# Ausgangspunkt: Die unsortierte Fülle. Systematisieren am Beispiel des Mathematikunterrichts

Susanne Prediger

Ohne Bilder erschienen im
Friedrich Jahresheft 2003: Aufgaben. Lernen fördern – Selbständigkeit entwickeln, S. 93-95.

Wir suchen in allen Fächern nach Wegen, um das Lernen nachhaltiger zu gestalten. Eine wichtige Rolle können dabei Systematisierungsaufgaben spielen, denn sie ermöglichen den Lernenden, sich in der zunächst unübersichtlichen Landschaft der Lerninhalte zu orientieren: Was ist zentral, was steht eher am Rand? Wie hängen die einzelnen Aspekte zusammen?

In diesem Artikel sollen anhand von Beispielen aus dem Mathematikunterricht meiner Klasse 10 mögliche Ansätze vorgestellt werden.

## Wissensspeicher und Spicker

Als wichtigste Maßnahme gegen das Vergessen erstellen wir im Unterricht Wissensspeicher. Sie ermöglichen zum einen, das erworbene Wissen überhaupt sichtbar und überschaubar werden zu lassen, zum anderen dienen sie als Material, um sich später an das Gelernte zu erinnern (vgl. auch Brückner 1978a).

Die Auseinandersetzung darüber, was in einen solchen Wissensspeicher gehört, führt zu lehrreichen Diskussionen darüber, welches Wissen im Mathematikunterricht als wichtig erachtet wird: Nur die Formeln, oder vielleicht noch mehr? Welche Rolle können Musteraufgaben spielen? Wo hilft eine Skizze oder ähnliches? Wie „speichert" man mathematische Begriffe?

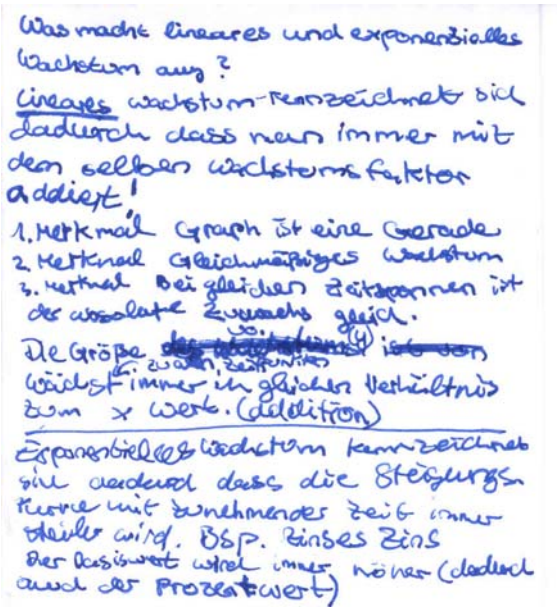
Was macht lineares und exponentielles Wachstum aus?
Lineares Wachstum kennzeichnet sich dadurch dass man immer mit dem selben Wachstumsfaktor addiert!
1. Merkmal Graph ist eine Gerade
2. Merkmal Gleichmäßiges Wachstum
3. Merkmal Bei gleichen Zeitspannen ist der absolute Zuwachs gleich.
Die Größe ... ist ... wächst immer im gleichen Verhältnis zum x Wert. (Addition)
Exponentielles Wachstum kennzeichnet sich dadurch dass die Steigungs Kurve mit zunehmender Zeit immer steiler wird. Bsp. Zinses Zins
Der Restwert wird immer höher (dadurch auch der Prozentwert)

**Abbildung 1:** Spicker einer Schülerin

Wenn das Erstellen eines Wissensspeichers gemeinsam geübt wurde, können Schülerinnen und Schüler der Klasse 9 und 10 dies in Kleingruppen zunehmend eigenverantwortlich zu tun.

In meinem Unterricht gibt es eine spezielle Form des Wissensspeichers: Die Schüler/innen schreiben vor den Klassenarbeiten Spicker, die sie dann auch verwenden dürfen (erlaubt ist jeweils ein DIN A6-Zettel mit allem, was den Lernenden wichtig erscheint). Dies geschieht in Einzelarbeit mit gegenseitiger Beratung. Die Spicker werden mit eingesammelt und hinsichtlich ihrer Qualität kommentiert, ohne sie in die Note einfließen zu lassen (Abbildungen 1 und 2 zeigen zwei Spicker von mittelmäßigen Schülerinnen

zum Thema exponentielles Wachstum).

Die zweckgerichteten Zusammenfassungen durch Wissensspeicher oder Spicker am Ende einer Lerneinheit sind hilfreich, um in der Rückschau das Wesentliche noch einmal herauszuarbeiten. Soll ein Thema nach einiger Zeit wieder aufgegriffen werden, sind dazu auch zusammenfassende Schülervorträge ein erprobtes Mittel (Brückner 1978b).

Systematisierungsphasen sind jedoch nicht nur am Ende einer Unterrichtseinheit nützlich, sondern können bereits für die Erarbeitung eines neuen Themengebietes wichtige Orientierungen geben. Dazu gibt es im wesentlichen zwei Ausrichtungen, die in den folgenden beiden Beispielen erläutert werden sollen. Während es im ersten Beispiel um das Verschaffen eines Überblicks und das Erkennen von Zusammenhängen geht, handelt das zweite Beispiel elementarer von der Klassifizierung typischer Aufgaben.

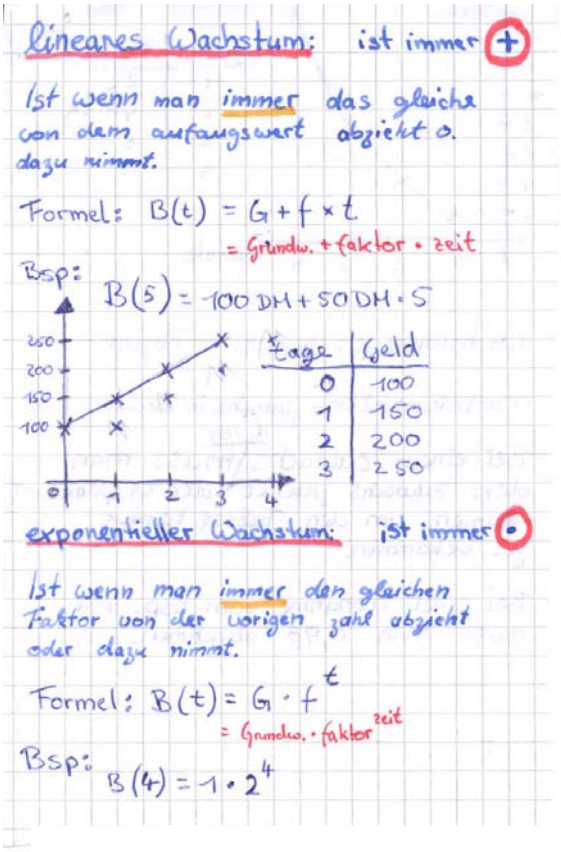


**Abbildung 2**: Spicker einer anderen Schülerin

Beide Beispiele zeigen, wie systematisierende können, um auf höheren Ebenen über das Gelernte nachzudenken.

### Überblicke schaffen und Zusammenhänge knüpfen

Der Anlass: Mitten im Themenfeld exponentielles und lineares Wachstum sagen zwei Schülerinnen zu mir: „Das ist irgendwie ein komisches Thema, was sollen wir denn davon in der Arbeit können? Außerdem hätten wir endlich gerne die Formel, nach der wir die Aufgaben lösen können.“ In der nächsten Stunde kommen wir tatsächlich dazu, für exponentielle Wachstumsprozesse eine Funktionsgleichung zu formulieren, statt wie bisher Funktionswerte rekursiv zu bestimmen. Dennoch wurmt mich das eingeschränkte Mathematikbild: Mathematik ist doch mehr als Formeln suchen! Was kann ich also tun, damit die Lernenden die Formel als *eine* Darstellungsform unter vielen verstehen? Dies scheint ja bisher nicht gelungen zu sein.

Deswegen verschaffen wir uns nun systematisch einen Überblick: Mit welchen Mitteln können wir Wachstumsprozesse darstellen? Beim Sammeln zeigt sich, wie viele Darstellungsformen für funktionale Zusammenhänge wir bereits kennen gelernt haben: Funktionsgleichung, Wertetabelle, Funktionsgraph im Koordinatensystem und verbale Beschreibung („so einfach als Beschreibung mit Worten“). Wir stellen fest: Lineares und exponentielles Wachstum drücken sich in jeder der Darstellungsformen anders aus. Die mathematischen Haupttätigkeiten dieses Themengebiets bestehen darin, von einer Darstellungsform in die andere zu wechseln.

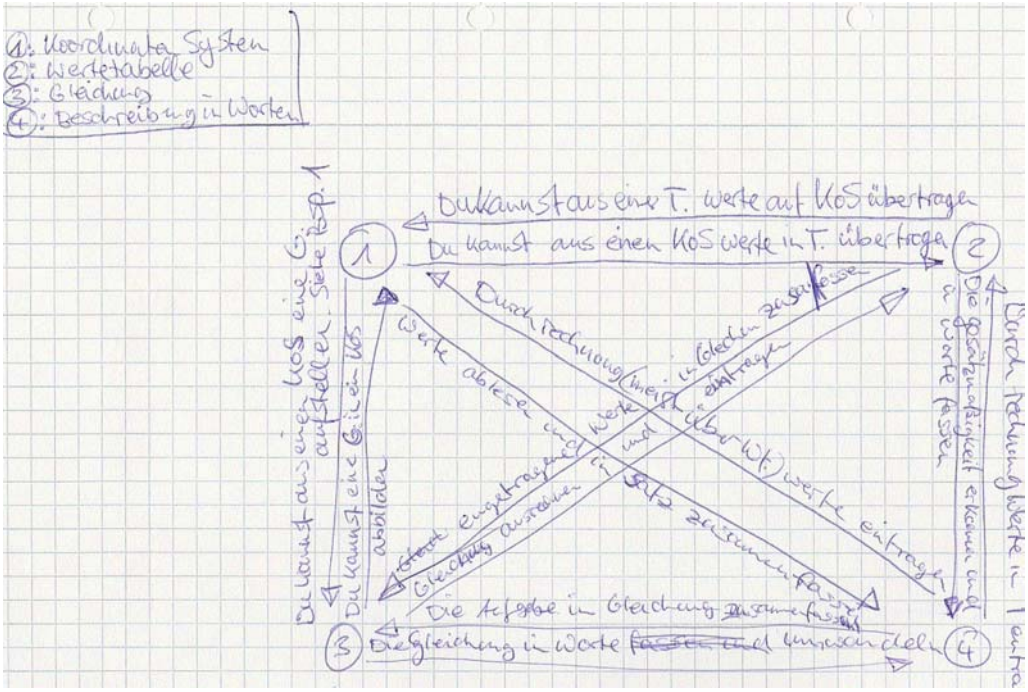


**Abbildung 3**: Erster Entwurf der Landkarte einer Schülergruppe

(Typische Aufgabe: „Gegeben folgender Wachstumsprozess..., gib die Funktionsgleichung an und skizziere im Koordinatensystem.“). Damit sich dieses Überblickswissen festigt und konkretisiert, entwerfen die Lernenden nun in Kleingruppen Landkarten. In ihnen soll festgehalten werden, wie man von einer Darstellungsform zur nächsten kommt, und wie man exponentielle Wachstumsprozesse auf den verschiedenen Ebenen erkennen kann (Abbildung 3 und 4 zeigen erste Versuche der Lernenden für eine solche Landkarte, Abbildung 5 die Landkarte, die schließlich gemeinsam an der Tafel erarbeitet wurde. Dabei zeigen die umrandeten Pfeile die Wege, die für jeden Funktionstyp gangbar sind, die nicht umrandeten die, die nur für spezielle Funktionstypen wie Exponentialtypen so leicht zu gehen sind).

Beim Erstellen der Plakate gibt es viele Aha-Effekte: Manche Wege sind leicht (z.B. von der Wertetabelle zum Koordinatensystem), andere noch schwer (z.B. von fast überall zur Funktionsgleichung), einige gehen über eine dritte Station (z.B. von der Funktionsgleichung zum Koordinatensystem über die Wertetabelle). Einige sind nur für sehr spezielle Funktionen überhaupt begehbar (z.B. von der Wertetabelle zur Funktionsgleichung kommt man bei lineare oder exponentiellen Funktionen leicht; für viele andere ist eine Funktionsgleichung nicht leicht zu finden oder sogar gar nicht existent).

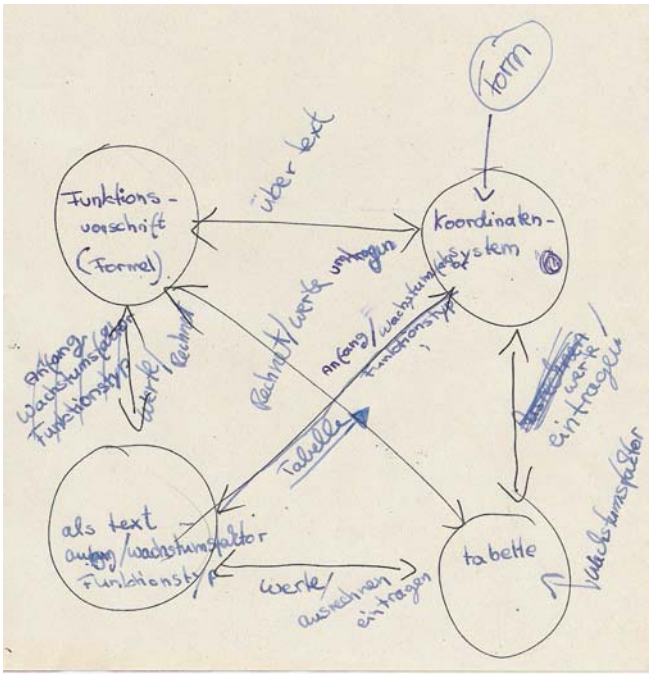


**Abbildung 4**: Erster Entwurf der Landkarte einer Schülerinnengruppe

Darüber hinaus bieten die entstandenen Landkarten eine gute visuelle Grundlage für eine wichtige Sinn-Frage: Wieso will man überhaupt zwischen den verschiedenen Darstellungsformen hin- und herwechseln und verwendet im Mathematikunterricht so viel Zeit darauf, dies zu lernen? Die Antwort der Lernenden nach einiger Diskussion: „Weil man in den jeweiligen Darstellungen unterschiedliches gut machen kann: Für einen groben Überblick ist die Graphik gut, für Prognosen eine Funktionsgleichung praktisch usw.“ Herausgearbeitet wird hier die in der Mathematik so fundamentale Idee des Beschreibungswechsels, denn sie ist organisch aus unseren Systematisierungsbemühungen gewachsen.

Insgesamt konnten die Schüler ihr z.T. intuitiv vorhandenes Wissen auf der „Ebene des bewussten Handwerkens“ explizieren (Neubrand 1990). Sie konnten Lücken erkennen und einordnen, was wir gerade tun („Machen wir deswegen exponentielle Funktionen, weil man da so schön von einer Ebene zur anderen wechseln kann?“). Mir als Lehrerin geben die im ersten Versuch entstandenen Landkarten Aufschluss über den vorläufigen Kenntnisstand der Lernenden, und so sind die Landkarten nebenbei auch ein interessantes Diagnoseinstrument.

In der Vorbereitung auf die Arbeit können wir die Frage „Was müssen wir können?“ nun durch Rückgriff auf unsere Landkarte beantworten, denn dort sind das gesammelte Wissen und die notwendigen Fertigkeiten auf einem übersichtlichen Plakat zusammengetragen.

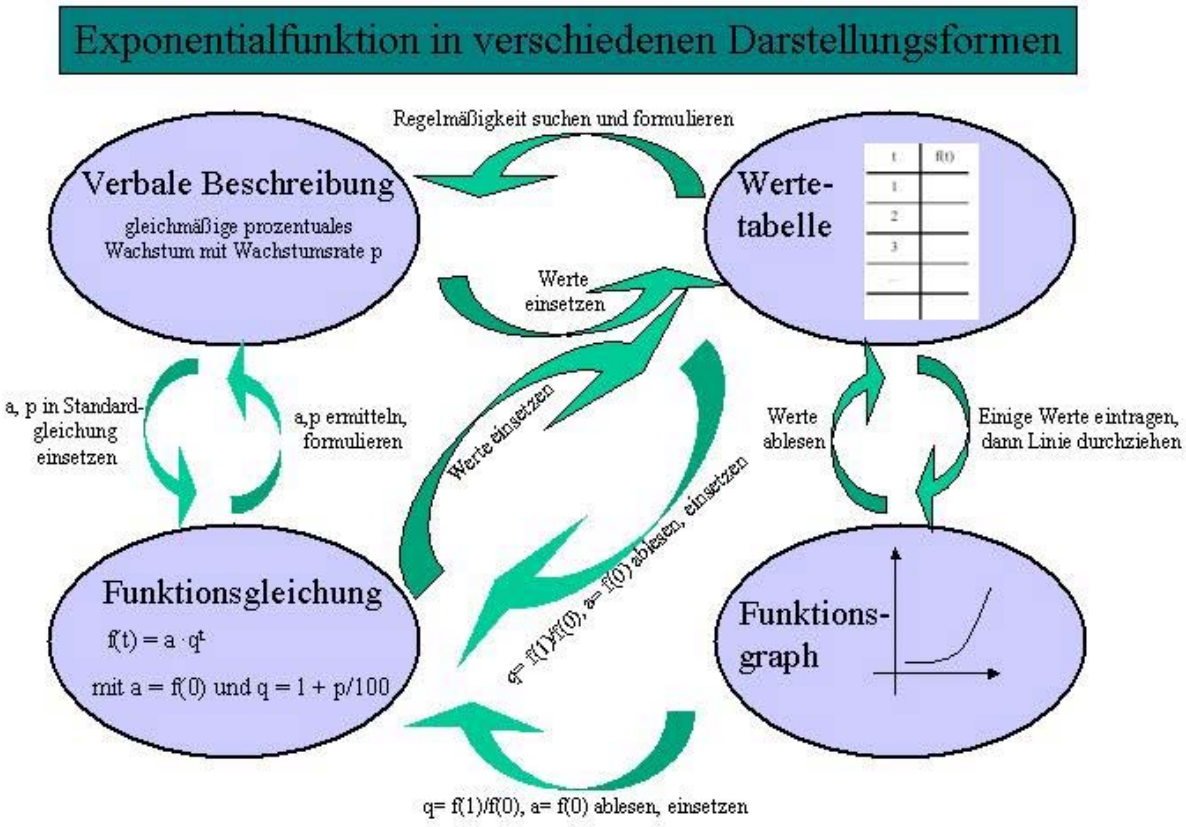


**Abbildung 5**: Landkarte zur Exponentialfunktion (Nachbildung des Tafelbildes)

**Ordnen typischer Beispielaufgaben – wie wecke ich ein Systematisierungsbedürfnis?**

Viele mathematische Themengebiete sind aus der Fachlogik heraus klar vorstrukturiert. So gehört z.B. in eine Unterrichtseinheit zur Prozentrechnung die Einführung der Fachbegriffe Prozentwert, Grundwert, Prozentsatz und die Typisierung der Aufgaben nach der jeweils gefragten Größe („Was ist gegeben, was ist gesucht?“). Oft ist jedoch den Schülerinnen und Schülern diese Systematisierung wenig eingängig. Dies fällt mir wieder einmal auf, als ich zu Beginn der Klase 10 zur Wiederholung der Prozentrechnung die Lernenden selbst Beispielaufgaben formulieren lasse. Trotz der expliziten Aufforderung, alle bekannten Typen von Prozentrechenaufgaben auftauchen zu lassen, finden 90% der Schüler/innen nur Fragen nach dem Prozentwert oder Prozentsatz. Die Existenz von Aufgaben, in denen nach dem Grundwert gefragt ist, wird übergangen, die Systematisierung ist den Lernenden nicht geläufig.

Damit sich die Lernenden den Gedanken der Klassifizierung zu eigen machen können, muss ich also weiter vorn ansetzen und zunächst ein Systematisierungsbedürfnis wecken. Guter Ausgangspunkt ist die unsortierte Fülle ihrer sämtlichen eigenen Aufgaben, die ich zur nächsten Stunde zusammenstelle. Einen Impuls zum systematischen Ordnen der Beispiele gibt die offene Frage, welche Aufgaben ihnen leicht fallen, welche schwer. Die Diskussion über nützliche Kri-

terien kommt schließlich auf eine interessante Unterscheidung: „Es kommt darauf an, nach was gefragt wird."

Die Fachbegriffe Prozentwert, Grundwert, Prozentsatz und erhöhter Grundwert sind einigen Lernenden noch im Gedächtnis, für die Anderen gibt es nun einen Anlass, sie zu wiederholen. Diese Ordnungsmuster bieten ihnen nämlich eine gute Sprache für das Phänomen, dass sie manche Aufgaben (i.a. die Fragen nach dem Prozentwert) leicht lösen können, andere nicht. Denn je nachdem, was gefragt ist, wird man auch die Lösung auf anderen Wegen suchen. Zumindest in diesem recht überschaubaren Feld der typischen Prozentrechenaufgaben ist es den Schülerinnen und Schülern so gelungen, selbständig ein Ordnungsmuster zu rekonstruieren.

Haben sich die Lernenden die Klassifizierung einmal zu eigen gemacht, fällt es nicht mehr schwer, jeweils Musteraufgaben zusammenzustellen und Lösungsverfahren zu wiederholen. Einige Aufgaben stellen sich als nur sehr mühsam lösbar heraus (Zinses-Zinsaufgaben). Sie weisen den Weg für den weiteren Unterricht. Viele interessante Fragen tauchen in dieser vorausschauenden Gesamtsicht auf, z.B. „Wie viele Angaben brauche ich, um eine Aufgabenstellung eindeutig zu machen?", „Wie viel Formeln brauchen wir für die verschiedenen Typen von Prozentrechenaufgaben?" usw.

**Systematisierende Lernaufgaben:**

- Landkarten entwerfen
- Beispiele zusammenstellen und ordnen
- zum Abschluss einer Lerneinheit:
  - erlaubte Spicker schreiben
  - Wissensspeicher erstellen (Gruppenarbeit)
- zusammenfassende Schülervorträge zur Wiederholung eines Themas

Beide Episoden und andere Erfahrungen in verschiedenen Altersstufen haben mich darin bestätigt, wie wichtig es ist, nicht erst am Ende einer Lerneinheit zur Zusammenfassung zu systematisieren. Denn es geht nicht nur darum, sich im Rückgriff einen Überblick über den Wissensbestand zu verschaffen. Schon während der Erarbeitung selbst sind Systematisierungsphasen hilfreich, um sich im Gelernten und zu Lernenden zu orientieren. Diese Orientierung und die dadurch gewachsene Bewusstheit schafft eine wichtige Grundlage für die weitere Arbeit, sie kann neue Ziele zu begründen und Plattformen für übergeordnete Überlegungen schaffen.

### Literatur:


Bruder, Regina (1990): Systematik im Geometrieunterricht und Lerntätigkeit der Schüler, in: Mathematik Lehren 42, S. 6-7.

Brückner, Hubert (1978a): Systematische Festigung des grundlegenden Wissens in den Klassen 5 bis 10. Zur Erarbeitung eines Wissensspeichers in den Klassen 5 bis 7, in: Mathematik in der Schule 16(6), S. 310-316.

Brückner, Hubert (1978b: Systematische Festigung des grundlegenden Wissens in den Klassen 5 bis 10. Zur Arbeit mit Schülervorträgen in den Klassen 8 bis 10., in: Mathematik in der Schule 16(9), S. 494-500.

Neubrand, Michael (1990): Über Mathematik sprechen - Möglichkeiten und Beispiele aus der Analysis, in: Martin Glatfeld (Hrsg.): Finden, Erfinden, Lernen: zum Umgang mit Mathematik unter heuristischem Aspekt, Lang, Frankfurt, S. 62-83.