Susanne Prediger

Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen?

Gekürzte Version erschienen in: Mathematik lehren Heft 123 (April 2004), S. 10-13.

> „Katharina hatte, im Rahmen einer Hausaufgabe, unter ordnungsgemäßer Anwendung der Bruchrechenregeln die Zahl 2 durch ¼ dividiert und kam dann zu mir, weil sie sich über die 8 als Ergebnis wunderte. Wieso konnte das Ergebnis größer sein als der Dividend? Sie hatte doch ‚geteilt'! Ich versuchte ihr einsichtig zu machen, weshalb das (im Bereich positiver Zahlen) bei Division durch Zahlen, die kleiner als 1 sind, so sein muss. Als Gegenbeispiel hielt sie mir vor, wenn sie einen Apfel ‚in Viertel' teile, seien die Stücke aber kleiner als der Apfel. Ich wies sie auf den Unterschied zwischen ‚teilen in' und ‚teilen durch' hin. Abschließend meinte sie: ‚Okay, ich weiß jetzt, wie man das rechnen muss. Aber du willst mir doch wohl nicht weismachen, dass man in Mathematik logisch denkt!'" (Heymann 1996, S.206)

Diese Episode zeigt beispielhaft, wie die Übertragung einer vertrauten Operation (der Division), auf den erweiterten Zahlbereich Brüche Irritationen erzeugen kann, weil Grunderfahrungen und -überzeugungen über mathematische Operationen in Frage gestellt werden: Was bisher immer gegolten hat („beim Dividieren wird das Ergebnis kleiner"), stellt sich nun als nicht mehr richtig heraus. Katharinas ablehnende Reaktion zeigt den Effekt, den solche Erschütterungen auslösen können, wenn sie nicht aufgeklärt werden. Mit dem Vorwurf, dass man in Mathematik nicht logisch denke, meint sie, dass sie das Denken mit ihrem eigenem Denken nicht in Verbindung bringen kann. Dies gelingt ihr nicht, weil ihre inhaltlichen Vorstellungen vom Dividieren dies nicht zulassen. Statt Einsicht bleibt bei ihr der Eindruck, dass die Division von Brüchen ein Mysterium ist.

Fehlvorstellungen sind kein Einzelfall

Solche Beispiele von Bruchstellen in dem Aufbau der Bruchrechnung gibt es viele. Zu dem Divisionsbeispiel parallel ist die Eigenschaft der Multiplikation, dass das Produkt zweier Zahlen stets größer ist als seine Faktoren. Während in IN das Multiplizieren tatsächlich ein Vervielfachen und damit ein Vergrößern bedeutet (zumindest insofern die Faktoren von 0 und 1 verschieden sind), kann das Ergebnis für die Multiplikation von Brüchen kann das Ergebnis aber auch kleiner werden, z.B. $1/3 \cdot 3/4 = 1/4$.

Wiederholt wurde empirisch nachgewiesen, dass die Vorstellung vom Multiplizieren als Vergrößern eine weit verbreitete Fehlvorstellung ist (vgl. Padberg 2002, S. 149). Zwar können viele Schüler erfolgreich Multiplikationsaufgaben rechnen, bei denen das Ergebnis kleiner wird, (der Kalkül macht also keine Schwierigkeiten), aber gleichzeitig kreuzen sie das Statement ‚Die Multiplikation (bei Brüchen) vergrößert immer' als richtig an. Während sich Katharina wenigstens wundert, werden diese Diskrepanzen oft widerspruchslos hingenommen.

Brüche bei den Brüchen – Vermeidbar oder notwendiger Lernschritt?

Heinrich Winter ordnet die Bruchstellen bei Division und Multiplikation ein in eine längere Liste von Grundüberzeugungen, die erschüttert werden, wenn man aus dem Zahlbereich der natürlichen Zahlen in den der Bruchzahlen übergeht (vgl. Kasten 1).

„**Alte Zahlen – neue Zahlen, allgemeine Probleme der Zahlbereichserweiterung**

- Kardination: Eine Zahl und eine Rechenaufgabe beantworten immer eine Frage nach ‚wie viele?'.
- Eineindeutigkeit zwischen Zahl und Zahlzeichen: Jede Zahl hat genau eine Zahlbezeichnung (Zahlnamen), der visuell aus einer Folge von Ziffern und auditiv aus einer bestimmten Folge von Grundzahlwörtern (mit Stellenwertangabe) besteht.
- Diskrete Ordnung: Jede Zahl hat einen Nachfolger und – außer der kleinsten Zahl – einen Vorgänger. Die Menge der Zahlen ist wie eine Kette mit Anfang aber ohne Ende.
- Rechnen: Jede Elementaroperation $a + b$, $a - b$ (wenn $a \geq b$), $a \cdot b$ und $a : b$ (wenn b Teiler von a) ist bei in der Ziffernsprache gegebenem a, b unmittelbar durchführbar und liefert wieder eine Zahl in der üblichen Ziffernsprache.
- Einschränkung der Division: Die Division $a : b$ ist nicht immer restlos möglich. Wenn sie möglich (und der Teiler größer als 1) ist, dann ist das Ergebnis immer kleiner als die geteilte Zahl.
- Multiplikation und Ordnung: Multipliziert man zwei Zahlen, die größer als 1 sind, so ist das Ergebnis größer als jede der beiden Zahlen (Multiplizieren als ‚starkes' Vermehren)."

(Winter 1999, S. 18f)

Kasten 1: Typische Brüche bei den Brüchen – eine Zusammenstellung

Doch was gemeinhin als Fehlvorstellungen bezeichnet wird, ist nach Winter eine „unhintergehbare und nicht einfach hinwegmethodisierbare Schwierigkeit der Bruchrechnung" (Winter 1999, S. 18f). Ein solcher Wandel der Perspektive verändert auch den Umgang mit diesen Bruchstellen, deswegen lohnt es sich, darüber genauer nachzudenken. Ich würde die von Winter zusammengestellten Brüche bei den Brüchen noch grundsätzlicher als *wesentliche Bestandteile des Wissens* über Bruchrechnung einsortieren.

Epistemologische Denkhürden als Bildungsanlässe und -inhalte

Diese Sicht auf Fehlvorstellungen als notwendige Bruchstellen kann theoretisch fundiert werden durch das Konzept der sogenannten epistemologischen Denkhürden (epistemological obstacles, vgl. Brousseau 1983, Hefendehl-Hebeker 1989). Es ordnet sich ein in ein konstruktivistisches Verständnis von mathematischen Lernprozessen. Demnach verlaufen Wissensbildungsprozesse nicht linear. Stattdessen müssen immer wieder Denkhürden überwunden werden, die in der sachlichen Struktur der jeweiligen Inhalte liegen, weil sie unmittelbar mit ihrer Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte zusammen hängen. Die Auseinandersetzung mit den Denkhürden (und schließlich ihre Überwindung) ist für ein fortschreitendes Verständnis von zentraler Bedeutung, sie kann daher kaum umgangen werden.

Meist hängen Denkhürden mit Vorstellungen, Ideen und Deutungen zusammen, die für den Umgang mit dem (vorhergehenden) Begriff charakteristisch sind. Diese verursachen Sichtbeschränkungen, die einer grundlegenden Sichterweiterung im Wege stehen.

Das zeigt sich an Katharinas Beispiel schön: Die Bruchstelle, mit der Katharina konfrontiert ist, besteht in der Erschütterung der Grundüberzeugung, dass das Ergebnis einer Division immer kleiner sein muss als die Ausgangszahlen. Die dahinterliegende Denkhürde steckt hier in ihrer Grundvorstellung vom Dividieren als Verteilen. Diese Grund-

vorstellung erweist sich jedoch als Sichtbeschränkung, die erst ausgeweitet werden muss, (durch die Vorstellung des Aufteilens: „Wie viele Viertel passen in die 2?“, vgl. Kirsch 1970), bevor das Dividieren durch Brüche wirklich Sinn machen kann. Die Verabschiedung von der alleinigen Vorstellung vom Dividieren als Verteilen fällt aber nicht leicht (da hilft auch der Hinweis des Mathematikers nicht, dass es sich ja formal genau genommen um eine ganz andere Operation handelt, wenn man von den natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen übergeht). Die Sichtbeschränkung zu überwinden, widerstrebt Katharina, weil sie den Sinn einer Erweiterung der Vorstellung vom Teilen nicht einsehen kann. Dies wäre jedoch nötig für ein inhaltliches Verständnis der Division von Brüchen.

Ähnliche Denkhürden gibt es auch bei anderen Zahlbereichserweiterungen, z.B. beim Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen. Man denke an das Problem der Kommensurabilität: Dass nicht alle relevanten Verhältnisse als Bruch zweier natürlicher Zahlen dargestellt werden kann, ist für Schüler/innen gleichermaßen eine Erschütterung wie es für die Pythagoräer war, und ebenso wie sie weigern sie sich zum Teil, dies zu akzeptieren.

Während das Konzept der epistemologischen Denkhürden bisher im Wesentlichen als *deskriptive* Kategorie zur Analyse von Lernprozessen diente, soll es hier auch im *normativen* Sinne aktiviert werden: Wenn Denkhürden nicht nur Bestandteil des Wissensbildungsprozesses sind, sondern als Teil des mathematischen Wissens selbst verstanden werden sollen, dann sollten sie auch als Bildungsinhalte ernstgenommen werden. In ihrer Thematisierung stecken große Bildungschancen, z.B. hinsichtlich der Muster und Zielsetzungen mathematischer Begriffsbildungsprozesse (bildungstheoretische Begründungen für diese Perspektive und weitere Beispiele geben Lengnink/Peschek 2001).

Schulbuchanalysen zeigen jedoch, dass ein solchen Aufgreifen bisher kaum statt findet. Statt dessen wird versucht, die Schwierigkeiten zu glätten oder zu umschiffen, was jedoch immer wieder Probleme aufwirft.

Vorschläge für Thematisierung von Bruchstellen

Hier soll dafür geworben werden, epistemologische Denkhürden immer dann aufzugreifen und zu besprechen, wenn sie im Lernprozess auftauchen (denn dies bietet nicht nur die Möglichkeit, Fehlvorstellungen auszuräumen, sondern auch, durch situatives Aufgreifen Reflexionschancen zu nutzen, vgl. Prediger 2001). Darüber hinaus gibt es viele Ansätze, eine Auseinandersetzung mit ihnen *systematischer zu inszenieren*.

Voraussetzung: vielfältige Grundvorstellungen aufbauen und systematisieren

Grundvoraussetzung für eine Bearbeitung der Bruchstellen ist ein inhaltliches Verständnis der Brüche. So kann z.B. der Vorstellung der Kardination (dass also Zahlen stets die Frage nach „wie viele“ beantworten) entgegenwirkt werden durch den Aufbau vielfältiger Grundvorstellungen von Brüchen (vgl. Basisartikel in diesem Heft).
Damit die entwickelten Vorstellungen auch bei der Überwindung weiterer Überzeugungen tragfähig sind, müssen sie auch dort immer wieder explizit angesprochen werden (z.B. zur Überzeugung von der eineindeutigen Beziehung zwischen Brüchen und ihren Schreibweisen: Gleichwertigkeit von Brüchen sollte in vielen unterschiedlichen Kontexte auftauchen). Als Aufgabenformat eignet sich z.B. das Schreiben lassen von Rechengeschichten, frei oder auf bestimmte Grundvorstellungen fokussiert:

Stell Dir vor, die Brüche beschreiben Apfel-Schorle-Mischungen: 3/4 steht für eine Mischung mit 3 Teilen Apfelsaft und 4 Teilen Wasser. Was könnte in diesem Zusammenhang die Gleichung 3/4 = 6/8 bedeuten? Was bleibt hier gleich, und was ist unterschiedlich?

Stell Dir vor, die Brüche gehören zu Pizza-Verteilungs-Geschichten:
Erzähle eine Geschichte, die zu der Gleichwertigkeit 3/4 = 6/8 gehören kann.
Was bleibt hier gleich, und was ist unterschiedlich?

Vielfältige Vorstellungen sollen jedoch nicht nur aufgebaut, die Vielfältigkeit sollte auch als solche thematisiert werden, denn gewachsene Grundüberzeugungen können nur durch Bewusstheit über ihre fehlende Tragfähigkeit überwunden werden. So können z.B. systematisierende Überblicke unter dem Titel „Brüche haben viel Gesichter" (Hefendehl-Hebeker 1996) hilfreich sein, um enge Zahlvorstellungen zu überwinden (vgl. Basisartikel).

Wundern lassen und Wunder aufklären

Dass bestimmte Eigenschaften von natürlichen Zahlen für Brüche nicht gelten, etwa die Existenz eines eindeutigen Nachfolgers, ist ein Anlass, sich zu wundern und sollte im Lernprozess als solches auch erlebbar werden. Da dies nicht bei allen Lernenden von selbst geschieht, lohnt es zuweilen, die Wunder wortwörtlich in Szene zu setzen. Hier kann z.B. das Vorlesen von Phantasiegeschichten ein adäquates methodisches Mittel sein, um in Einkleidungen die Ungeheuerlichkeit der Unterschiede deutlich werden zu lassen (etwa das nicht lösbare Rätsel an den bösen Drachen, wer der rechte Nachbar von ½ ist, vgl. Kasten 2).

Wunder sollten jedoch nicht nur erlebt, sondern auch inhaltlich aufgeklärt werden, und das heißt z.B. für die Multiplikation, nicht nur durch Nachrechnen zu konstatieren, dass es (trotz gegenteiliger Überzeugung) Produkte von Brüchen gibt, die kleiner sind als ihre Faktoren. Darüber hinaus sollten die Gründe durch Rückgriff auf inhaltliche Grundvorstellungen aufgeklärt werden. Eine Möglichkeit bietet folgende Schulbuchaufgabe:

„Eigentlich ist es nicht verwunderlich, dass das Produkt mit einer Bruchzahl kleiner als einer der Faktoren sein kann. Erfinde zu dem Produkt $\frac{2}{5} \cdot 15$ eine Textaufgabe.

Erkläre mit der Textaufgabe, wieso das Produkt kleiner als 15 sein muss."

(Neue Wege 6, S. 96)

Unterschiede explizit gegenüberstellen lassen

Um eine höhere Bewusstheit für Unterschiede zwischen Bruchzahlen und natürlichen Zahlen zu erreichen, können diese themenbezogen gegenübergestellt werden. Schüler/innen können solche Zusammenfassungen auf der Meta-Ebene auch selbst in Form eines Berichtes erarbeiten, wie in nebenstehender Aufgabe (aus Neue Wege 6, S. 79).

Das Märchen von dem bösen Drachen und dem klugen Bruch

Vor langer, langer Zeit wütete im Land der Bruchzahlen ein fürchterlicher Drachen. Er war aus dem Land der geometrischen Figuren ausgebrochen und versetzte seitdem die Brüche in Angst und Schrecken.

Täglich fraß er zehn von ihnen, wobei er Quadratzahlen im Zähler oder Nenner als besondere Leckerbissen bevorzugte. Flehten die Brüche um Gnade, lachte er hämisch und weidete sich an ihrer Angst.

Eines Tages hatte er sich etwas besonders grausames ausgedacht; er machte ihnen falsche Hoffnungen auf eine Rettung. „Meine lieben Brüche", brüllte er so laut, dass man es in jedem Winkel des Landes hören konnte, „ich gebe euch eine Chance! Ihr könnt mich loswerden! – Ich werde auf der Stelle verschwinden, wenn einer von euch mir eine Aufgabe stellt, die ich nicht lösen kann. Ihr habt genau drei Tage Zeit und dürft höchstens drei Aufgaben stellen."

Der erste Tag verstrich. Die Brüche waren entweder vor Anspannung wie gelähmt oder in tiefes Nachdenken versunken. Am Morgen des zweiten Tages trat 49/81 mutig vor den Drachen. „Nenne mir", sprach er, einen Bruch, der zwischen 71/1000 und 72/1000 liegt!" 49/81 war überzeugt, dass der Drachen diese Aufgabe nicht würde lösen können; denn er selbst hatte die ganze Nacht über vergeblich nach einem Bruch zwischen 71/1000 und 72/1000 gesucht.

Aber, oh Schreck, es kam anders als erwartet: „ 143/2000", schrie der Drachen. Und noch lauter brüllte er:

„Die erste Chance ist vertan. Bruch gegen Drachen – welch ein Wahn!"

Die Brüche waren entsetzt, aber auch sauer auf 49/81. „Das hättest du doch wissen müssen", warfen sie ihm vor, „dass 71/1000 und 72/1000 durch Erweitern mit 2 in 142/2000 und 144/2000 verwandelt werden können. Und schon passt 143/2000 dazwischen!" 49/81 sah das ein und schlich beschämt von dannen.

Die Zeit verging. Da, endlich, am Abend des zweiten Tages, wagte sich 121/36 hervor, nicht ganz so sicher wie vorher 49/81. „Nenne mir", sprach er zu dem Drachen, „zwei Brüche, für die folgendes gilt: Sie haben gleiche Zähler und verschiedene Nenner und sind trotzdem gleich groß."

Leider überlegte der Drachen auch jetzt nicht lange. „0/11 und 0/12", schrie er. „Beide haben den gleich Platz auf dem Zahlenstrahl, nämlich genau auf der 0." – Er grinste hämisch, holte tief Luft und brüllte: „Die zweite Chance ist vertan. Bruch gegen Drachen – welch ein Wahn!"

Der zweite Tag hatte keine Rettung gebracht. Der dritte Tag begann. Die Zeit schien zu rasen; noch fünf Stunden, noch vier Stunden,... noch zehn Minuten! Da trat ½ vor den Drachen.

„Nenne mir", sprach er, „den Bruch, der größer ist als ich und auf dem Zahlenstrahl mein nächster Nachbar ist."

Diesmal dauerte es länger. Der Drachen schien angestrengt zu überlegen. Mehrmals sah es aus, als wollte er etwas sagen. Die Brüche zitterten jedes Mal vor Aufregung. Doch immer wieder schien der Drache zu merken, das seine geplante Antwort falsch sein würde. Und er schwieg.

½ wurde immer aufgeregter. Er würde gewinnen! Wie sie ihm alle dankbar sein würden! Da wurde er jäh aus seinen Träumen gerissen. Der Drachen gab sich noch nicht geschlagen. „Ich nehme mir einen Tag Bedenkzeit", ließ er die Brüche wissen. „Morgen um die gleiche Zeit komme ich wieder und nenne euch den nächsten rechten Nachbarn von ½!" Sprach's und verschwand.

„Die Bedenkzeit wird ihm nichts nützen", rief ½ fröhlich. „Er kann es nicht schaffen. Wenn ihr wollt", wandte er sich an seine Freunde, „erkläre ich euch, warum ich keinen nächsten rechten Nachbarn habe. Ihr übrigens auch nicht." Natürlich wollten sie; und ½ begann: „Nehmen wir einen Bruch, der größer ist als ich, etwa 13/25. Jetzt bringen wir 13/25 und mich durch Erweitern auf den Hauptnenner 50: 13/25 = 26/50 und ½ = 25/50. Nun sieht es zunächst so aus, als ob es keinen Bruch zwischen 26/50 und 25/50 gäbe. Aber Erweitern mit 2 ergibt die Brüche 52/100 und 50/100. Und dazwischen liegt z.B. 51/100. Aber auch 51/100 ist nicht mein nächster Nachbar; 101/200 steht mir noch näher. Doch auch er ist nicht mein nächster rechter Nachbar. Ich kann mit der vorhin beschriebenen Methode einen näheren finden. Das Verfahren klappt immer. Probiert es einmal für euch und eure Nachbarn aus." Da taten sie; und alle merkten erfreut, dass ½ recht hatte. So sahen sie gelassen dem nächsten Tag entgegen. Aber der Drachen kam nicht. Er kam nie mehr. Er konnte die Aufgabe nicht lösen"

Jahrhunderte später wurde er entdeckt. Er saß auf einem Felsen und murmelte vor sich hin, ohne Pause, immer dasselbe. Wer nahe genug heranging, konnte folgendes hören: „1/2 hat keinen nächsten rechten Nachbarn, kein Bruch hat einen nächsten rechten Nachbarn, es gibt immer einen noch näheren: „ ½ hat keinen nächsten Nachbarn, kein ..." Und wenn der Drachen nicht gestorben ist, dann murmelt er noch heute.

(Paulitsch 1993, S. 37-40)

Kasten 2: Wundern über Dichtheit der Brüche

Wir haben einige Aussagen über die Multiplikation zusammengestellt, ergänze die Tabelle und versuche, alle Aussagen zu begründen:

Multiplikation von natürlichen Zahlen	**Multiplikation von Brüchen**
Multiplikation mit 0 ergibt immer 0	
durch Vertauschen der Faktoren ändert sich das Ergebnis nicht (Kommutativgesetz)	
das Produkt ist immer größer als die Faktoren (außer bei 0 und 1)	
...	
...	

Kasten 3: Aufgabe zum Nachdenken über die Multiplikation

Hier sollen die Lernenden unter einer gewissen Anleitung auf einem Meta-Level arbeiten, und das können sie auch. Ähnliche Aufforderungen sind auch für die Multiplikation denkbar (vgl. Kasten 3).

Aufdecken von Fehlern und Fehlvorstellungen – „Nimm-Stellung"

Im Bereich der formalen Rechenfehler sind Fehlersuchaufgaben schon durchaus üblich geworden. Konfrontiert man Lernende mit fingierten oder realen, aber fehlerhaften Lösungen und fordert sie auf zur Stellungnahme, so können sie sich mit Fehlern auseinandersetzen, ohne alle Fehler selbst gemacht haben zu müssen (was der noch wirkungsvollere Anlass ist). Dabei sollten die auf der Ebene der Rechenregeln bereits etablierten Fehlersuchaufgaben um Aufgaben zu *inhaltlichen* Fehl*vorstellungen* ergänzt werden (vgl. Kasten 4). Die in Kasten 5 abgebildeten Lösungen von Schülerinnen und Schülern aus 7. Gymnasialklassen zeigen das Spektrum der unterschiedlichen Vorstellungen, die erst durch eine solche Aufgabe offenbar werden.

Katharina hat bei ihrer Hausaufgabe die Zahl 2 durch $\frac{1}{4}$ dividiert. Sie hat die Bruchrechenregeln richtig angewendet und das Ergebnis 8 erhalten. Anschließend kam sie zu mir, weil sie sich über das Ergebnis wunderte. Wieso konnte das Ergebnis größer sein als der Dividend? Sie hatte doch ‚geteilt'!

a. Was würdest Du Katharina sagen?

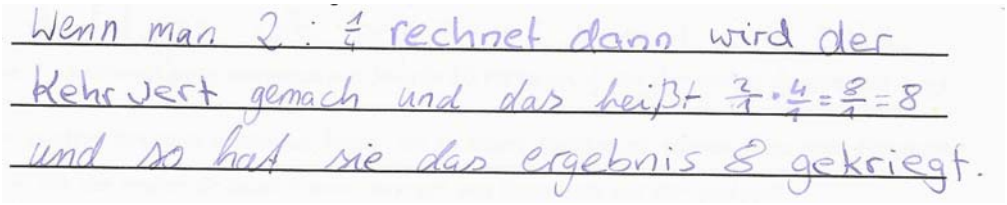
b. Kannst Du ihre Denkweise nachvollziehen? Woran hat sie wohl gedacht?

c. Wie würdest Du die Rechnung $2:\frac{1}{4}$ so in eine Geschichte übersetzen, dass Du Dich nicht über das Ergebnis wundern musst?

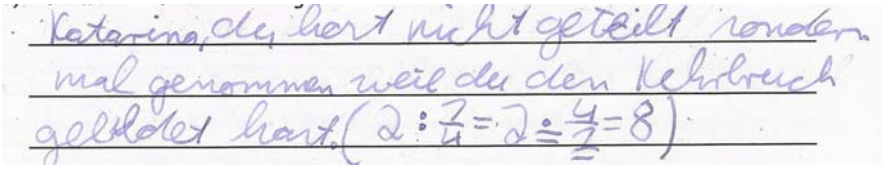
Kasten 4: Nimm-Stellung-Aufgabe zu Katharinas Fehlvorstellung

Kasten 5: Lösungen von Siebtklässlern zur Aufgabe aus Kasten 4

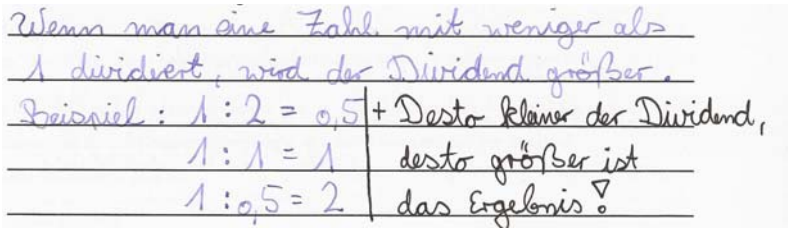
a. Was würdest Du Katharina sagen?



Wenn man 2 : $\frac{1}{4}$ rechnet dann wird der Kehrwert gemach und das heißt $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{1} = 8$ und so hat sie das ergebnis 8 gekriegt.

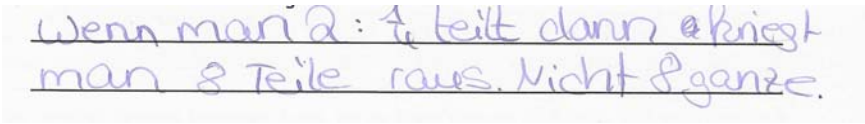


Katarina, du hast nicht geteilt sondern mal genommen weil du den Kehrbruch gebildet hast. ($2 : \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{4}{1} = 8$)



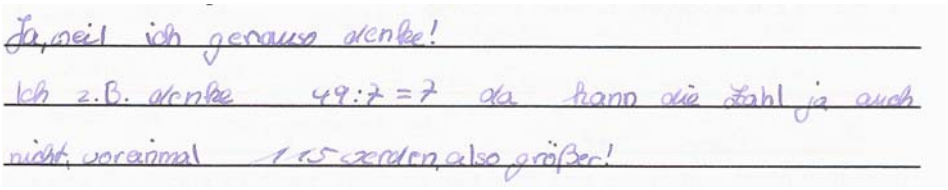
Wenn man eine Zahl mit weniger als 1 dividiert, wird der Dividend größer.

Beispiel: $1 : 2 = 0{,}5$ | + Desto kleiner der Dividend,
$1 : 1 = 1$ | desto größer ist
$1 : 0{,}5 = 2$ | das Ergebnis!

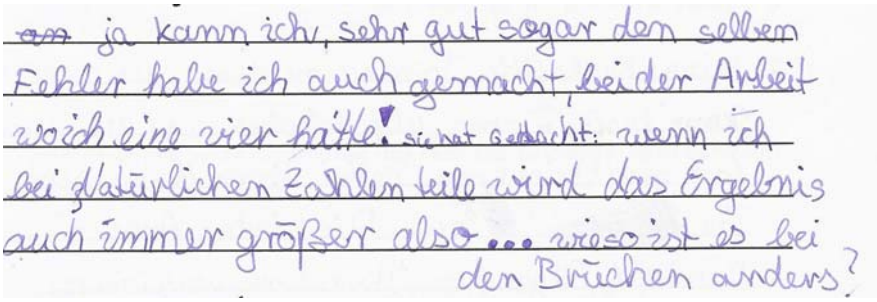


Wenn man 2 : $\frac{1}{4}$ teilt dann kriegt man 8 Teile raus. Nicht 8 ganze.

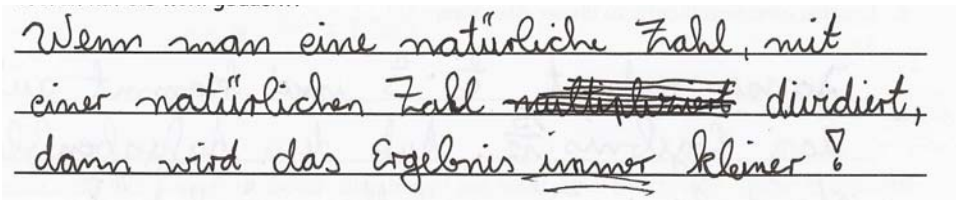
b. Kannst Du ihre Denkweise nachvollziehen? Woran hat sie wohl gedacht?



Ja, weil ich genauso denke!
Ich z.B. denke $49 : 7 = 7$ da kann die Zahl ja auch nicht, voreinmal 115 werden, also größer!



~~an~~ ja kann ich, sehr gut sogar den selben Fehler habe ich auch gemacht, bei der Arbeit wo ich eine vier hatte! sie hat gedacht: wenn ich bei natürlichen Zahlen teile wird das Ergebnis auch immer größer also ... wieso ist es bei den Brüchen anders?



Wenn man eine natürliche Zahl, mit einer natürlichen Zahl ~~multipliziert~~ dividiert, dann wird das Ergebnis immer kleiner!

Das geteilt geteilt ist und weniger als der Dividend ist. (Oder das ihr Mathelehrer meint.)

Beim teilen von Brüchen ist es anders als bei natürlichen Zahlen. Wenn man natürliche Zahlen teilt erhält man ein kleineres Ergebnis. Beim teilen von Brüchen genau andersherum.

Sie hat gedacht es seien 8 ganze es sind aber nur 8 viertel.

c. Wie würdest Du die Rechnung $2:\frac{1}{4}$ so in eine Geschichte übersetzen, dass Du Dich nicht über das Ergebnis wundern musst?

Man muss 2 in einen Bruch machen und das heißt $\frac{2}{1}$ danach anstatt : geteilt mal rechnen und noch die $\frac{1}{4}$ umdreht zu $\frac{4}{1}$ und dann sieht die Aufgabe so aus $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{1} = 8$.

Ja ja. Ist ganz einfach. Es ist mal! mit dem Kehrbruch, dann kann es ja nur größer sein.

Wenn man 2 Äpfel jeweils viertelt, dann Erhält man 2 mal 4 Stücke.
Zusammen: 8 Stücke
Kurz: 2 Äpfel : $\frac{1}{4}$ = 8 Stücke

Man teilt 1 in 4 viertel und die andere 1 in 4 viertel so kriegt man 8 viertel raus. Sie dachte es seien 8 ganze.

In einen Wasser Kanister passen 8 L Wasser in ein Glas passen $\frac{1}{4}$ L Wasser wie viele Gläser Wasser passen in den Kanister?
$\frac{8}{4} : \frac{1}{4} = \frac{8}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{1}$

Sinndimension dahinter ansprechen

Sowohl bei Katharina als auch bei situativ aufgegriffenen Irritationen ist es wichtig, die hinter den Veränderungen stehende Sinndimension anzusprechen. Denn ohne dass Katharina den Nutzen der Erweiterung der Vorstellung einsieht, wird sie den Sichtwechsel auch nicht mitgehen.

Deswegen bietet es sich an, an das Beispiel aus Kasten 4 anschließende Sinnfragen auch explizit zu diskutieren und damit allgemeine Ideen der Zahlbereichserweiterung anzusprechen. Die könnten sicherlich nicht von einzelnen Schülern bearbeitet werden, sondern müssten Gegenstand von Gruppendiskussionen sein. Eine methodische Großform für solcherart Sinndiskussion wären in Gruppenarbeit vorbereitete Streitgespräche mit verteilten Rollen, z.B. zu Katharinas Fragen:

> Was soll die Ausweitung der Vorstellung vom Teilen auf das „Passen in“? Wieso verändern die Mathematiker einfach ihre Vorstellung davon, was ein Divisions-Aufgabe bedeutet? (Vorteile und Nachteile)

Zusammenfassung

Die hier zusammengetragenen Ansätze zur Thematisierung der Denkhürden sind in Kasten 6 noch einmal zusammengefasst. Sie bewegen sich auf zunehmendem kognitiven Niveau, sprechen also immer höhere Ebenen des Nachdenkens an, ohne Sechstklässler dabei zu überfordern.

Vorschläge für Thematisierung von Bruchstellen

- Vielfältige inhaltliche Vorstellungen aufbauen als Voraussetzung
- Bewusstheit erzeugen durch systematisierende Übersichten
- Verbalisieren durch Rechengeschichten
- Ungeheuerlichkeit der Veränderung erlebbar machen, z.B. durch Phantasiegeschichten
- „Wunder“ inhaltlich aufklären lassen
- Unterschiede explizit gegenüberstellen lassen
- Fehlersuchaufgaben
- Aufdecken von Fehlvorstellungen
- Sinndimension dahinter ansprechen

Kasten 6: Zusammenfassung

Aufgreifen von Irritationen als Prinzip - über die Bruchrechnung hinaus

Bruchrechnung ist ein wichtiger Beispielbereich für die allgemeine Forderung, nicht mehr gültige Vorstellungen und Grundüberzeugungen explizit aufzubrechen und die dadurch entstehenden Brüche als Anlässe für mathematische Bildungsprozesse zu begreifen (Lengnink/Peschek 2001, vgl. auch Konfliktansatz in Prediger 2001).

Die Bruchrechnung ist nicht das einzige Stoffgebiet, in dem sich das fruchtbar machen lässt. Es wäre ein wichtiges Ziel der gegenwärtigen Reform des Mathematikunterrichts, solcherart Aufgabenstellungen mehr im Mathematikunterricht auftauchen zu lassen, ganz nach Wilfried Hergets Motto:

Natürlich nicht immer, aber vielleicht immer öfter.

Literatur

Brousseau, G. (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, in: Revue de Didactique des Mathématiques 4(2), 165-198.

Kirsch, A. (1970): Elementare Zahlen- und Größenbereiche, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989): Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion – geistige Hindernisse in ihrer Geschichte, in: Mathematik lehren 35, S. 6-12.

Hefendehl-Hebeker, L. (1996): Brüche haben viele Gesichter, in: Mathematik Lehren 78, S. 20-48.

Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik, Beltz, Weinheim.

Lengnink, K. / Peschek, W. (2001): Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung, in: Lengnink, K. u.a. (Hrsg.) Mathematik und Mensch, Verlag Allgemeine Wissenschaft, Mühltal, 65-81.

Neue Wege Mathematik 6, Arbeitsbuch für Gymnasien, Schroedel, Hannover 2001.

Padberg, F. (2002): Didaktik der Bruchrechnung, Spektrum, Heidelberg.

Paulitsch, A. (1993): Das Märchen von dem bösen Drachen und dem klugen Bruch, in: dies.: Zu Gast bei Brüchen und ganzen Zahlen, Aulis, Köln, 37-40.

Prediger, S. (2001): Mathematiklernen als interkulturelles Lernen. Entwurf für einen didaktischen Ansatz, in: Journal für Mathematikdidaktik 22(2), 123-144.

Sierpinska, A. (1992): On understanding the notion of function, in: Harel, G. / Dubinsky, E. (Hrsg.): The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy, Notes and Reports, Mathematical Association of America, Vol. 25, 25-58.

Winter, H. (1999): Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung, Manuskript, RWTH Aachen. (http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/37/bruchrechnung.pdf)

Prof Dr. Susanne Prediger
Universität Bremen
Fachbereich Mathematik / Informatik
Postfach 330440
D-28334 Bremen
prediger@math.uni-bremen.de