Mathematik öffnen: Bildung zum mathematikverständigen Bürger

Katja Lengnink und Susanne Prediger, Darmstadt

Erschienen in: Mathematica Didactica 24 (2001) 2, S. 73-88.

Zusammenfassung: Gegenwärtig wird viel über offene Aufgaben, den Erwerb von Problemlösefähigkeiten und über eine Öffnung der Unterrichtskultur im Mathematikunterricht diskutiert. Mit unserem Text wollen wir dafür werben, im Rahmen dieser wichtigen inhaltlichen und methodischen Neufindung nicht vor der Mathematik selbst halt zu machen. Exemplarisch arbeiten wir an einem Unterrichtsprojekt heraus, wie sich gerade im Öffnen von zunächst geschlossenen Mathematisierungen in einer für die Lernenden relevanten Entscheidungssituation Bildungschancen ergeben. In diesem Sinne kann eine Öffnung auch der mathematischen Fachinhalte im Unterricht ein anderes Bild von Mathematik bei den Lernenden fördern und so einen wichtigen Beitrag zu demokratischer Erziehung leisten.

Abstract. In the actual German discussion about mathematics education, open approaches are more and more emphasized. In this article, we plead for opening not only the tasks and the classroom culture but also mathematics itself. By means of an example we show how the process of opening closed mathematizations can offer chances for developing mathemacy.

Zur Einstimmung - Eine kleine Episode

So könnte es passiert sein: Eine unserer Schülerinnen kommt zu uns und erzählt, sie werde Bürokauffrau. Soweit so gut. Aber auf die Nachfrage, wie sie sich dazu entschlossen habe, sagt sie, „Das Computerprogramm des Berufsinformationszentrums hat es mir gesagt.“ Die Botschaft dieser Arbeit ist, verkürzt gesagt: Dann haben wir das Ziel unseres Mathematikunterrichts verfehlt!

Was für ein Verhältnis hat die Schülerin zu einer ihrer wichtigsten Lebensentscheidungen? Warum lässt sie sich durch ein Computerprogramm ihre Entscheidungen abnehmen? Warum hat sie nirgends in der Schule gelernt, mit solcherart Technologie in einer Weise umzugehen, die sie nicht unmündig macht? Müsste nicht Mathematikunterricht dazu beitragen, mathematik- und technologieverständige Bürger zu erziehen? Mit diesen Fragen werden wir uns in der Arbeit auseinandersetzen.

Als unterrichtspraktischer Einstieg in die Thematik wird im ersten Abschnitt ein Unterrichtsprojekt mit dem Thema „Was steckt in Daten?“ vorgestellt. An diesem konkreten Beispiel diskutieren wir, inwiefern mathematische Bildung zu einem emanzipierten Umgang mit Mathematik beitragen kann. An dem Projekt wird jedoch unmittelbar deutlich, dass dies nicht nur eine Frage der mathematischen Bildung ist, sondern viel grundsätzlicher gefragt werden muss, in welcher Weise Mathematisierungen zur menschlichen Entscheidungsfindung beitragen können und sollen: Soll Mathematik den Menschen Entscheidungen abnehmen, indem sie eindeutige Lösungen für Probleme anbietet, oder soll sie die Menschen in ihrer Entscheidung lediglich unterstützen, indem sie Problemfelder strukturiert und Entscheidungsmöglichkeiten aufzeigt und analysiert? Daher wird im zweiten Abschnitt als Hintergrund die Rolle der Mathematik im Bereich der Wissensverarbeitung näher beleuchtet und exemplarisch eine Methode zur Datenanalyse vorgestellt, mit der begründete Entscheidungsprozesse mit mathematischen Mitteln unterstützt werden können statt sie zu ersetzen. Aufgrund dieser Überlegungen zur Aufgabe der Mathematik für den Menschen erheben wir im dritten Abschnitt die Forderung, dass der gegenwärtige Mathematikunterricht im Auftrag demokratischer Erziehung nicht nur die Aufgaben- und Kommunikationskultur reformieren muss, sondern auch seine Fachinhalte. Denn eine Erziehung zum mündigen Umgang mit Mathematik ist nur möglich, wenn die mathematischen Inhalte im Unterricht erlebbar machen, dass der Einsatz mathematischer Methoden nicht unmündig machen muss.

1. Was steckt in Daten? – Ein Projekt im Mathematikunterricht

Die Berufswahl ist für Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 10 bis 13 ein Thema, das sie selbst betrifft und ihnen wichtig ist. Daher wurde das in der Episode bereits angesprochene Computerprogramm Medialog des Berufsinformationszentrums (BIZ) in Darmstadt zum Ausgangspunkt für ein Projekt mit dem Thema „Was steckt in Daten?“ gemacht. Das Projekt wurde von Sybille Thamm an einem Bensheimer Gymnasium durchgeführt und dokumentiert in Thamm 1996.
Insgesamt 15 Schülerinnen und Schüler der zehnten und zwölften Jahrgangsstufe nahmen an dem dreitägigen Projekt teil. Dabei setzten sie sich unter dem Oberthema „Wie finde ich einen Berufswunsch?“ zunächst mit dem Programm Medialog auseinander. Es funktioniert so (vgl. Abbildung 1): In einer Tabelle müssen die Schülerinnen und Schüler ankreuzen, welche Eigenschaften ihres Wunschberufs ihnen am wichtigsten sind und welche sie gar nicht haben wollen. Dann macht das Programm eine Datenbankabfrage, in der die Angaben mit (nicht transparenten) Expertenurteilen in Bezug auf die erfassten Berufe abgeglichen werden, berechnet ein gewichtetes Mittel und gibt schließlich eine Liste von Berufen aus, die zu dem angegebenen Interessenprofil passen.

In einem Selbstversuch im Umgang mit dem Programm haben sich die Schülerinnen und Schüler mit dem Output zu ihren Eingaben auseinandergesetzt. Der Schock war groß, als zu Olivers Eingabe kein einziger Beruf vom Programm ausgegeben wurde. „Das kann doch nicht sein, dass Du gar nichts werden kannst.“, „Da hat das Programm sicher einen Fehler gemacht!“ und vor allem die Frage „Wie kommt denn das Programm überhaupt zu der Entscheidung?“ leiteten über zur Diskussion über die Möglichkeiten und Grenzen der Berufsfindung mit Hilfe von Medialog und zur Suche nach Alternativen. Die Schülerinnen und Schüler problematisierten dabei verschiedene Bereiche:

Interessen/Merkmale	Möchte ich besonders gerne	Möchte ich auf keinen Fall
Im Freien arbeiten		
Mit Tieren und Pflanzen umgehen		
Mit Menschen zu tun haben	□□	
Körperlich tätig sein		
Gestalterisch arbeiten		
Handwerklich arbeiten		
Auf technischem Gebiet arbeiten		
Im Büro arbeiten	□□	
Anderen helfen		
Verkaufen, kaufen	□□	
Saubere Arbeit	□□	
Maschinen zusammenbauen, reparieren		
Produktionsanlagen überwachen		
Mit Metall umgehen		
Mit Elektrizität, Elektronik zu tun haben		
Mit Baumaterialien umgehen		
Im Labor arbeiten		

Berufe, die zu den genannten Interessen passen:

Bürokauffrau
Bankkauffrau
Hauswirtschaftliche Betriebleiterin
Industriekauffrau
Kaufmännische Assistentin
Kauffrau im Eisenbahn- und Straßenverkehr
Kauffrau im Groß- und Außenhandel
Kauffrau in Grundstücks- und Wohnungswirtschaft
Kaufmannsgehilfin im Hotel und Gaststättengewerbe
Pharmazeutisch-technische Angestellte
Reiseverkehrskauffrau
Schifffahrtskauffrau
Sparkassenkauffrau
Speditionskauffrau
Verlagskauffrau
Versicherungskauffrau
Werbekauffrau
Wirtschaftsassistentin

Abb. 1: Input und Output von Medialog (aus Thamm 1996, S. 71/72)

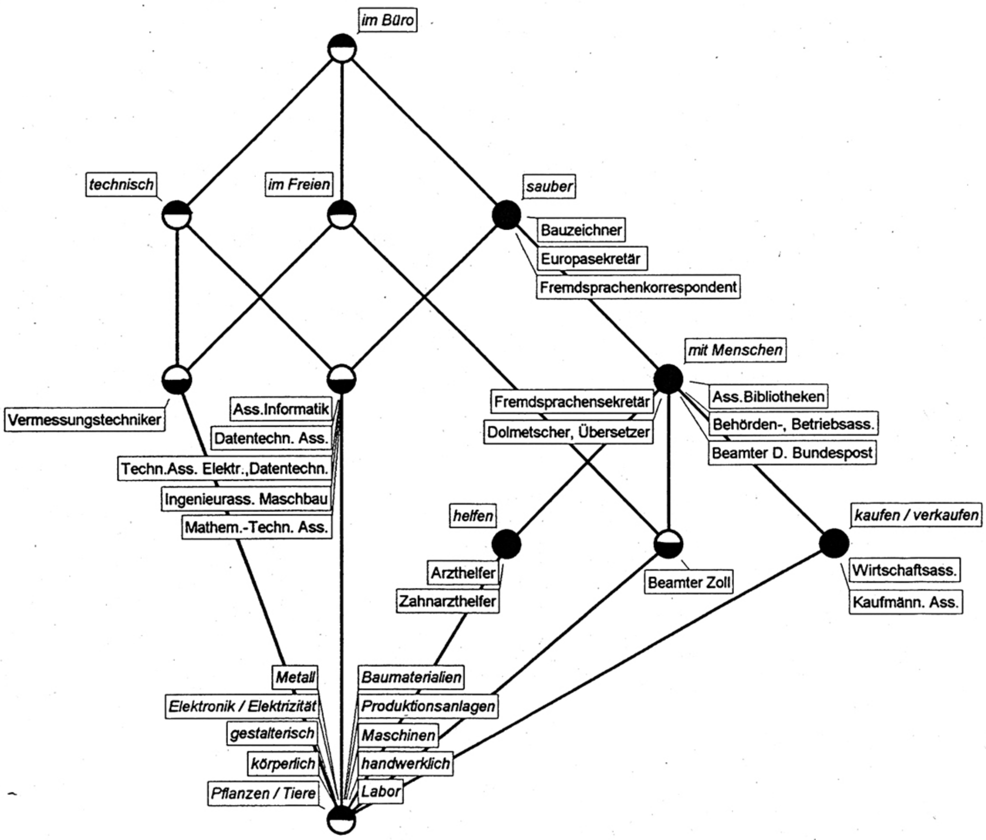

Abb. 2: Alle Berufe mit Merkmal „im Büro arbeiten“ (Thamm 1996, S. 98)

In Bezug auf die Datengrundlage stellten sie fest, dass die zu Grunde liegenden Daten nicht umfangreich und differenziert genug sind (dies wird aufgrund der Komplexität des Inhaltsbereiches zwangsläufig immer so sein, geboten wäre aber eine Transparenz der Voraannahmen).

In Bezug auf die Analysemethode des Programms bemerkten sie, dass sich viele Merkmale gegenseitig ausschließen, was die einfache Abfrage und Ausgabe einer Liste fragwürdig macht. Dies ist um so gravierender, weil der Ausgabe nicht mehr anzusehen ist, welche Expertenurteile hier eingegangen sind und welche Merkmale überhaupt dafür zuständig sind, dass Oliver keinen Beruf finden kann.

Und schließlich kritisierten sie die Ausgabe, denn wenn man nur eine Liste von möglichen Berufen ausgegeben bekommt, die zu dem Profil passen, dann kann man nicht quer schauen und dazu ähnliche Berufe auch in die Auswahl mit einbeziehen und so seine Kriterien schärfen: Warum zum Beispiel bekommt die Schülerin, deren Ein- und Ausgabe in Abbildung 1 zu sehen ist, zwar die Bürokauffrau als Option gezeigt, nicht aber die Kauffrau im Einzelhandel? Bei genauerer Betrachtung der Eingabe ahnt man, dass es vielleicht an dem Wunsch „im Büro arbeiten“ gelegen hat. Für die Schülerin gibt es aber keine Möglichkeit zu sehen, welche Berufe noch herausgekommen wären, hätte sie dieses Kreuz „im Büro arbeiten“ weggelassen, außer, sie macht einen neue Anfrage, überlistet also das Programm. Könnte sie die Alternativen sehen, würde sie sich vielleicht von dem Kriterium „im Büro arbeiten“ trennen, denn so richtig sicher ist sie sich über ihre Präferenzen sowieso noch nicht.

Die diskutierten Problemfelder führten im Projekt zur Gründung von drei Kleingruppen mit den Themen „Datenerhebung“, „Analysemethode“ und „Interpretation“. Während die Kleingruppe zur Datenerhebung sich mit den Daten und ihrer Erfassung anhand von Informationsbroschüren auseinander setzte, wurde den Gruppen zur Analysemethode und zur Interpretation exemplarisch eine alternative Mathematisierung von der Lehrerin vorgestellt: die Formale Begriffsanalyse. Sie eröffnet die Möglichkeit, die dem Programm zu Grunde liegenden Daten strukturiert zu erschließen und in Liniendiagrammen darzustellen. Die mathematischen Grundlagen sind im zweiten Abschnitt dieser Arbeit kurz und in Ganter/Wille 1996 ausführlich nachzulesen. Die Kleingruppe des Projektes, die sich mit der Analysemethode auseinander setzte, erarbeitete sich diese Methode an ausgewählten Materialien und stellte verschiedene Liniendiagramme zu den in Medialog enthaltenen Daten her. Diese wurden in Zusammenarbeit mit den Schülerinnen und Schülern der Interpretationsgruppe des Projektes interpretiert, und die Verwendbarkeit von Liniendiagrammen als Unterstützung in Entscheidungssituationen wurde diskutiert.

Als ein Beispiel zeigt Abbildung 2 ein Liniendiagramm für alle Berufe mit der Eigenschaft „im Büro arbeiten“. Dieses Diagramm ist folgendermaßen zu lesen: Ein Beruf hat ein Merkmal, wenn es einen aufsteigenden Linienzug gibt von dem Punkt, an dem der Beruf steht, zu dem, an dem das Merkmal steht. Zum Beispiel hat der Beruf „Wirtschaftsassistentin“ die Merkmale „kaufen/verkaufen“, „mit Menschen“, „sauber“ und „im Büro“. Die gleichen Merkmale hat die am gleichen Punkt stehende „Kaufmännische Assistentin“, bezüglich der hier benutzten Kriterien sind sie äquivalent. Wenn man also zwischen diesen beiden Berufen wählen will, muss man zusätzliche Kriterien anlegen, die die Datenbank nicht einbezogen hat. Im Stile der Datenbankabfrage kann man hier natürlich auch alle Berufe ablesen, die die Merkmale „technisch“ und „im Freien“ (und „im Büro“, denn das war Auswahlkriterium für diesen Ausschnitt der Datenbank) haben: Es sind diejenigen, die unter den beiden Knoten „technisch“ und „im Freien“ stehen, also hier nur der „Vermessungstechniker“. Vor allem kann man an einem solchen Diagramm auch strukturelle Zusammenhänge ablesen, die zwar in der Tabelle schon enthalten, dort aber nicht so leicht ersichtlich sind, z. B. logische Abhängigkeiten zwischen Merkmalen („kaufen/verkaufen“ steht unter „mit Menschen“, d. h. alle Berufe, die das Merkmal „kaufen/verkaufen“ haben, haben auch mit Menschen zu tun) oder logisches Ausschließen (zu den Merkmalen am untersten Punkt wie „Pflanzen/Tiere“ gibt es keine Berufe, die auch das Merkmal „im Büro“ haben, d. h. die Merkmale „im Büro“ und „Pflanzen/Tiere“ schließen sich aus). Natürlich ist die Darstellung von Daten in Liniendiagrammen nur eine von mehreren Möglichkeiten, Daten der menschlichen Kommunikation zugänglich zu machen.

Die Schülerinnen und Schüler des Projektes „Was steckt in Daten?“ arbeiteten intensiv an mathematischen Fachinhalten. Darüber hinaus lernten sie in den Diskussionen, die beiden Mathematisierungen zu vergleichen und zu bewerten. So stellten sie fest, dass die Darstellung der Daten mit Hilfe von Liniendiagrammen ihnen im Gegensatz zu der unveränderbaren Liste ein dialogisches Vor- und Zurückschauen ermöglicht. Die Landschaft der Daten wird hier aufbereitet, um die Möglichkeit zu geben, eigene Entscheidung zu treffen. Es können leicht Fragen beantwortet werden der Art „Was ist, wenn ich auf diese Eigenschaft meines Berufswunsches verzichte, welche Berufe kann ich dann statt dessen ergreifen?“ Die Darstellung von Daten in Liniendiagrammen ermöglicht somit ein Navigieren, ein Hin- und Herschauen und die nötigen Seitenblicke, so dass er sukzessive seine Vorstellungen über ihm wichtige Kriterien schärfen kann, um endlich eine begründete Entscheidung zu treffen. Im Vergleich dazu hielt der Output des Programms Medialog den Anforderungen der Schülerinnen und Schüler nicht stand, die sie aus ihrer eigenen Betroffenheit heraus formuliert hatten. Der in dem Programm verfolgte Ansatz, die Daten zu verrechnen, um dann eine oder mehrere beste Lösungen für den Nutzer zur Verfügung zu stellen, wurde als ein völlig anderer Umgang mit Information und Entscheidungsunterstützung erkannt. So formulierten sie, dass dem Nutzer hier der Prozess der Entscheidungsfindung abgenommen wird, während die Entfaltung von Daten in Begriffsverbänden und ihre Visualisierung durch Liniendiagramme die strukturelle Unterstützung von begründeten Entscheidungsfindungen leistet.

Die mit den beiden Programmen verfolgten Ansätze hat Roland Fischer als offene und geschlossene Mathematisierungen typisiert (vgl. Fischer 1984). Damit meint er die prinzipiell unterschiedlichen Zielrichtungen beim Erstellen der mathematischen Modelle: Während es bei geschlossenen Mathematisierungen um das Finden von geschlossenen Lösungen auf der Grundlage einer möglichst umfassenden Beschreibung des Sachverhaltes geht, versucht man mit offenen Mathematisierungen keine endgültigen Lösungen zu bestimmen, sondern Alternativen darzustellen und somit menschliche Entscheidungsfindungen nur zu unterstützen statt sie zu ersetzen. Wir werden im dritten Abschnitt der Arbeit darauf zurückkommen.

Durch die eigene Auseinandersetzung mit dem Programm Medialog einerseits sowie den Liniendiagrammen andererseits und durch die thematisch bedingte persönliche Betroffenheit gelang es, die Schülerinnen und Schüler für eine wichtige Frage zu sensibilisieren: Welche Rolle kann und soll Mathematik im Bereich der Entscheidungsfindung spielen? Diese Fragen sind für eine emanzipatorische mathematische Bildung von immenser Bedeutung. Betrachtet man die aktuellen Lehrpläne oder die von Heymann 1996 neu entfachte theoretische Diskussion um mathematische Allgemeinbildung, so herrscht große Übereinstimmung über das Ziel, die Schülerinnen und Schülern zu einem kritischen Umgang mit Mathematisierungen zu befähigen (Heymann fasst dies unter die allgemeinbildende Aufgabe der „Entfaltung eines kritischen Vernunftgebrauchs"). Fischer hat diesen Anspruch mathematischer Bildung schon früh in dem hier gemeinten Sinne formuliert und begründet:

> „Aufgabe der Bildung in Bezug auf Mathematik ist es, zur Beherrschung von Mathematik zu führen, womit nicht in erster Linie die Beherrschung mathematischer Techniken, das Verstehen mathematischer Theoreme etc. gemeint ist, sondern das Vorhandensein eines vernünftigen, realistischen Verhältnisses zwischen Mensch und Mathematik. Hierzu sind Schritte der Überwindung bzw. Befreiung von Mathematik nötig, auch eine Distanzierung des Menschen vom Wissen, die in den heutigen Lehrplänen nicht vorgesehen ist. Sie sind aber Voraussetzung für eine Haltung zur Mathematik, die so offen ist, dass mathematische Inhalte akzeptiert, gegebenenfalls Techniken angeeignet werden können, die es aber andererseits verhindert, dass Mathematik als etwas Allumfassendes - im positiven oder negativen Sinn - gesehen wird." (Fischer 1984, S. 52)

Der im Rahmen des Projektes durchgeführte Unterricht ist u. E. ein gutes Beispiel dafür, dass die von Fischer geforderte Befreiung vom Gegenstand im Mathematikunterricht nicht die Ablehnung des Faches zur Folge haben muss. Es geht im Gegenteil um die Förderung eines kritisch-konstruktiven Umgangs mit Mathematik, der neben der Kritik an bestehenden Mathematisierungen auch Alternativen aufzeigt. Die Lernenden entwickelten eine große Kompetenz in der Auseinandersetzung mit Mathematisierungen und dem Stellenwert von Mathematik bei der Unterstützung in Entscheidungsprozessen im Zusammenhang mit dem Programm Medialog, die in dem in Abbildung 3 abgedruckten Brief der Schülerinnen und Schüler an das Bundesamt für Arbeit deutlich wird. Sie haben ihn eigenständig im Rahmen des Projektes formuliert, leider hat das Arbeitsamt auf diesen Brief nicht reagiert.

Das Projekt und als Ergebnis der Brief sind für uns ein eindrucksvolles Beispiel, wie Lernende über die Rolle argumentieren können, die Mathematik für den Menschen spielen soll. Im Gegensatz zu der Schülerin, die wir uns eingangs vorgestellt haben, haben diese Schülerinnen und Schüler einen sehr emanzipierten Umgang mit dem Programm des BIZ gefunden. Sie können formulieren, wo das Problem bei der geschlossenen Mathematisierung durch Medialog liegt, was ihnen die Mathematik, die diesem Programm zu Grunde liegt, ermöglicht, und was sie verhindert. Und sie haben sogar exemplarisch alternative Mathematisierungen kennen gelernt, deren Vorzüge sie benennen können.

Sehr geehrte Damen und Herren,

wir, einige Schüler des Alten Kurfürstlichen Gymnasiums Bensheim, haben uns in unserer Projektwoche mit dem Thema Berufswahl und Beratung zur Berufswahl befasst. In diesem Rahmen haben wir auch das Computerprogramm zur Berufsberatung des Darmstädter Berufsinformationszentrums kennen gelernt. ... Das große Manko daran ist unserer Meinung nach, dass das Programm keine Alternativmöglichkeiten anbietet, falls eine bestimmte Eigenschaft nicht, bzw. eine Eigenschaft zu viel oder eine andere Eigenschaft ausschließend angewählt wurde. Wir haben im Rahmen des Projektes eine andere Möglichkeit der Darstellung kennen gelernt, die ... ein breites Spektrum an Informationen liefert, und zwar in Form eines Diagramms. Der Vorteil, den diese Diagramme gegenüber dem von den BIZs verwendeten Computerprogramm haben, ist, dass man auch einen kleinen „Seitenblick" wagen kann und somit vielleicht auch auf andere Berufe trifft, die einen interessieren.
Wir werden im Folgenden anhand eines Beispieles erklären, wie man ein solches Diagramm liest. ....

Falls Sie interessiert sind, könnten wir Ihnen ein entsprechendes Programm ausarbeiten. ...

Ihr Projekt „Berufswahl und Berufswahlberatung"-Team

Abb. 3: Brief der Lernenden an das Bundesamt für Arbeit (Thamm 1996, S. 53/54)

2. Was steckt dahinter? – Die Rolle der Mathematik

Hinter obigem Beispiel der Entscheidungsfindung mit Hilfe des Programms Medialog steckt ein sehr grundsätzliches Problem, mit dem wir es in der (computerunterstützten) Wissensverarbeitung häufig zu tun haben: Wann immer es darum geht, große Mengen von Daten, Informationen und Wissen zu verarbeiten und den Nutzern für konkrete Probleme Ausschnitte daraus zur Verfügung zu stellen, stellt sich die Frage, in welcher Form das geschehen soll. Oft ist natürlich das Muster, wie es in diesem Computerprogramm umgesetzt ist, durchaus zweckmäßig: Man hat eine Datenbank und will konkret wissen, welche Menge von Objekten bestimmte Eigenschaften erfüllen. Dann ist die Datenbankabfrage mit der Ausgabe einer entsprechenden Liste ein adäquates Mittel.

Viel häufiger geht es aber um komplexe Fragestellungen, so wie bei den Schülerinnen und Schülern, die hier Unterstützung zur Entscheidungsfindung suchen, in denen noch gar nicht genau klar ist, was die wichtigen Kriterien sind, nach denen die Entscheidung für die jeweilige Person zu treffen ist. Vielleicht würde sich die Schülerin oder der Schüler von dem einen oder anderen Merkmal durchaus trennen, wenn sie oder er dadurch andere Vorzüge erhalten würde. Und dies geht nicht nur den Schülerinnen und Schülern bei ihrer Berufswahl so, sondern vielen Entscheidungsträgern, etwa in großen Wirtschaftsunternehmen. Häufig müssen sie Entscheidungen fällen, bei denen die Kriterien vorab gar nicht klar sind. Statt dessen geht es darum, zwischen verschiedenen Kriterien abzuwägen und widerstreitende Interessen zusammenzubringen. Natürlich wollen auch Manager Berechnungsmodelle und Hilfen, um bei komplexen Entscheidungen unterstützt zu werden. Im Gegensatz zu den Nutzern des Berufsinformationszentrums, die ja keine andere Wahl haben, als das Programm und seine Ergebnisse so hinzunehmen, wie es ist, sind viele Manager nicht mehr bereit, sich in ihrer Autonomie durch mathematische Modelle oder Computersysteme einschränken und sich ihre Entscheidungen einfach von Programmen abnehmen zu lassen. Hinzu kommt die mittlerweile sich durchsetzende Einsicht, dass eine volle Automatisierung selbst monotoner Tätigkeiten prinzipiell schwierig und wegen ihrer fehlenden Flexibilität aus ökonomischer Sicht nicht lohnend ist (vgl. Asendorpf 2001)

Damit ist ein Problem angesprochen, an dem von Seiten der Mathematik gearbeitet werden muss, damit sie überhaupt entsprechende Angebote machen kann: Fischer führt aus, dass die Mathematik ihren Charakter wandeln muss, um im Rahmen einer vernünftigen Entscheidungsfindung einen wichtigen Beitrag leisten zu können (Fischer 1991). Statt Probleme lösen zu wollen, muss sie Instrumente entwickeln, um Probleme möglichst gut zu beschreiben, zu explorieren. Statt Komplexität zu reduzieren, bis keine Entscheidungsspielräume mehr da sind, muss es darum gehen, durch gelungene Strukturierung Entscheidungsspielräume offen zu legen und vernünftige Entscheidungen damit erst zu ermöglichen. Damit wird auch die Rolle des Mathematikers in Anwendungssituationen eine andere:

> „Während in der klassischen Vorgangsweise der Mathematiker versucht, die Komplexität zu reduzieren und Alternativen auszuschließen, handelt er im anderen Fall entsprechend dem ‚ethischen Imperativ', der von Heinz von Foerster (1984, S. 3) so formuliert wurde: ‚Act always so as to increase the number of choices'." (Fischer 1991, S. 335)

Für unser konkretes Beispiel der Ausbildungsberufe können die beiden vorgestellten Mathematisierungen (zum einen durch das Programm Medialog und zum anderen durch die Formale Begriffsanalyse) das mögliche Spektrum zwischen Mathematik als Problemlöser und Mathematik als Darstellungs- und Kommunikations- mittel gut illustrieren. Zwar erscheint das Programm Medialog aus obigem Beispiel gerade aufgrund seiner fehlenden Transparenz der Prämissen als besonders wenig überzeugendes Beispiel geschlossener Mathematisierung, dennoch muss betont werden, dass es durchaus prototypisch ist für eine weit verbreitete Form der Wissensverarbeitung. Man denke nur an die internetgestützten Anfragen für Ferienwohnungen, bei denen man nach Eingabe der wichtigen Prämissen (Preisklasse, Haustier, Strandnähe usw.) als Output ein Angebot für eine einzige Ferienwohnung bekommt. Warum eigentlich können nicht wenigstens alle Angebote aufgezeigt werden, die der Datenbankabfrage entsprechen? Eine Begründung ist ausschließlich in der Vorstellung zu suchen, was die Computer hier für die Menschen leisten sollen.

Ein wichtiger Grund, warum offenere Mathematisierungen in der Praxis so wenig aktiviert werden, liegt auch darin, dass insgesamt mathematische Theoriebildungen, die Mathematik als Kommunikationsmittel verfügbar machen, immer noch zu wenig ausgearbeitet sind. Hier herrscht ein Defizit, das nur von Seiten der mathematischen Forschung aufzuarbeiten ist. Dass sich die Entwicklung mathematischer Kommunikationsmittel lohnt, soll in einem kleinen Exkurs am Beispiel der Formalen Begriffsanalyse verdeutlicht werden.

Exkurs: Formale Begriffsanalyse und ihr mathematischer Hintergrund

Die mathematische Theorie, die der Darstellung von Daten durch Liniendiagramme zu Grunde liegt, konnte seit ihrer Entwicklung in den letzten 20 Jahren in vielen Anwendungsbereichen fruchtbar gemacht werden. Als Beispiele für wissenschaftliche und kommerzielle Projekte, in denen entsprechende Navigationssysteme eingesetzt wurden, seien die folgenden genannt: Baurechtliche Vorschriften des Landes Nordrhein-Westfalen, Hörschäden bei Jugendlichen, Tourismusangebote an der Ostseeküste von Mecklenburg-Vorpommern, Flugereignisse auf dem Flughafen Frankfurt, Früherkennung von Hüfterkrankungen, Überprüfung einer Müllverbrennungsanlage. Die Erfahrungen aus ca. 180 Projekten zur Wissensverarbeitung in allen möglichen Bereichen zeigen, dass häufig nicht eine Reduktion von Daten bis zur eindeutigen Lösung gesucht werden sollte, sondern dass die Landschaft so strukturiert werden muss, dass man einen Überblick bekommen und eine begründete Entscheidung treffen kann (ausgeführt in Wille 1999a, 1999b).

Durch die Darstellung von Information in Liniendiagrammen kann man mit den Methoden der Formalen Begriffsanalyse verschiedene Aufgaben in der Entscheidungsfindung übernehmen, insbesondere kann man mit ihr Erkunden, Suchen, Erkennen, Identifizieren, Analysieren, Untersuchen, Verbessern, Restrukturieren und Einprägen. Es wird, kurz gesagt, das Explorieren von Daten und das Kommunizieren über wichtige Informationen im Rahmen von Entscheidungsprozessen unterstützt.

Auch wenn es auf den ersten Blick nicht so aussieht, steckt hinter der Darstellung von Daten mit Hilfe von Liniendiagrammen sehr viel Mathematik: Ausgehend von der These, dass Begriffe grundlegende Einheiten menschlichen Denkens sind, wird der Exploration der Daten eine mengentheoretische Formalisierung von Begriffen zugrundegelegt. Dazu wird eine Datentabelle wie in Abbildung 1 mathematisiert als ein formaler Kontext (G, M, I), bestehend aus einer Gegenstandsmenge G, einer Merkmalsmenge M und einer Relation $I \subseteq G \times M$, wobei die Beziehung
$(g, m) \in I$ gelesen wird als „der Gegenstand g hat das Merkmal m". Formale Begriffe werden definiert als alle Paare (A,B) von Gegenstands- und Merkmalsmengen $A \subseteq G$ und $B \subseteq M$ mit

$A = B' := \{g \in G \mid (g, m) \in I \text{ für alle } m \in B\}$ und

$B = A' := \{m \in M \mid (g, m) \in I \text{ für alle } g \in A\}$.

Dabei wird die Gegenstandsmenge A eines formalen Begriffs Umfang genannt, die Merkmalsmenge B heißt Inhalt. Die Bedingung B = A‘ bedeutet, dass der Umfang B eines formalen Begriffs (A, B) gerade aus denjenigen Gegenständen besteht, auf die alle Merkmale des Inhalts A zutreffen, und analog bedeutet A = B‘, dass der Inhalt A eines formalen Begriffs gerade aus denjenigen Merkmalen besteht, die alle Gegenstände des Umfangs B gemeinsam haben. Geordnet werden diese formalen Begriffe in der üblichen Oberbegriff-Unterbegriffsstruktur: $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) :\Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2$, d. h. ein Begriff ist Oberbegriff eines anderen, wenn sein Umfang den Umfang des anderen Begriffs umfasst. (Das bedeutet umgekehrt für die Inhalte, dass der Inhalt des Oberbegriffs im Inhalt des Unterbegriffs enthalten ist. Man mache sich dies an der Begriffsordnung von ‚Stuhl‘ und ‚Gartenstuhl‘ klar.) Man kann nun im Rahmen der mathematischen Theorie beweisen, dass die Menge aller formalen Begriffe eines formalen Kontextes zusammen mit der Oberbegriff-Unterbegriff-Ordnung $\leq$ einen vollständigen Verband bilden, den sogenannten Begriffsverband zum Kontext. Dies eröffnet eine mathematische Theorie, die durch verschiedene Sätze und Beweise gewährleistet, dass sich die Begriffsstrukturen mit Hilfe von Liniendiagrammen wie im obigen Beispiel darstellen lassen. In diesem Sinne ist also die mathematische Theorie Grundlage für die Kommunizierbarkeit von Daten mithilfe von Liniendiagrammen. Dabei veranschaulicht jeder Punkt des Liniendiagramms einen formalen Begriff. Der Umfang des Begriffes umfasst genau die Gegenstände, die unter diesem Punkt stehen; der Inhalt umfasst genau die Merkmale, die über dem Punkt stehen. Zur Illustration sei noch einmal auf das Beispiel im ersten Abschnitt der Arbeit verwiesen. (Zur intensiveren Auseinandersetzung mit der mathematischen Theorie siehe Ganter/Wille 1996, insbesondere sind dort auch Verfahren beschrieben, wie man mit komplexeren Datentabellen mit mehrwertigen Merkmalen umgehen kann).

Es soll hier nicht weiter auf die mathematische Theorie eingegangen werden, zumal die Formale Begriffsanalyse ja nur *ein* Beispiel unter verschiedenen mathematischen Theorien darstellt, die offene Mathematisierungen erlauben (vgl. unten). An dem Exkurs zu den mathematischen Hintergründen sollte aber deutlich werden, dass hinter solchen Computerprogrammen durchaus ernst zu nehmende Mathematik steckt. Diese zu entwickeln, ist eine Forschungsarbeit, die zwar durch die Nachfrage nach solchen Methoden von interessierten Laien vorangetrieben werden kann, die aber letztlich Aufgabe der Mathematiker ist. Aufgabe schulischen Mathematikunterricht sollte es aber sein, Mathematik in solchen Alltagssituationen zu entlarven, sich mit der verwendeten Mathematik auseinanderzusetzen und die Schülerinnen und Schüler gegenüber solchen Mathematisierungen kritikfähig zu machen, die ihnen die Entscheidungsfindung erleichtern sollen.

3. Öffnet nicht nur die Unterrichtskultur, sondern auch die Mathematik!

Offene Aufgaben und eine offenere Gestaltung des Mathematikunterrichts sind nach TIMSS zu einem didaktischen Allgemeingut geworden. Die intensive und wertvolle Diskussion um eine Reform des Mathematikunterrichts in dieser Hinsicht soll durch diese Arbeit auch keineswegs in Frage gestellt werden (auch die Autorinnen beteiligen sich an ihr, vgl. Lengnink/Prediger 2001, Prediger 2001). An dem Unterrichtsprojekt haben wir aber exemplarisch herauszuarbeiten versucht, dass über ein Öffnen der Unterrichtskultur hinaus der Mathematikunterricht auch in Bezug auf seine Fachinhalte überdacht werden muss. Wenn es uns bei der mathematischen Bildung um den Erwerb einer emanzipierten Position gegenüber dem Fach geht, so muss die Wirkung von Mathematisierungen und ihre Bewertung in Hinblick auf den Nutzen für die Menschen stärker Inhalt des Mathematikunterrichts werden.

Dafür ist es zunächst einmal wichtig, die überall verborgene Mathematik in gesellschaftlichen Institutionen und in Entscheidungsprozessen aufzudecken und als solche wahrzunehmen. Diesen Aspekt hat Skovsmose im Rahmen der im ZDM publizierten Diskussion zum Thema Mathematikunterricht und demokratische Erziehung (ZDM 30 (1998) 6 und ZDM 31 (1999) 1) als *mathematical archaeology* bezeichnet.

> „By this activity, I understand the process of excavating mathematics which might be encapsulated in certain political arguments, technologies or administrative routines.“ (Skovsmose 1998, S. 199)

Erst darüber wird es möglich, den Stellenwert von Mathematik in modernen Gesellschaften zu begreifen und sich mit der dort verwendeten Mathematik kritisch auseinanderzusetzen. Diese Fähigkeit zur kritischen Auseinandersetzung mit Mathematik setzt aber die Fähigkeit voraus, mathematische Werkzeuge zu benutzen, um Alternativen auszuloten. Wird dies mit gesellschaftlichen Kontexten verknüpft, in denen Entscheidungen zu treffen sind, so können Schülerinnen und Schüler einen Eindruck davon bekommen, in wie weit Mathematik in diesen Prozessen helfen kann. Skovsmose nennt diesen Aspekt *citizenship*:

> „The idea was to make mathematics, as a language of power, accessible to critical discourse.“ (Skovsmose 1998, S. 198)

In dem eingangs beschriebenen Unterrichtsprojekt sind diese beide Aspekte miteinander verbunden. Ging es doch darum, zunächst die Mathematik hinter dem Programm Medialog herauszufinden und sie dann kritisch zu bewerten. Ein kompetenter Umgang mit Mathematik, wie er von Skovsmose mit dem Konzept der *mathemacy* überschrieben wird (Skovsmose 1998, S. 200), umfasst neben anderen Reflexionsebenen auch die ‚model-oriented reflection‘, die auf die Verbindung zwischen Mathematisierung und Wirklichkeit focussiert und die ‚context-oriented reflection‘, die den sozialen Hintergrund des Einsatzes mathematischer Methoden in den Blick nimmt. Nimmt man diese beiden Reflexionsebenen ernst, so darf Mathematikunterricht nicht bei dem Verwerfen unsinniger Mathematisierungen stehen bleiben, sondern es müssen gemeinsam Kriterien für angemessenere Mathematisierungen erarbeitet werden, zu deren Umsetzung es im günstigsten Fall sogar mathematische Methoden gibt. *Mathemacy* hieße dann, dass mathematisch gebildete Laien einerseits Mathematisierungen kritisieren, aber auch alternative Mathematisierungen nachfragen können.

In dem Unterrichtsprojekt wurde dieser Prozess von den Schülerinnen und Schülern durchlaufen, wobei die Anforderungen an eine bessere Mathematisierung von ihnen selbst formuliert wurden. Die mathematischen Methoden der Formalen Begriffsanalyse, mit der diese Anforderungen umzusetzen waren, wurde von der Lehrerin, d. h. der mathematischen Expertin, vorgeschlagen und von den Lernenden auf ihre Leistungsfähigkeit in Hinblick auf die Anforderungen überprüft. Diese Aufteilung zwischen Experten und Laien ist auch für einen emanzipierten gesellschaftlichen

Umgang mit Mathematik wünschenswert (und ist in Fischers Konzept der Kommunikationsfähigkeit mit Experten ein Kernstück höherer mathematischer Bildung, vgl. Fischer o. J.).

Soll der Mathematikunterricht mathematikverständige Laien ausbilden und somit dem Auftrag demokratischer Erziehung gerecht werden, so müssen sich auch seine Fachinhalte ändern. Geschlossene Mathematisierungen sind für den Einsatz von Mathematik in gesellschaftlichen Entscheidungsprozessen oft zu eng. Der kritische Diskurs, der von Skovsmose gefordert wird, sollte sich daher nicht nur darauf beschränken, bestehende und benutzte geschlossene Mathematisierungen als inadäquat zu verwerfen. Denn das menschliche Bedürfnis, Struktur ins Dickicht der Entscheidungsmöglichkeiten zu bringen, ist ja nicht von der Hand zu weisen. Insofern sollte das Nachfragen nach Mathematisierungen, die stärker das Entfalten von Entscheidungsspielräumen als das Berechnen von Lösungen zum Ziel haben, als zentraler Inhalt des Mathematikunterrichts kultiviert werden. So betont Fischer, dass Mathematisierungen, die nicht auf die Berechnung von geschlossenen Lösungen, sondern auf die Entfaltung von Kommunikationsmitteln ausgerichtet sind, verstärkt in den Unterricht aufgenommen werden sollten. Er sieht die folgenden Akzentsetzungen in der mathematischen Modellierung:

> „Im Gegensatz zur 'geschlossenen Mathematik', bei der abgeschlossene Theorien, sicher funktionierende Algorithmen und möglichst alle Einzelheiten erfassende Modelle im Vordergrund stehen, betont ‚offene Mathematik' grundlegende Begriffsbildungen und Darstellungsformen und faßt Mathematik als Angebot an Darstellungs- und Kommunikationsmitteln auf. Die Darstellungsformen sind dabei vorwiegend visueller Natur, angefangen von einer Strichsymbolik für Zahlen über graphische Darstellung von Funktionen oder Beziehungen bis zur Formelschreibweise der Algebra." (Fischer 1984, S. 139)

An obigem Unterrichtsprojekt haben wir exemplarisch diskutiert, wie auch im schulischen Mathematikunterricht die Mathematik geöffnet werden könnte. Die Formale Begriffsanalyse ist dabei nur eine von vielen mathematischen Methoden, die sich für offenere Mathematisierungen realer Situationen eignet. Als ein in der Mathematikdidaktik bekannteres Beispiel ist die Explorative Datenanalyse (vgl. Biehler 1999, Biehler 1991) zu nennen, die ebenfalls versucht, Daten stärker zu explorieren und zu entfalten und somit die Nutzer bei Entscheidungsprozessen zu unterstützen. Die Mathematik dahinter und auch die Kommunikation über die Mathematisierungen ist dabei jedoch eine andere als in der Formalen Begriffsanalyse.

Da der Mathematik im Sinne offener Modellierungen die Rolle des formalen Aufbereitens von Informationen und des Explorierens von formal Möglichem zukommt, kann eine Auseinandersetzung mit offenen Mathematisierungen im Mathematikunterricht einen wichtigen Beitrag zu der Diskussion über Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Beschreibungen in realen Situationen leisten. Dies trägt dem von Skovsmose skizzierten Auftrag demokratischer Erziehung im Mathematikunterricht Rechnung. Natürlich gehört dann auch dazu, im Unterricht andere Kommunikationsformen zu pflegen, als dies vielfach gerade im Fach Mathematik üblich ist:

> „Education for democracy cannot be based on stereotypes of teaching-learning practices dominated by guardians and formulaic truths. It is important to make possible an interaction in the classroom which supports dialog and negotiation." (Skovsmose 1998, S. 200)

Dass aber bei einer Öffnung der Unterrichtskultur nicht stehen geblieben werden kann, haben wir zu begründen versucht. Es besteht die Hoffnung, dass mit einer offeneren Mathematik im Mathematikunterricht auch die Verständigkeit im Umgang mit Mathematik bei mathematisch gebildeten Laien zunimmt. Deswegen werben wir:

„Öffnet nicht nur die Unterrichtskultur, sondern auch die Mathematik!"

Literatur

Asendorpf, Dirk (2001): Der Mensch – besser und billiger, in: DIE ZEIT, Nr. 37, S. 41.

Biehler, Rolf (1991): Datenanalyse und Computer im Stochastikunterricht - Erfahrungen und Entwicklungsperspektiven, in: Andelfinger, B. / Schmitt, H.: Sanfter Mathematikunterricht. Eine andere Unterrichtskultur. Werkstatt Schule Ulm, Historisch-Ökologische Bildungsstätte Emsland e.V., Papenburg. S. 60-69

Biehler, Rolf (1999): Auf Entdeckungsreise in Daten, Themenheft mathematik lehren, Heft 97, S. 4-5.

Fischer, Roland (1984): Offene Mathematik und Visualisierung, in: Mathematica Didactica 7 (3/4), S. 139-160.

Fischer, Roland (1991): Mathematik und gesellschaftlicher Wandel, in: Journal für Mathematikdidaktik 12 (4), S. 323-345.

Fischer, Roland (o.J.): Höhere Allgemeinbildung, unveröffentlichtes Manuskript, IFF Wien / Klagenfurt .

Ganter, Bernhard / Wille, Rudolf (1996): Formale Begriffsanalyse: Mathematische Grundlagen, Springer, Berlin-Heidelberg.

Heymann, Hans Werner (1996): Allgemeinbildung und Mathematik, Beltz Verlag, Weinheim.

Lengnink, Katja / Prediger, Susanne (2001): Lebendiges Mathematiklernen: Der Blick der Themenzentrierten Interaktion auf die Mathematikdidaktik, in: Bildung und Erziehung 54 (3), S. 333-353.

Prediger, Susanne (2001): Mathematiklernen als interkulturelles Lernen. Entwurf für einen didaktischen Ansatz, in: Journal für Mathematikdidaktik 22(2), S. 123-144.

Skovsmose, Ole (1998): Linking Mathematics Education and Democracy: Citizenship, Mathematical Archaeology, Mathemacy and Deliberative Interaction, in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 30 (6), S. 195-203.

Thamm, Sybille (1996): Formale Begriffsanalyse. Eine Methode zur Datenanalyse im Rahmen der Projekttage am Alten Kurfürstlichen Gymnasium, Pädagogische Prüfungsarbeit im Fach Mathematik, Studienseminar Bensheim.

Wille, Rudolf (1999a): Conceptual landscapes of knowledge: a pragmatic paradigm for knowledge processing, in: Gaul, W. / Locarek-Junge (eds.): Classification in the Information Age. Springer, Heidelberg 1999, S. 344-356.

Wille, Rudolf (1999b): Menschengerechte Wissensverarbeitung, in: Bittner, Peter / Woinowsky, Jens (Hrsg.): Mensch - Informatisierung - Gesellschaft. LIT Verlag, Münster, S. 87-104.

Anschrift der Verfasserinnen:

Dr. Katja Lengnink / Dr. Susanne Prediger
TU Darmstadt, FB Mathematik
Arbeitsgruppe Fachdidaktik der Mathematik
Schlossgartenstrasse 7
64289 Darmstadt
email: lengnink bzw. prediger@mathematik.tu-darmstadt.de