Susanne PREDIGER, Bremen

Brüche bei den Brüchen – Bildungschancen nutzen durch Auseinandersetzung mit epistemologischen Denkhürden

Erschienen in den Beiträgen zum Mathematikunterricht 2003, S. 509-512.

„Katharina hatte, im Rahmen einer Hausaufgabe, unter ordnungsgemäßer Anwendung der Bruchrechenregeln die Zahl 2 durch ¼ dividiert und kam dann zu mir, weil sie sich über die 8 als Ergebnis wunderte. Wieso konnte das Ergebnis größer sein als der Dividend? Sie hatte doch ‚geteilt'! Ich versuchte ihr einsichtig zu machen, weshalb das (im Bereich positiver Zahlen) bei Division durch Zahlen, die kleiner als 1 sind, so sein muss. Als Gegenbeispiel hielt sie mir vor, wenn sie einen Apfel ‚in Viertel' teile, seien die Stücke aber kleiner als der Apfel. Ich wies sie auf den Unterschied zwischen ‚teilen in' und ‚teilen durch' hin. Abschließend meinte sie: ‚Okay, ich weiß jetzt, wie man das rechnen muss. Aber du willst mir doch wohl nicht weismachen, dass man in Mathematik logisch denkt!'" [3, S. 206]

Diese Episode ist ein typisches Beispiel, wie die Übertragung einer vertrauten Operation (Division) auf den erweiterten Zahlbereich Brüche Irritationen erzeugen kann, weil Grunderfahrungen und -überzeugungen über mathematische Operationen in Frage gestellt werden. Katharinas ablehnende Reaktion zeigt den Effekt, den solche Erschütterungen auslösen können, wenn sie nicht aufgeklärt werden.

Für die Multiplikation wurde die analoge Fehlvorstellung wiederholt empirisch nachgewiesen: Zwar können viele Lernende erfolgreich Multiplikationsaufgaben rechnen, stimmen aber dem Statement ‚Die Multiplikation (bei Brüchen) vergrößert immer' zu. Daher wird in der Didaktik betont, dass einer solchen Fehlvorstellung durch Thematisierung entgegengewirkt werden muss [6].

Brüche bei den Brüchen – Vermeidbar oder notwendiger Lernschritt?

H. Winter listet sechs Grundüberzeugungen über natürliche Zahlen auf, deren Übertragung auf Bruchzahlen nicht nur als Fehlvorstellungen gesehen werden sollten, die verhindert werden müssen, sondern als „unhintergehbare und nicht einfach hinwegmethodisierbare Schwierigkeit der Bruchrechnung" [10, S. 18], die immer wieder auftauchen werden: 1. Kardination (Zahl beantworten immer Frage nach „wie viele?"); 2. Eineindeutigkeit zwischen Zahl und Zahlzeichen, 3. Diskrete Ordnung (Jede Zahl hat einen Nachfolger); 4. [...]; 5. Einschränkung der Division (a : b ist nicht immer restlos möglich. Wenn, dann ist Ergebnis immer kleiner als die geteilte Zahl); 6. Multiplikation und Ordnung: Multipliziert man zwei Zahlen, die größer als 1 sind, so ist das Ergebnis größer als jede der beiden Zahlen (Multiplizieren als „starkes" Vermehren) [10, S. 18f].

Epistemologische Denkhürden als Bildungsanlässe und -inhalte

Winters Sichtweise lässt sich theoretisch einordnen durch das Konzept der epistemologischen Denkhürden (epistemological obstacles, vgl. [1], [9]). Demnach verlaufen Wissensbildungsprozesse nicht linear. Statt dessen müssen immer wieder Denkhürden überwunden werden, die der sachlichen Struktur der jeweiligen Inhalte inhärent sind, weil sie unmittelbar mit ihrer Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte zusammen hängen. Die Auseinandersetzung mit den Denkhürden (und schließlich ihre Überwindung) ist für ein fortschreitendes Verständnis von zentraler Bedeutung, sie kann daher kaum umgangen.

Meist hängen Denkhürden mit Vorstellungen, Ideen und Deutungen zusammen, die für den Umgang mit dem Begriff charakteristisch sind. Diese verursachen Sichtbeschränkungen, die einer grundlegenden Sichterweiterung im Wege stehen. So steht z.B. hinter Katharinas Irritation als Denkhürde die Grundvorstellung vom Dividieren als Aufteilen. Die Sichtbeschränkung zu überwinden, widerstrebt Katharina, weil sie den Sinn einer Erweiterung der Vorstellung vom Teilen nicht einsehen kann. Dies wäre jedoch nötig für ein inhaltliches Verständnis der Division von Brüchen.

Während das Konzept der epistemologischen Denkhürden bisher im Wesentlichen als deskriptive Kategorie zur Analyse von Lernprozessen diente, soll es hier auch im normativen Sinne aktiviert werden: Wenn Denkhürden nicht nur Bestandteil des Wissensbildungsprozesses sind, sondern als Teil des mathematischen Wissens selbst verstanden werden sollen [1], dann sollten sie auch als Bildungsinhalte ernstgenommen werden. In ihrer Thematisierung stecken große Bildungschancen, z.B. hinsichtlich der Muster und Zielsetzungen mathematischer Begriffsbildungsprozesse. Bildungstheoretische Begründungen für diese Perspektive gibt Lengnink z.B. in [4].

Vorschläge für Thematisierung von Bruchstellen

Epistemologische Denkhürden sollten immer dann aufgegriffen und besprochen werden, wenn sie im Lernprozess auftauchen (im Sinne des situativen Aufgreifen von Reflexionschancen, vgl. [8]). Darüber hinaus gibt es Ansätze, eine Auseinandersetzung mit ihnen systematischer zu inszenieren.

1. Voraussetzung: vielfältige Grundvorstellungen aufbauen

Der Vorstellung der Kardination (dass also Zahlen stets die Frage nach „wie viele“ beantworten) sollte entgegenwirkt werden durch den Aufbau vielfältiger Grundvorstellungen von Brüchen, wozu bereits viele Aufgabenformate und handlungsorientierte Zugänge vorgeschlagen wurden [2]. Damit die entwickelten Vorstellungen auch bei der Überwindung weiterer Überzeugungen tragfähig sind, müssen sie auch dort immer wieder explizit angesprochen werden (z.B. zur Überzeugung von der Eineindeutigkeit der Brüche und ihrer Schreibweisen: Gleichwertigkeit von Brüchen sollte in vielen unterschiedlichen Kontexte auftauchen). Als Aufgabenformat eignet sich z.B. das Schreiben lassen von Rechengeschichten:

Erzähle eine Geschichte, in der die Gleichwertigkeit $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ vorkommt. Die Brüche können dabei Apfel-Schorle-Mischungen, Pizza-Verteilungs-Situationen, oder anderes beschreiben.“

Vielfältige Vorstellungen sollen jedoch nicht nur aufgebaut, die Vielfältigkeit sollte auch thematisiert werden, denn gewachsene Grundüberzeugungen können nur durch eine Bewusstheit für ihre fehlende Tragfähigkeit überwunden werden. So können z.B. systematisierende Überblicke unter dem Titel „Brüche haben viel Gesichter“ [2] hilfreich sein, um enge Zahlvorstellungen zu überwinden.

2. Wundern lassen und Wunder aufklären

Dass bestimmte Eigenschaften für natürliche Zahlen für Brüche nicht gelten, etwa die Existenz eines eindeutigen Nachfolgers, ist ein Anlass, sich zu wundern und sollte im Lernprozess auch als solches thematisiert werden. Hier kann z.B. das Vorlesen von Phantasiegeschichten ein adäquates methodisches Mittel sein, um in Einkleidungen die Ungeheuerlichkeit der Unterschiede deutlich werden zu lassen (etwa das nicht lösbare Rätsel an den bösen Drachen, wer der rechte Nachbar von ½ ist, vgl. [7]).

Wunder sollten jedoch nicht nur erlebt, sondern auch inhaltlich aufgeklärt werden, und das heißt z.B. für die Multiplikation, nicht nur durch Nachrechnen zu konstatieren, dass es (trotz gegenteiliger Überzeugung) Produkte von Brüchen gibt, die kleiner sind als ihre Faktoren. Statt dessen sollten die Gründe durch Rückgriff auf inhaltliche Grundvorstellungen aufgeklärt werden. Eine Möglichkeit bietet z.B. folgende Schulbuchaufgabe:

„Eigentlich ist es nicht verwunderlich, dass das Produkt mit einer Bruchzahl kleiner als einer der Faktoren sein kann. Erfinde zu dem folgenden Produkt $\frac{2}{5} \cdot 15$ eine Textaufgabe. Erkläre mit der Textaufgabe, wieso das Produkt kleiner als 15 sein muss.“ [5, S. 96]

3. Unterschiede explizit gegenüberstellen lassen

Um eine höhere Bewusstheit für Unterschiede zwischen Bruchzahlen und natürlichen Zahlen zu erreichen, können diese themenbezogen gegenübergestellt werden. Schüler/innen können solche Zusammenfassungen auf der Meta-Ebene auch selbst in Form eines Berichtes erarbeiten:

„Schreibe einen Bericht über den Unterschied zwischen Bruchzahlen und natürlichen Zahlen. In diesem Bericht sollten [...folgende] Begriffe vorkommen: Erweitern, kürzen, dicht, Nachfolger, Vorgänger, der Größere von den Kleinen.“ [5, S. 79]

4. Aufdecken von Fehlern und Fehlvorstellungen – „Nimm-Stellung“

Mit „Nimm-Stellung“-Aufgabenformaten können Fehler und Fehlvorstellungen angesprochen werden, auch wenn die Denkfehler in diesem Moment nicht von den Lernenden selbst gemacht wurden (was der wirkungsvollere Anlass ist). Dabei sollten die auf der Ebene der Rechenregeln bereits etablierten Fehlersuchaufgaben um Aufgaben zu inhaltlichen Fehlvorstellungen ergänzt werden. Z.B. eine Konfrontation der Lernenden mit den ersten 3½ Zeilen des Einführungsbeispiels oben, und dann die Fragen:

Was würdest Du Katharina sagen? Wo steckt ihr Denkfehler? Wie würdest Du die Rechnung 2:¼ interpretieren, damit Du Dich nicht über das Ergebnis wundern musst?

5. Sinndimension dahinter ansprechen

Sowohl bei Katharina als auch bei situativ aufgegriffenen Irritationen ist es wichtig, die hinter den Veränderungen stehenden Sinndimensionen anzusprechen. Eine methodische Großform wären in Gruppenarbeit vorbereitete Streitgespräche mit verteilten Rollen, z.B. zu Katharinas Fragen:

Was soll die Ausweitung der Vorstellung vom Teilen auf das „Passen in“? Wieso verändern die Mathematiker einfach ihre Vorstellung davon, was ein Teil-Aufgabe bedeutet? (Vorteile und Nachteile)

Aufgreifen von Irritationen als Prinzip - über Bruchrechnung hinaus

Bruchrechnung ist ein wichtiger Beispielbereich für die allgemeine Forderung, nicht mehr gültige Grundüberzeugungen explizit aufzubrechen und die dadurch entstehenden Brüche als Anlässe für mathematische Bildungsprozesse zu begreifen ([4], vgl. auch Konfliktansatz [8]). Dies ist auf unterschiedlichen Anspruchs- und Reflektionsniveaus nötig und möglich.

Literatur

[1] Brousseau, G. (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathematiques, in : Rech. Didact. Math. 4(2), 165-198.

[2] Hefendehl-Hebeker, L. (1996): Brüche haben viele Gesichter, in: ML 78, 20-48.

[3] Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik, Beltz, Weinheim.

[4] Lengnink, K. / Peschek, W. (2001): Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung, in: Lengnink, K. u.a. (Hg.) Mathematik und Mensch, Verlag Allgemeine Wissenschaft, Mühltal, 65-81.

[5] Neue Wege Mathematik 6, Arbeitsbuch für Gymnasien, Schroedel, Hannover 2001.

[6] Padberg, F. (2002): Didaktik der Bruchrechnung, Spektrum, Heidelberg.

[7] Paulitsch, A. (1993): Das Märchen von dem bösen Drachen und dem klugen Bruch, in: dies.: Zu Gast bei Brüchen und ganzen Zahlen, Aulis, Köln, 37-40.

[8] Prediger, S. (2001): Mathematiklernen als interkulturelles Lernen. Entwurf für einen didaktischen Ansatz, in: JMD 22(2), 123-144.

[9] Sierpinska, A. (1992): On understanding the notion of function, in: Harel, G. / Dubinsky, E. (Hrsg.): The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy, Notes and Reports, Mathematical Association of America, Vol. 25, 25-58.

[10] Winter, H. (1999): Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung, Manuskript, RWTH Aachen.