein angegebener Winkel gezeichnet werden. Sie ist somit eine (gängige) „Umkehraufgabe“ zur Grundaufgabe „Winkel messen“.

Vergleiche auch die Varianten zu dieser Aufgabe (nächster Abschnitt)

Variation 2: Aktivierung von Grundvorstellungen (Winkel)

11. Wie groß ist der Winkel zwischen den beiden Zeiger



α =

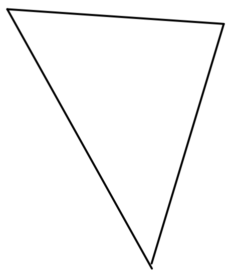
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe aktiviert durch diese „Einbettung“ elementare inhaltliche Vorstellungen von „Winkeln“, indem die Schenkel als „Zeiger“ interpretiert werden. Mit dem Wissen, dass eine ganze Drehung der Zeiger einem Winkel von 360° entspricht, muss für die Bearbeitung dieser Aufgabe nicht gemessen werden, wenn man Bruchteile identifizieren und hochrechnen kann.

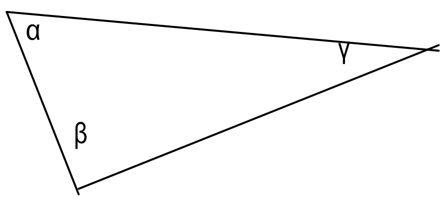
Variationen 3: Argumentieren und Begründen (Verbalisierung von Verfahren)

- Miss die Innenwinkel in dem Dreieck und benenne die Winkelart.
  Erkläre, wie du die Aufgabe selbst kontrollieren kannst.

Winkel	Größe	Winkelart
α		
β		
γ		



- Miss die Innenwinkel in dem Dreieck. Welche Winkelsumme muss sich ergeben?
  Überprüfe deine Messergebnisse.



α = __________
β = __________
γ = __________
erwartete Winkelsumme = ______________
gemessene Winkelsumme = ______________

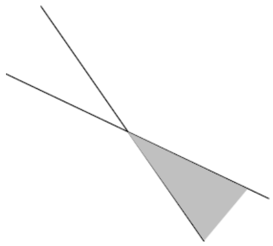
Was sagst du zu deinen Messergebnissen?

2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Obere Aufgabe: Bei dieser Aufgabe werden die Winkel gemessen und benannt. Es handelt sich hier jedoch um Winkel in einem Dreieck, so dass die Lernenden ihre Messung selbst überprüfen können, wenn sie die Winkelsumme im Dreieck kennen. Genau dieser Zusammenhang soll dann verbalisiert werden. Die Aufgabe verbindet somit die Messtätigkeit mit einer Reflektion der eigenen Tätigkeit.

Untere Aufgabe: Zu einer zusätzlichen Bewertung der eigenen Messergebnisse fordert die untere Aufgabe auf: Hier werden „Unschärfen“ von Messergebnissen thematisiert und reflektiert.

Variation 4: Argumentieren und Begründen

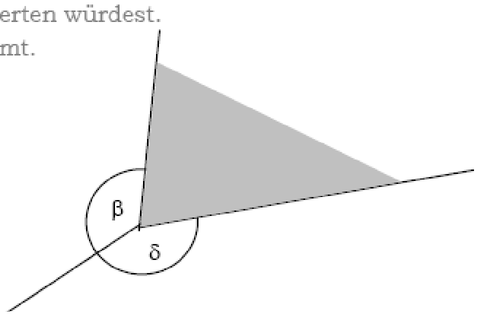


Paul hat den grauen Winkel zwischen den beiden Geraden gemessen und behauptet, er betrage 120°.
Begründe ohne zu messen, warum Pauls Ergebnis nicht stimmen kann.

2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgaben gehen über die Kompetenz des Messens hinaus: Die Lernenden werden bei dieser Aufgabe aufgefordert zu begründen, warum das im Aufgabentext angegebene Messergebnis von Paul nicht richtig sein kann. Die Aufgabe erfordert Stützpunktvorstellungen zu vertrauten Winkeln (z. B.: spitze Winkel sind kleiner als 90°) sowie die Kompetenz, diese anhand der Abbildung zu verbalisieren.

1. Milan hat drei Geraden gezeichnet. Den grauen Winkel hat er ausgemessen und behauptet, β und δ müssen zusammen 270° sein.
   a. Begründe, warum du sein Ergebnis als falsch werten würdest.
   b. Zeichne einen Winkel für den $\beta + \delta = 270°$ stimmt.



2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Betrachtung von Teilaufgabe a): Die Aufforderung zu begründen, warum Milans Behauptung nicht richtig ist, aktiviert Stützpunktvorstellungen von Winkelgrößen (z. B.: 270° als Ergänzungswinkel zum rechten Winkel) und erfordert die Kompetenz, diese anhand der Abbildung zu verbalisieren. Sie ist im Vergleich zur vorherigen Aufgabe mehrschrittig.

Grundaufgabe: „Winkel zeichnen“

Zeichne den folgenden Winkel: 120°

20	Stoffgebiet	Geometrie
010	Aufgabenformat	Zahl
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Bei dieser Aufgabe soll ein angegebener Winkel gezeichnet werden. Sie ist somit eine (gängige) „Umkehraufgabe“ zu der vorherigen Grundaufgabe „Winkel messen“. Alle Varianten sind somit auch Varianten der vorherigen Grundaufgabe.
In dieser Form erfordert die Aufgabe grundlegende Fertigkeiten im Umgang mit dem Geodreieck, einem Standard-Thema der Klassen 5/6. Die Aufgabe ist einschrittig und aktiviert keine der hier betrachteten prozessbezogenen Kompetenzen oder inhaltliche Vorstellungen der mathematischen Objekte.

Variation 1: Mehrschrittige Aufgabe (Antwortformat)

Aufgabe 2

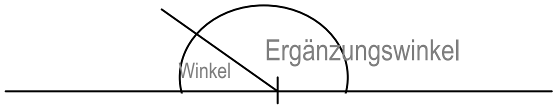
a) Zeichne das Viereck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 8cm$, $\overline{BC} = 7cm$, $\overline{AD} = 6cm$ und den Winkelweiten $\alpha = 113°$, $\beta = 75°$.
b) Miss die Winkelweiten der beiden anderen Vierecksinnenwinkel und eines Schnittwinkels der Viereckdiagonalen.

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Bei dieser Aufgabe muss ein Viereck anhand der in der Aufgabenstellung angegebenen Seitenlängen und Winkel konstruiert werden. Das Zeichnen der Winkel wird hiermit in den Kontext der Konstruktion einer kompletten geometrischen Figur eingebettet. Die Summe der Innenwinkel im Viereck hilft, um die Messung der beiden anderen Winkel zu überprüfen, wofür jedoch ein grundlegendes Verständnis von Winkeln Voraussetzung ist.

Variation 2: Mehrschrittige Aufgabe (Ergänzungswinkel)

Zeichne die in der Tabelle stehenden Winkel. Fülle die Tabelle weiter aus.

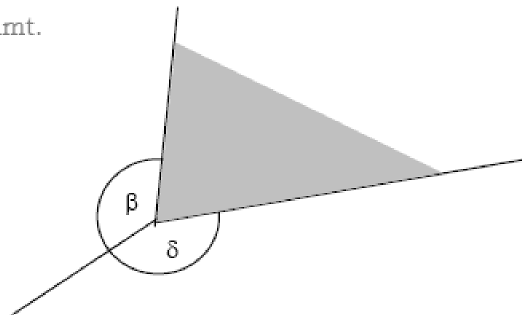


Winkel	$\alpha = 35°$	$\beta = 115°$	$\gamma = 90°$	$\delta = 165°$	$\varepsilon = 12°$
Winkelart:					
Ergänzungswinkel:					

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig

Diese Aufgabe erfordert neben den Zeichnungen der Winkel auch eine Benennung der Winkel und die Berechnung der Ergänzungswinkel.

1. Milan hat drei Geraden gezeichnet. Den grauen Winkel hat er ausgemessen und behauptet, β und δ müssen zusammen 270° sein.
   a. Begründe, warum du sein Ergebnis als falsch werten würdest.
   b. Zeichne einen Winkel für den $\beta + \delta = 270°$ stimmt.



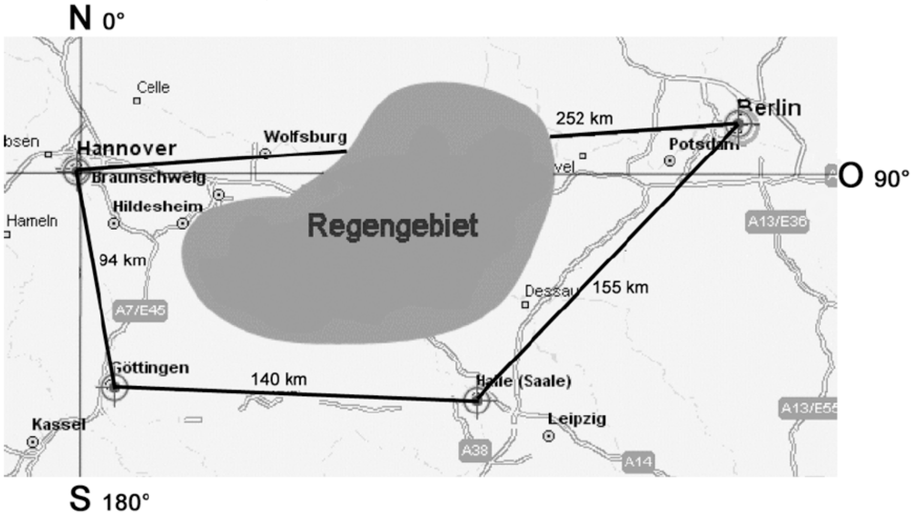
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
(1)	Problemlöseanteil	(ja)
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Betrachtung von Teilaufgabe b): Der Schüler kann bei der Bearbeitung der Aufgabe unterschiedlich vorgehen. Die Aufgabe wird kompliziert, wenn nicht erkannt wird, dass der zu zeichnende Winkel 90° beträgt und der Schüler versucht, z. B. den Winkel β solange zu verändern, bis die Summe von β und δ 270° ergibt. Je nach Vorgehensweise werden bei der Bearbeitung der Aufgabe Stützpunktvorstellungen von Winkelgrößen aktiviert oder Problemlösekompetenzen nötig.

Variation 3: Inhaltliche Vorstellungen, Realitätsbezug (Modellieren),
Argumentieren und Begründen

7.) Winkel

Kurt ist Verkehrsbeobachter. Mit seinem Hubschrauber fliegt er häufig die Strecke Hannover – Berlin. Vor seinem heutigen Flug wird schlechtes Wetter angekündigt. Ei[n] Regengebiet liegt in seiner Flugroute. Er muss es nun umfliegen und über Göttingen, Halle nach Berlin fliegen.



Bevor er startet, muss er im Bordcomputer den neuen Kurs in Grad (°) und die Flugstrecke in km eingeben.

a) Trage die Daten in die Tabelle ein:

	Kurs in Grad (°)	Flugstrecke in km
1		
2		
3		

von
6P.

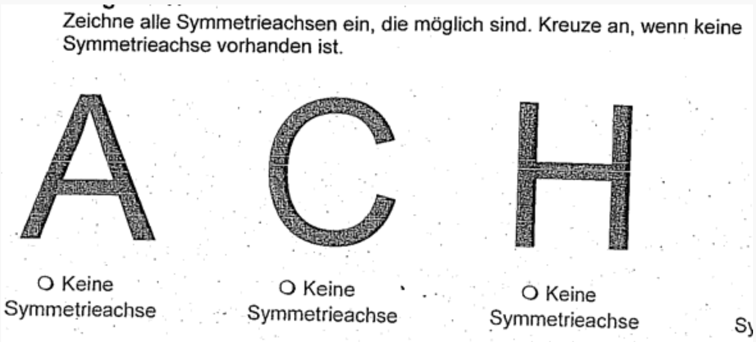
b) Er kommt dadurch viel zu spät nach Hause und flucht: „Durch dieses blöde Gewitter musste ich doppelt so weit fliegen."

Hat er recht? Begründe ....

21	Stoffgebiet	Geometrie, Arithmetik
3	Komplexität/Kompliziertheit	komplex
5	Modellierungscharakter	Validierung
2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig
3	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe bettet „Winkelmessung" in einen realistischen Kontext ein: Für das Ausfüllen der Tabelle sind Messtätigkeiten an der Abbildung nötig. Die Flugwinkel werden dabei inhaltlich interpretiert (als „Kursänderungen"). Zwar ist das mathematische Modell in der Aufgabe bereits vorgegeben, doch erfordert auch das Arbeiten mit diesem Modell Modellierungskompetenzen und das Modell muss in der Teilaufgabe b) validiert werden. Da bei dieser Aufgabe mit größeren Zahlen umgegangen werden muss, reicht diese Teilaufgabe auch in den Bereich der Arithmetik. Eine Begründung der Antwort (anhand einer Rechnung) wird erwartet.

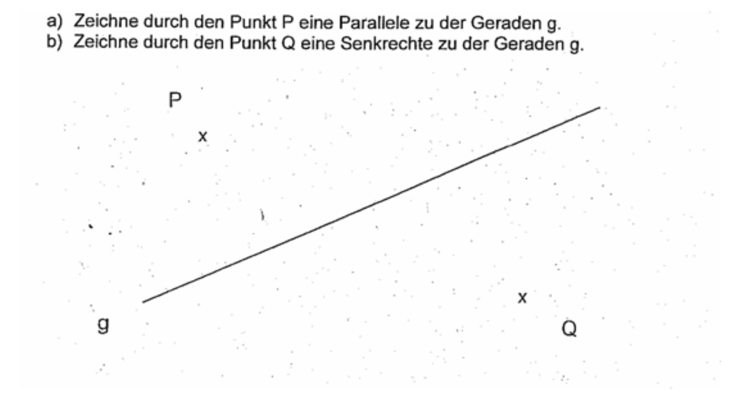
Grundaufgabe: „Symmetrie“



20	Stoffgebiet	Geometrie
002	Aufgabenformat	Abbildung
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Hier sollen Symmetrieachsen in vorgegebene Abbildungen eingezeichnet werden. Eine inhaltliche Interpretation von „Symmetrieachsen“ ist nur in geringem Maße erforderlich.

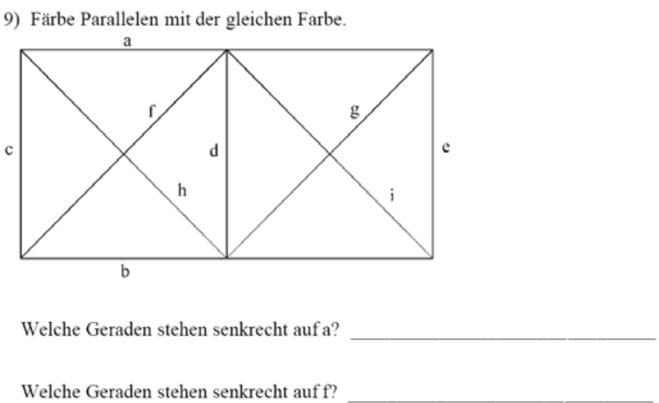
Grundaufgabe: „Senkrechten und Parallelen“



20	Stoffgebiet	Geometrie
101	Aufgabenformat	Text, Abbildung
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Bei diesen Aufgaben sollen Parallelen und Senkrechten eingezeichnet werden. Die Aufgaben sind einschrittig und aktivieren keine inhaltlichen Vorstellungen. Als Lösung wird eine Zeichnung erwartet.

Variation 1: Antwortformat



0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig

Diese Aufgabe verlangt nicht das Zeichnen von Parallelen zu einer vorgegebenen Geraden durch vorgegebene Punkte, sondern das richtige Zuordnen der Begriffe „parallel“ und „senkrecht“ zu den entsprechenden Geraden in einer vorgegebenen Figur. Sie wird in ihrem Anspruch also auf die Nutzung der Fachvokabeln eingeschränkt.

12. Beschreibung von Mustern, Beziehungen und Veränderungen

Grundaufgabe: „Muster erkennen und fortsetzen“

Setze folgende Zahlenreihe fort: 2, 5, 11, 23, 47, …

31	Stoffgebiet	Funktionale Zusammenhänge, Arithmetik
010	Aufgabenformat	Zahl
000	Offenheit	nicht offen
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
1	Problemlöseanteil	ja
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Bei dieser Grundaufgabe müssen die Lernenden das Muster der Zahlenfolge (arithmetisches Muster) erkennen und fortsetzen. Das Erkennen eines solchen Musters kann geübt werden, jedoch enthält eine solche Aufgabe immer einen Problemlöseanteil, da mit unterschiedlichen Strategien vorgegangen werden kann bzw. muss. Der Umgang mit größeren Zahlen reicht in das Stoffgebiet der Arithmetik.

Variation 1: Argumentieren/Begründen

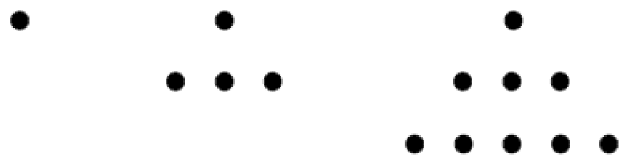
1, 3, 7, 13, 23, 31, ….

Repariere die Zahlenfolge so, dass ein Muster leichter erkennbar wird und beschreibe es!

2	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig

Im Gegensatz zur Grundaufgabe verlangt diese Aufgabe auch, das Muster nicht nur zu erkennen, um es fortsetzen bzw. reparieren zu können, sondern auch es zu beschreiben.

Variation 2: Punktemuster



Zeichne die vierte Figur! Wie viele Punkte hat sie?

Notiere eine Rechnung, wie Du die Zahl der Punkte der 10. Figur berechnen könntest!

002	Aufgabenformat	Abbildung
010	Offenheit	Lösungsweg offen
1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung/Rechnung notwendig
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Diese Aufgabe gibt ein Punktemuster vor, dass die Lernenden fortsetzen sollen. Die erkannte Regelmäßigkeit des Musters muss nun in einen arithmetischen Term „übersetzt“ werden, wofür die mathematische Schreibweise inhaltlich gedeutet werden muss. Da die Strukturierung des Musters auf unterschiedliche Weise möglich ist, kann es unterschiedliche Terme geben, die jedoch zum selben Ergebnis führen müssen. Solcherart Aufgaben bieten eine interessante Propädeutik für die Einführung der Variablen, die hier angelegt sind, aber noch nicht explizit genutzt werden.

Variation 3: Realitätsbezug

Abfahrt: 11:24 Uhr **nach:** Bremen / St.-Jürgen-Str.

Rückfahrt | früher | später | weiter | neue Fahrt | Fahrt ändern | Fahrten drucken

Fahrtdaten	Fahrtdauer	Umsteigen	Preis (Erw./Ki.)
01. Fahrt am 10.11.2007 von 11:22 bis 11:28 Uhr (Karte)	00:06	0	EUR 2.10/1.05
02. Fahrt am 10.11.2007 von 11:29 bis 11:35 Uhr (Karte)	00:06	0	EUR 2.10/1.05
03. Fahrt am 10.11.2007 von 11:32 bis 11:38 Uhr (Karte)	00:06	0	EUR 2.10/1.05
04. Fahrt am 10.11.2007 von 11:39 bis 11:45 Uhr (Karte)	00:06	0	EUR 2.10/1.05

01. Fahrt

11:22	ab	Bremen, Domsheide Bstg. 5	Straßenbahn 2
11:28	an	Bremen, St.-Jürgen-Str.	Bremen, Sebaldsbrück

02. Fahrt

11:29	ab	Bremen, Domsheide Bstg. 5	Straßenbahn 3
11:35	an	Bremen, St.-Jürgen-Str.	Bremen, Hastedt, Weserwehr

03. Fahrt

11:32	ab	Bremen, Domsheide Bstg. 5	Straßenbahn 2
11:38	an	Bremen, St.-Jürgen-Str.	Bremen, Sebaldsbrück

04. Fahrt

11:39	ab	Bremen, Domsheide Bstg. 5	Straßenbahn 3
11:45	an	Bremen, St.-Jürgen-Str.	Bremen, Hastedt, Weserwehr

Markus wollte eigentlich spätestens um halb 12 an der Domsheide sein, um eine Straßenbahn in die St.-Jürgen-Straße zu nehmen.

Nun hat er sich ziemlich verspätet: Es ist schon 12.03 Uhr! Die Bahnen, die er sich ausgesucht hatte, kriegt er nun nicht mehr!

Setze den Abfahrtsplan bis 12:15 fort und entscheide welche Straßenbahn Markus nehmen kann!

012	Aufgabenformat	Text, Abbildung
3	Modellierungscharakter	Strukturieren, Mathematisieren
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Magdalena steht um 14.55 Uhr an der Bushaltestelle und guckt schon einmal nach, wann sie nach der Feier wieder nach Hause fahren kann. Der nächste Bus fährt um 15.12 Uhr ab. Die Feier soll aber erst um 19.00 Uhr zu Ende sein.
Alle 25 Minuten fährt ein Bus. Wann kann sie wieder nach Hause fahren?

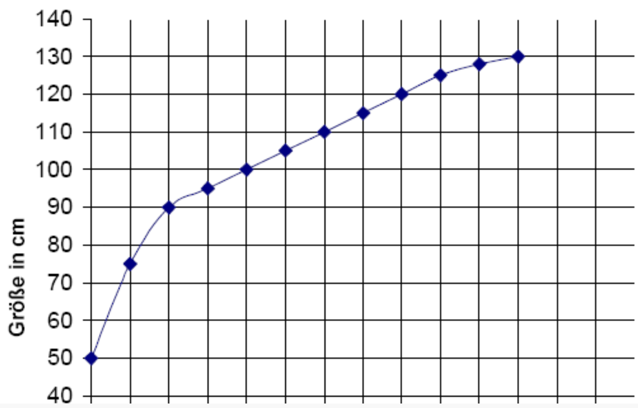
110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Modellierungscharakter	Mathematisieren
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Bei der oberen Aufgabe müssen die Lernenden das „Muster“ aus dem Abfahrtsplan entnehmen und fortsetzen, während es in der unteren Aufgabe bereits vorgegeben ist. In beiden Aufgaben dient das arithmetische „Muster“ als Modell für die Abfahrtszeiten von Bus und Bahn.

13. Erstellen von Diagrammen und Arbeiten mit Diagrammen

Grundaufgabe: „Diagramme lesen“

9. Kreuze jeweils die richtige Antwort an.



Wie viel cm wuchs Frank in seinem ersten Lebensjahr?

☐ 2,5 cm ☐ 25 cm
☐ 20 cm ☐ 75 cm

Wie viel ist Frank seit seiner Geburt gewachsen?

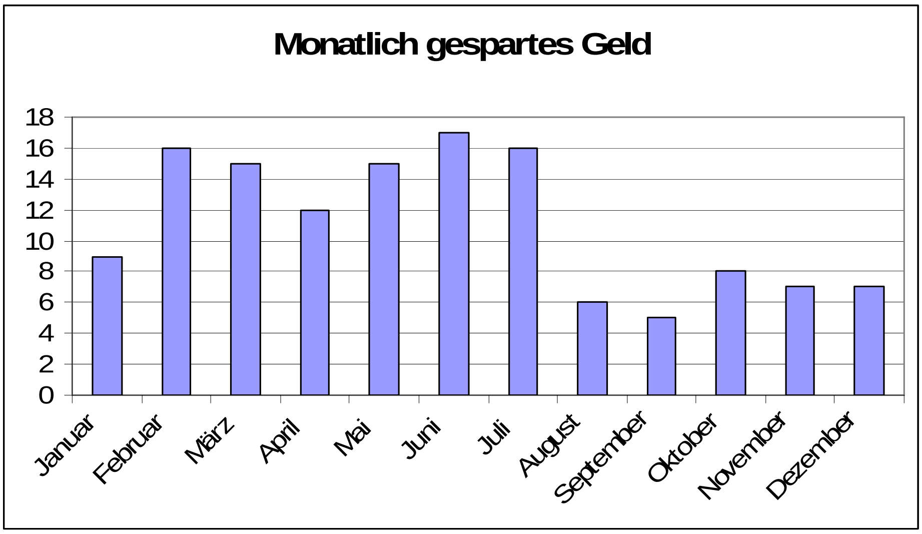
☐ 1,30 m ☐ 0,8 m
☐ 1,00 m ☐ 50 cm

43	Stoffgebiet	Funktionale Zusammenhänge, Stochastik
102	Aufgabenformat	Text, Abbildung
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
(1)	Inhaltliches Verständnis	(notwendig (elementar))

Diese Aufgaben üben und prüfen die Fähigkeit zum Arbeiten mit Daten und Diagrammen. Bei dieser Grundaufgabe werden Daten aus einem Graphen (aus einem Säulendiagramm, aus einem Kreisdiagramm, aus einer Tabelle o. ä.) abgelesen. Die Aufgabe ist damit einschrittig und erfordert nur Standardroutinen. Sie erfordert zwar eine elementare Interpretation der dargestellten Daten, jedoch keine inhaltliche Auseinandersetzung mit dem Sachzusammenhang oder der Art der Darstellung.

Variationen 1: Alternative Darstellungsformen

- Andreas hat im letzten Jahr genau aufgeschrieben, wie viel er jeden Monat von seinem Taschengeld gespart hat.



Lies aus dem Diagramm möglichst genau ab:

a. Wie viel konnte er im Mai zurücklegen?
b. In welchem Monat hat er am wenigsten gespart?
c. In welchem Monat hat er am meisten gespart?
d. Wie viel Geld hat Andreas im ersten halben Jahr gespart?

- Jans Mutter hat immer an seinem Geburtstag seine Körpergröße gemessen und dazu die folgende Tabelle angelegt.

Lebensjahre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Größe in cm	50	75	90	95	100	105	110	115	120	125	128	130

a) Um wie viel cm wuchs Jan in seinem ersten Lebensjahr? ______________________________

b) Wie viel ist Jan seit seiner Geburt gewachsen? ____

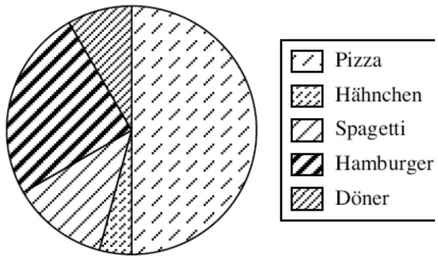
c) Wann war Jan doppelt so groß wie bei seiner Geburt? _________________________________

Hier müssen die Informationen zur Bearbeitung der Aufgabe aus einem Balkendiagramm bzw. einer Tabelle entnommen werden. Da sich hierbei nur der Typ der Darstellung, aber nicht das Aufgabenformat ändert, besitzen diese Varianten denselben Code wie die Grundaufgabe.

Variation 2: Alternative Darstellungsformen und Mehrschrittigkeit
(Verbindung zur Arithmetik)

6.) Daten

Für ein Klassenfest der 6.8 mit 24 Schülern hat der Klassensprecher eine Umfrage bezüglich des Lieblingsessens seiner Mitschüler gestartet. Das Ergebnis siehst du hier in einem Kreisdiagramm dargestellt.



a) Welches ist die "unbeliebteste" Lieblingsspeise?

b) Wie viele Kinder essen am liebsten

Pizza? ....

Hamburger?...................

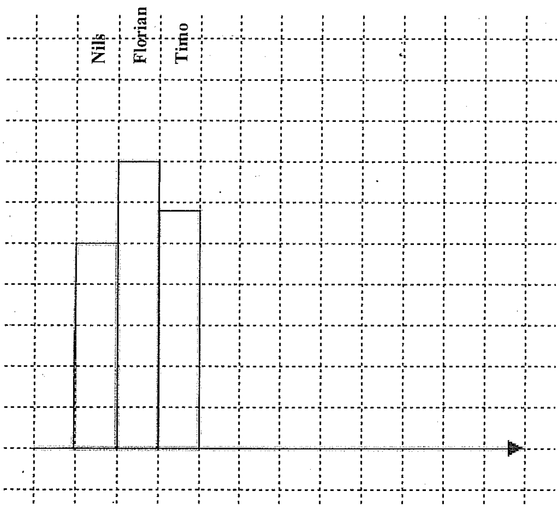
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Die Informationen müssen bei dieser Aufgabe einem Kreisdiagramm entnommen werden. Die Angabe, dass die Gruppe, deren Aufteilung das Kreisdiagramm darstellt, aus 24 Schülern besteht, führt im einem zweiten Schritt zur Berechnung des Anteils, d. h. der „absoluten“ Schüleranzahl, die beispielsweise am liebsten Pizza isst. Dabei wird eine nichttriviale Verbindung zur Arithmetik geschaffen, für die Grundvorstellungen aktiviert werden müssen („Brüche als Anteile“).

Variation 3: Unterschiedliche Darstellungsformen und Inhaltliche Interpretation

1. Folgende Weitsprungergebnisse erzielten die Jungen der 6F:

Nils	2,50 m
Florian	3,50 m
Timo	2,90 m
Alex	4,00 m
Simon	2,85 m
Artur	3,75 m
Christoph	3,00 m
Martin	4,00 m



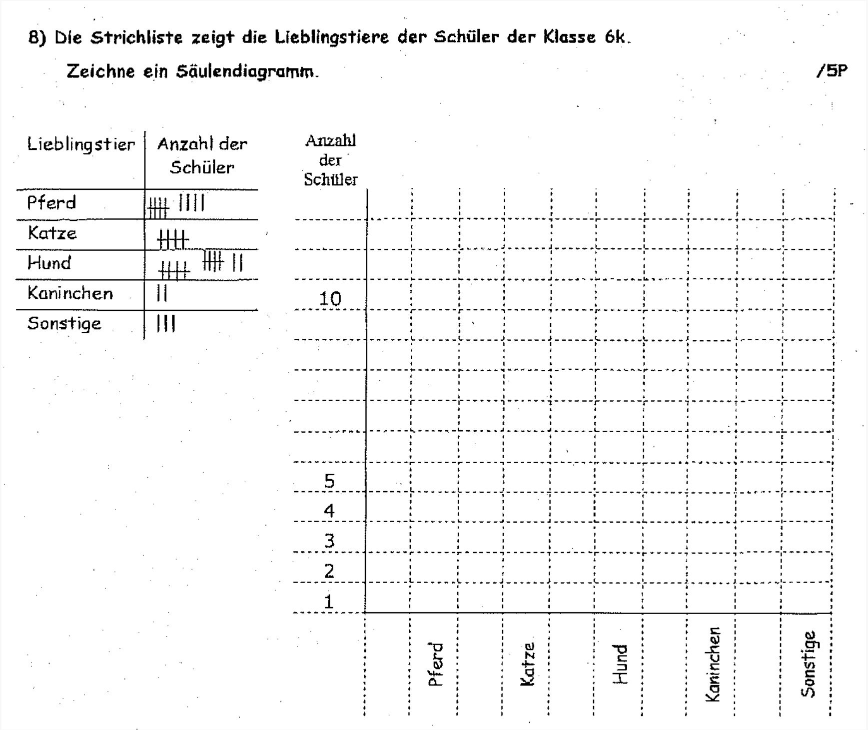
a) Zeichne die y-Achse ein und beschrifte sie.
b) Zeichne die fehlenden Säulen.
c) Was kannst du im Säulendiagramm schneller erkennen als in der Tabelle?
d) Wie groß ist der Unterschied zwischen dem weitesten und dem kürzesten Sprung?
e) Berechne den Mittelwert (durchschnittliche Sprungweite).

3b	Argumentieren/Begründen	notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Bei dieser (sehr häufig gestellten) Aufgabe, wird ein vorgegebenes Diagramm ergänzt. Die „Eigentätigkeit“ der Schülerinnen und Schüler beschränkt sich auf das Beschriften der y-Achse.

Betrachte Aufgabenteil c): Die Frage „Was kannst Du im Säulendiagramm schneller erkennen als in der Tabelle?“ erfordert nicht nur eine sprachlich anspruchsvolle Antwort, sondern führt auch zu einer intensiven inhaltlichen Auseinandersetzung mit Vorteilen und Nachteilen unterschiedlicher Darstellungsformen.

Grundaufgabe: „Diagramme zeichnen“



8) Die Strichliste zeigt die Lieblingstiere der Schüler der Klasse 6k.
Zeichne ein Säulendiagramm. /5P

Lieblingstier	Anzahl der Schüler
Pferd	卌 IIII
Katze	卌
Hund	卌 卌 II
Kaninchen	II
Sonstige	III

43	Stoffgebiet	Funktionale Zusammenhänge, Stochastik
102	Aufgabenformat	Text, Abbildung
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
1b	Argumentieren/Begründen	Darstellung notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
(1)	Inhaltliches Verständnis	(notwendig (elementar))

Diese Aufgabe verlangt die Kenntnis unterschiedlicher Darstellungsformen. Die Darstellungsform (Säulendiagramm) ist bei dieser Aufgabe vorgegeben, Vor- oder Nachteile der speziellen Darstellung werden nicht thematisiert. Die Aufgabe ist einschrittig, da dieselbe Tätigkeit (Einzeichnen einer passenden Säule zu dem Wert in der Tabelle) nur wiederholt wird. Die Aufgabe erfordert im Wesentlichen Standardroutinen und ein lediglich auf die Interpretation der Daten bezogenes elementares inhaltliches Verständnis.

Variation 1: Wechsel der Darstellungsformen (Mehrschrittige Aufgabe)

c) Das abgebildete Diagramm nennt man Kreisdiagramm. Übertrage die Ergebnisse der Umfrage in ein Säulen- oder Balkendiagramm.

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Betrachtung von Aufgabenteil c): Ein Kreisdiagramm soll in ein Säulendiagramm übertragen werden. Diese Aufgabe erfordert die Kenntnis unterschiedlicher Darstellungsformen und die Fähigkeit, sie sowohl lesen als auch darstellen zu können (mehrschrittige Aufgabe). Eine Reflektion der Vor- und Nachteile bestimmter Darstellungen wird jedoch nicht verlangt.

Jans Mutter hat immer an seinem Geburtstag seine Körpergröße gemessen und dazu die folgende Tabelle angelegt.

Lebensjahre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Größe in cm	50	75	90	95	100	105	110	115	120	125	128	130

Zeichne ein Koordinatendiagramm. Trage auf der Rechtsachse das Alter in Jahren und auf der Hochachse die Körpergröße in cm ein. Überlege dir zunächst eine sinnvolle Achseneinteilung.

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
1	Inhaltliches Verständnis	notwendig (elementar)

Das Antwortformat (Koordinatendiagramm) ist bei dieser Aufgabe vorgegeben und wird nicht inhaltlich thematisiert. Jedoch müssen die Lernenden selbsttätig eine sinnvolle Achseneinteilung finden. Die Aufgabe kann auch insofern als mehrschrittig betrachtet werden, als an dieser Stelle die Daten und ihre sinnvolle Darstellung (sehr elementar) reflektiert werden müssen.

Variation 2: Argumentieren/Begründen, Validierung und Inhaltliche Vorstellungen

In einer sechsten Klasse haben alle Schülerinnen und Schüler aufgeschrieben, wie viele Geschwister sie haben. Die Tabelle sieht folgendermaßen aus:

Anzahl der Schüler	8	12	9	1
Wie viele Geschwister?	keine	1	2	3

a) Fertige ein Säulendiagramm an.
b) Berechne den Mittelwert und zeichne ihn ebenfalls ins Säulendiagramm aus Aufgabenteil a) ein.
Was sagt der Mittelwert aus?
Inwiefern gibt der Mittelwert die Angaben aus der Tabelle wieder?
Was sieht man am Mittelwert – und was sieht man nicht?

5	Modellierungscharakter	Validierung
3b	Argumentieren/Begründen	notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Bei dieser Aufgabe wird in einem zweiten Aufgabenteil die Berechnung des Mittelwertes gefordert und die Diagrammdarstellung aus dem Aufgabenteil a) benutzt, um ihn zu interpretieren. Die Lernenden reflektieren und vergleichen so die Aussagekraft von Tabelle/Diagramm und Mittelwert – hier eine Kommazahl. Insofern der Mittelwert als mathematisches Modell einen „Überblick über die Anzahl der Geschwister" verschaffen soll, wird bei dieser Aufgabe eine Validierung dieses Modells vorgenommen.

Vergleiche hierzu auch die Aufgabenvarianten zum Thema „Mittelwert" im nächsten Abschnitt.

14. Mittelwert

Grundaufgabe: „Berechnung des Mittelwertes“

In einer sechsten Klasse haben alle Schülerinnen und Schüler aufgeschrieben, wie viele Geschwister sie haben. Die Tabelle sieht folgendermaßen aus:

Anzahl der Schüler	9	12	7	1
Wie viele Geschwister?	keine	1	2	3

Berechne den Mittelwert!

43	Stoffgebiet	Funktionale Zusammenhänge, Stochastik
110	Aufgabenformat	Text, Zahl
000	Offenheit	nicht offen
1	Komplexität/Kompliziertheit	einschrittig
0	Modellierungscharakter	nein
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
0	Problemlöseanteil	nein
0	Inhaltliches Verständnis	nicht notwendig

Diese Aufgabe verlangt die Fähigkeit, einen Mittelwert zu berechnen. Insofern dies eine Routine ist, sind hierfür keine inhaltlichen Vorstellungen nötig. Der Mittelwert selbst wird weder in seinen Anwendungen noch in seiner Aussagekraft reflektiert.

Variante 1: Mehrschrittige Aufgabe und Problemlöseanteil

In einer sechsten Klasse fertigen die Schülerinnen und Schüler eine Liste an, wie viele Geschwister sie haben. Die Tabelle sieht folgendermaßen aus:

Anzahl der Schüler	8	15	5	1
Wie viele Geschwister?	keine	1	2	3

Jetzt fehlt nur noch Uli. Bevor sie sich einträgt, ruft sie: „Prima, wir haben also im Schnitt jeweils genau einen Bruder oder ein Schwester!“. Kann das sein? Wie viele Geschwister hat wohl Uli?

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
1	Problemlöseanteil	ja

Diese Aufgabe bekommt durch die Einführung eines zweiten, nicht direkt ausführbaren Schritts einen Problemlöseanteil. Wer sie lösen will, kann entweder den Mittelwert der bereits erfassten „Daten“ berechnen, um dann den „Datensatz“ so zu ergänzen, dass sich der ganzzahlige Mittelwert 1 ergibt. (das erfordert ein inhaltliches Gespür und systematisches Probieren). Oder man muss Rückwärtsarbeiten: was wäre die Summe der Geschwisterkinder, wenn der Durchschnitt 1 ist, und wie viele Geschwister muss Uli dann haben?

Variation 2: Argumentieren und Begründen (Inhaltliche Vorstellungen)

In einer sechsten Klasse haben alle Schülerinnen und Schüler aufgeschrieben, wie viele Geschwister sie haben. Die Tabelle sieht folgendermaßen aus:

Anzahl der Schüler	8	15	5	1
Wie viele Geschwister?	keine	1	2	3

a) Fertige ein Säulendiagramm an.
b) Berechne den Mittelwert und zeichne ihn ebenfalls ins Säulendiagramm aus Aufgabenteil a) ein.
Was sagt der Mittelwert aus?
Inwiefern gibt der Mittelwert die Angaben aus der Tabelle wieder?
Was sieht man am Mittelwert – und was sieht man nicht?

2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
5	Modellierungscharakter	Validierung
3b	Argumentieren/Begründen	notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Betrachtung von Aufgabenteil b): Die Lernenden vergleichen hier die Aussagekraft von Tabelle/Diagramm und Mittelwert – hier eine Kommazahl. Der Mittelwert wird im Gegensatz zur Grundaufgabe inhaltlich interpretiert und eine anspruchsvolle Verbalisierung der Bedeutung des Mittelwertes am vorgegebenen Beispiel wird verlangt. Insofern der Mittelwert als mathematisches Modell einen „Überblick über die Anzahl der Geschwister" verschaffen soll, wird bei dieser Aufgabe eine Validierung dieses Modells vorgenommen.

Variation 3: Argumentieren und Begründen (Verbalisierung/Darstellung von Verfahren)

- Wie groß ist der Mittelwert der folgenden drei Zahlen 1, 2, 3, 10000 ungefähr? Wie kann man das Ergebnis überschlagen, ohne den Mittelwert auszurechnen? Kannst Du Dein Vorgehen mit einer Zeichnung begründen?

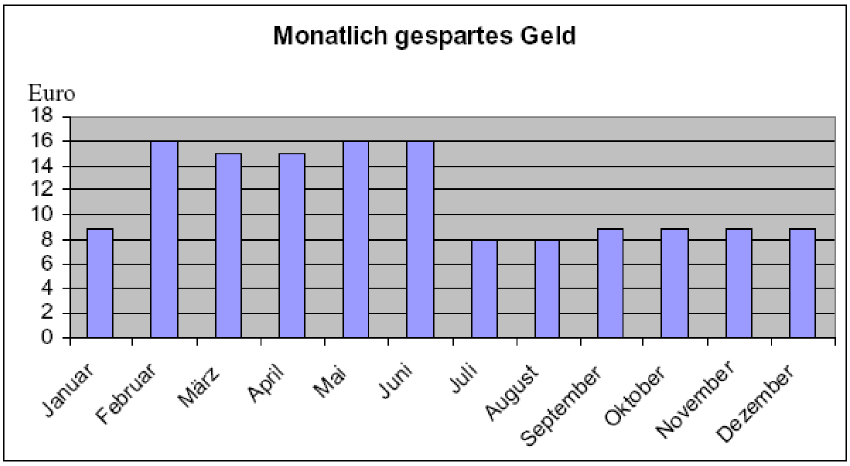
- Peter meint, der Mittelwert von 1, 2, und 1000 liegt etwa bei 100 und der Mittelwert von 1, 2, 3 und 1000 liegt ungefähr bei 10. Kannst du ihn auch ohne Rechnung überzeugen, dass er nicht Recht hat?

3b	Argumentieren/Begründen	Begründung notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

In dieser Form prüfen die Aufgaben ein inhaltliches bzw. operatives Verständnis des Mittelwertes. Schülerinnen und Schüler müssen ohne Rechnung den Wert des Mittelwertes abschätzen und insofern auch erklären können, was der Mittelwert einer „Datenreihe" eigentlich aussagt.

Variante 4: Argumentieren und Begründen, Realitätsbezug (Modellierung)

Martin bekommt jeden Monat 20 Euro von seiner Oma, von denen er eigentlich mindestens die Hälfte sparen möchte. Am Ende jeden Monats notiert er sich, wie viel von den 20 Euro er tatsächlich übrig hat.



Am Ende des Jahres sagt Martins Freundin Andrea: „Wenn Du jeden Monat mindestens die Hälfte Deines Geldes sparen wolltest, hast Du Dein Ziel aber nicht erreicht!"

Martin entgegnet stolz:„Ich habe aber tatsächlich mehr als die Hälfte des Geldes gespart!"

- Wie können Andrea und Martin ihre Meinung begründen? Wer argumentiert am besten mit dem Mittelwert, wer mit dem größten / kleinsten Wert? Erkläre!

101	Aufgabenformat	Text, Abbildung
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
7	Modellierungscharakter	Modellierungsaufgabe
3b	Argumentieren/Begründen	notwendig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Um Andrea und Martin Argumente zu liefern, müssen ihre beiden Aussagen in ein mathematisches Modell überführt werden und diese beiden Modelle dann anhand der vorliegenden Daten validiert werden. Eine (anspruchsvolle) Begründung der Aussagen von Andrea und Martin anhand des Diagrammes wird verlangt.

15. Wahrscheinlichkeit und Zufall

Grundaufgabe: „Wahrscheinlichkeiten berechnen“

Hein wirft eine Münze dreimal hintereinander.

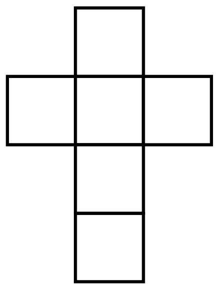
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Hein genau 2mal Zahl?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Hein mindestens 2mal Zahl?

3	Stoffgebiet	Stochastik
100	Aufgabenformat	Text
(0)	Offenheit	(nicht offen)
(2)	Komplexität/Kompliziertheit	(mehrschrittig)
2	Modellierungscharakter	Mathematisieren
0	Argumentieren/Begründen	nicht notwendig
(1)	Problemlöseanteil	(ja)
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Diese Aufgabe lässt sich im Prinzip auf mehrere Weisen lösen und es hängt von den Voraussetzungen der Lernenden ab, wie offen und komplex diese Aufgabe und wie hoch ihr Problemlöseanteil letztendlich ist.
Das Berechnen der Wahrscheinlichkeit, aber auch das Aufstellen und Abzählen eines Ereignisbaumes ist bzw. erfordert ein mathematisches Modell. Hierfür sind inhaltliches Verständnis für den Vorgang und die Interpretation von Wahrscheinlichkeit notwendig.

Variation 1: Umkehraufgabe (offenere Aufgabe)

Beschrifte einen Würfel (Würfelnetz) mit den Zahlen 1, 2, 3 so, dass die Chance für eine 2 genau ein Drittel ist.



001	Offenheit	Endzustand offen
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Bei dieser Aufgabe müssen Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung von “Wahrscheinlichkeit“ besitzen, um z. B. zu wissen, dass die Anordnung der Zahlen auf dem Würfelnetz gleichgültig ist und es nur auf die Häufigkeit des Vorkommens der Zahl 2 ankommt. Diese Aufgabe ist in gewisser Weise die „Umkehraufgabe“ der Grundaufgabe: Die Wahrscheinlichkeit für „Erfolg“ (die 2) ist vorgegeben, das Objekt des Zufallsexperimentes muss noch konzipiert werden. Es sind mehrere Lösungen möglich.

Variation 2: Vergleich von Wahrscheinlichkeiten

Glück und Zufall — /5 Punkte

9. Vergleiche die Wahrscheinlichkeiten! (< = >)
Was ist wahrscheinlicher

Ereignis A — ODER — Ereignis B ?

... aus einem Strumpf mit 15 blauen Kugeln, 10 roten Kugeln, 6 gelben Kugeln und 1 weißen Kugel die eine weiße Kugel zu ziehen? $W_{weiße\ Kugel} = —$

... aus den 32 Karten eines Skatspiels irgendein Ass zu ziehen? $W_{Ass} = —$

< = >

— ☐ —

Antwort: ______________________

/ Punkte

10. Bei welchem der folgenden Zufallsgeräte ist die Chance am größten, mit einer „1“ zu gewinnen? **Kreuze nur ein Feld an!** — 4 P.

☐ Spielwürfel mit den Zahlen 1 bis 6
☐ Eine 1-Centmünze
☐ Ein Glücksrad mit den Zahlen 1 bis 8

Schreibe die Wahrscheinlichkeiten auf.

a) Die Wahrscheinlichkeit mit dem Spielwürfel eine „1“ zu würfeln, beträgt — .

b) Die Wahrscheinlichkeit mit der 1-Centmünze eine „1“ zu werfen, beträgt — .

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad bei der „1“ stehen bleibt, beträgt — .

110	Aufgabenformat	Text, Zahl
2	Komplexität/Kompliziertheit	mehrschrittig
2	Inhaltliches Verständnis	notwendig

Für diese Aufgabe müssen Wahrscheinlichkeiten berechnet und verglichen werden. Hierzu werden inhaltliche Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit aber auch von Brüchen aktiviert.

Erläuterung zum zugrunde liegenden Codierungsschema

Im Folgenden finden Sie eine Kurzübersicht über die Codezuweisungen. Einen detaillierten Einblick in den Codierungsprozesses liefert die Broschüre „Informationen zum Aufgaben-Klassifikationsschema als wissenschaftlicher Hintergrund der Rückmeldung zu den Bremer Parallelarbeiten in Klasse 6“, in der die Codes und ihre Zuweisungen ausführlich erläutert sind.

1. Mathematische Stoffgebiete

(1)	Arithmetik/Algebra
(2)	Geometrie
(3)	Funktionale Zusammenhänge
(4)	Stochastik

Da sich bei manchen Aufgaben die mathematischen Bereiche überschneiden, werden hierfür zwei Codes vergeben, z. B. 12 (Arithmetik, Geometrie) oder 10 (Arithmetik).

2. Aufgabenformat (Sprachrezeption)

2.1 Text

(0)	Existiert nicht/kein (relevanter) Teil der Aufgabenstellung
(1)	Existiert/ist Teil der Aufgabenstellung/enthält Informationen zur Bearbeitung
(2)	Entnahme der zur Bearbeitung relevanten Informationen ist anspruchsvoll

2.2. Zahl/Terme/Formeln

(0)	Existiert nicht/kein (relevanter) Teil der Aufgabenstellung
(1)	Existiert/ist Teil der Aufgabenstellung/enthält Informationen zur Bearbeitung
(2)	Entnahme der zur Bearbeitung relevanten Informationen ist anspruchsvoll

2.3 Tabelle/Abbildung /Graph

(0)	Existiert nicht/kein (relevanter)Teil der Aufgabenstellung
(1)	Existiert/ist Teil der Aufgabenstellung/enthält Informationen zur Bearbeitung
(2)	Entnahme der zur Bearbeitung relevanten Informationen ist anspruchsvoll

Eine Aufgabe, die also nur eine zu lösende Rechnung vorgibt, würde den Code 010 (Zahl) erhalten. Eine Aufgabe, für die ein Diagramm oder eine andere Abbildung mathematisch ausgewertet werden muss, erhält den Code 002 oder 102, je nach Textanteil.

3. Offenheit

3.1. Aufgabenstellung

(0)	Nicht offen
(1)	Offen

3.2. Lösungswege

(0)	Nicht offen
(1)	Offen

3.3. Zielstruktur/Endzustand

(0)	Nicht offen
(1)	Offen

Lässt eine Aufgabe beispielsweise offen, wie sie gelöst werden soll oder thematisiert explizit die Möglichkeit vielfältiger Lösungswege, dann würde der zugehörige Code 010 lauten. Eine geschlossene Aufgabe trägt den Code 000.

4. Komplexität der Aufgaben

(1)	Einschrittig
(2)	Mehrschrittig
(3)	Vielschrittig und komplex
(9)	Keine Zuordnung

5. Prozessbezogene Kompetenzen

5.1. Modellieren

(0)	Keine Modellierung notwendig (z. B. rein technische Aufgabe)
(1)	Strukturierung (im Modellierungsschema: „Vereinfachung“) erforderlich: Von Realsituation zu Realmodell
(2)	Mathematisierung erforderlich: Von Realmodell zu mathematischem Modell
(3)	Strukturierung und Mathematisierung erforderlich
(5)	Validieren einer mathematischen Modellierung erforderlich
(7)	Mathematisierung und Validierung (Interpretation) erforderlich
(8)	Strukturierung und Mathematisierung und Validierung (Interpretation) erforderlich

Eine einfache Rechenaufgabe, die in einen realistischen Kontext eingebettet ist, dem zur Lösung die Informationen nur wieder entnommen werden müssen, würde den Modellierungscode 2 erhalten: Keine Strukturierung und keine Validierung nötig.

5.2. Argumentieren/Kommunizieren/Verbalisieren

(0) Verbalisierung nicht notwendig
z.B. Multiple Choice, nur Ergebnis (Zahl) gewünscht ohne Begründung
(1) Verbalisierung erforderlich (ohne „Argumentation“)
a) Antwortsatz gewünscht ohne Begründung und/oder inhaltliche Interpretation
b) Graph/Tabelle/Darstellung als Ergebnis gewünscht ohne Begründung
(2) Argumentation notwendig
(d.h. Rechnung oder Zeichnung als Begründung erforderlich)
(3) Anspruchsvolle Argumentation notwendig
a) Inhaltliche Interpretation erforderlich (z.B. lebensweltlicher Bezug)
b) Wechsel der Darstellungsebene erforderlich: Graph, Tabelle oder andere Veranschaulichungs-/Darstellungsmittel, an denen eine Begründung erfolgt

5.3 Problemlösen

(0) Kein Problemlöseanteil: ausschließlich bekannte Standardroutinen
(1) Aufgabe hat einen Problemlöseanteil, d. h. sie erfordert mathematische Tätigkeiten, die über Standardroutinen hinausgehen (z. B. Beispiele erzeugen, systematisches Probieren, informative Figuren definieren)

Der Problemlöseanteil ist anhand der Aufgabenstellung nur schwer zu bestimmen, da prinzipiell jede Aufgabe für einen Schüler ein „Problem“ darstellen kann. Die Texte unter den Aufgabenvarianten versuchen, die jeweilige Codervergabe zu begründen.

6. Inhaltliches Verständnis/Vorstellungsorientierung

(0) Keine inhaltliche Vorstellungen zur Lösung notwendig, z. B. reiner Kalkül
(1) Elementare inhaltliche Vorstellungen zu Grundschulinhalten nötig, z. B. Addition, Subtraktion, Größen (Länge, Gewicht, Zeit), Multiplikation natürlicher Zahlen etc.
(2) Inhaltliche Vorstellungen zu mathematischen Inhalten der Klasse 5/6 notwendig, z. B.
Brüche, aber auch funktionale Vorstellungen, Vorstellungen von Proportionalität etc.
(3) Kombination von mehreren Vorstellungen (hohe Grundvorstellungsintensität)
(9) Keine Zuordnung möglich

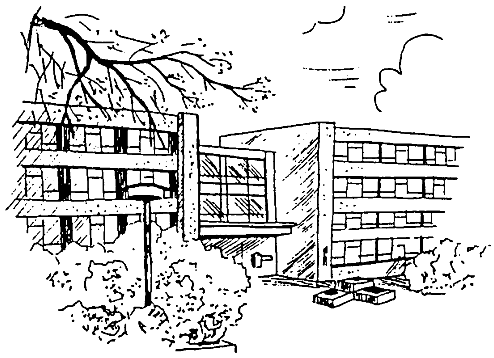
Ausblick auf grundlegende Alternativen: Parallelarbeit als Facharbeit

Wenn wir bis hierhin stets Aufgaben vorgestellt haben, die sich für zeitlich begrenzte schriftliche Tests eignen, so bedeutet das nicht, dass Parallelarbeiten diese Form der klassischen Klassenarbeit wählen müssen. So wählt z. B. die Gesamtschule Mitte die Form einer längerfristigen Hausaufgabe (Facharbeit) als Parallelarbeit. Diese ist im Folgenden abgedruckt.

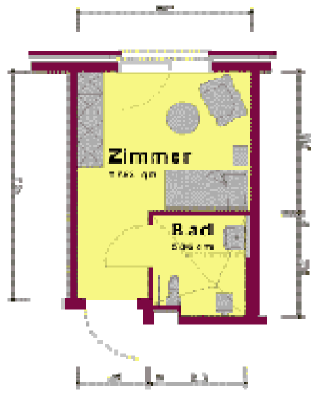
Mit dieser Form können Aufgaben sehr viel offener und in reichhaltigen Realitätsbezügen gestellt werden. Die Lehrerinnen und Lehrer nutzen die gemeinsame Beratung über die Bewertung der sehr unterschiedlichen Produkte der Lernenden als Gelegenheit zum Austausch über projektartige Unterrichtsformen und ihre Bewertungsmaßstäbe.

Parallelarbeit „Mein Traumzimmer“ (Gesamtschule Mitte)

Längerfristige Hausaufgabe



Für diese Hausaufgabe hast du länger Zeit als sonst. Sie soll aber auch besonders ordentlich, rechnerisch nachvollziehbar und richtig von dir erstellt werden und gilt als Ersatz für eine Klassenarbeit.
Bei dieser Hausaufgabe sollst du dir überlegen, wie das Zimmer aussähe, in dem du dich am wohlsten fühlen würdest. Der Fantasie sind keine Grenzen gesetzt. Es soll nur ein Zimmer in einem Haus, mit Fußboden, Wänden und Decke sein.
Das Zimmer selbst zeichnest du auf ein weißes Blatt Papier (beachte Aufgabe 1.). Du kannst es einrichten und farbig anmalen. Natürlich kannst du auch ein Zimmer basteln, mit Wänden und allem, was dazu gehört.
Die Rechnungen notierst du auf einem karierten Papier, ebenso ordentlich wie deine Zeichnung.
Und nun zu den Aufgaben:



1. Zeichne dein Traumzimmer mit Bleistift und Geodreieck oder Lineal auf ein weißes Blatt Papier! Wähle dazu einen geeigneten Maßstab. Notiere die Längenangaben in Meter an den Wänden, wie du es bei den Grundrissen kennen gelernt hast. Gestalte und richte es ein, wie du möchtest.

2. Da jedes Zimmer irgendeine Art von Bodenbelag (Teppich, Teppichfliesen, Laminat, Fliesen,...) hat, überlege dir, welchen Belag du in deinem Zimmer verlegen möchtest.
   a) Berechne, wieviel du von dem jeweiligen Belag benötigen wirst.
   b) Erkundige dich in einem Geschäft oder Prospekt nach dem m^2-Preis für den Belag. Wenn möglich, klebe einen entsprechenden Prospektausschnitt zu deiner Rechnung. Berechne nun, was du für deinen Bodenbelag insgesamt bezahlen müsstest.

3. Bringe zusätzlich in deinem Zimmer Zierleisten an der Decke und Fußleisten an. Wieviel Meter wirst du jeweils brauchen?
   Schau in deinen Unterlagen nach, wie wir in beiden Fällen gerechnet haben.

4. Üblicher Weise werden die Zimmerdecken mit Farbe gestrichen. Berechne, für wieviel Quadratmeter du Farbe einkaufen musst. Erkundige dich auch hier nach den Preisen im Handel und füge einen Prospektausschnitt bei. Berechne die Kosten für die gesamte Farbe.

5. Auch Zimmerwände werden gestrichen oder tapeziert. Wähle aus und erkundige dich ebenfalls im Handel nach den Preisen. Bevor du berechnest, wieviel Farbe oder Tapete du kaufen musst und was dich das kosten wird, überleg dir, wie du rechnen musst! Werden Fenster und Türen auch angestrichen oder tapeziert? Bestimme selbst die Maße deiner Fenster und Türen.

Dank

Unser besonderer Dank geht an diejenigen Schulen, deren Aufgaben wir hier als gute Varianten übernommen haben. Die folgende Liste führt die meisten davon auf, ist aber unvollständig bei den Aufgaben, die von mehreren Schulen verwendet wurden:

Altes Gymnasium
Gesamtschule Bremen Ost
Gesamtschule Bremen West
Gesamtschule Mitte
Gymnasium an der Hamburger Straße
Gymnasium Horn
Gymnasium Obervieland,
Gymnasiums Vegesack
Heinrich-Heine Schule
Hermann Böse Gymnasium
IGS Bergiusstraße
IGS Johann-Heinrich-Pestalozzi-Schule
IS Sandwehen
Kippenberg-Gymnasium
Lloyd Gymnasium Bremerhaven
Paula-Modersohn-Schule
Schule Am Leher Markt
Schulverbund Lesum
SZ Butjadinger Straße
SZ Drebberstraße
SZ Findorff,
SZ Habenhausen
SZ Helsinkistraße
SZ Koblenzer Straße
SZ Lehmhorster Straße
SZ Lerchenstraße
SZ Rockwinkel
SZ Ronzelenstraße
SZ Waller Ring,
SZ Wilhelm-Kaisen Straße