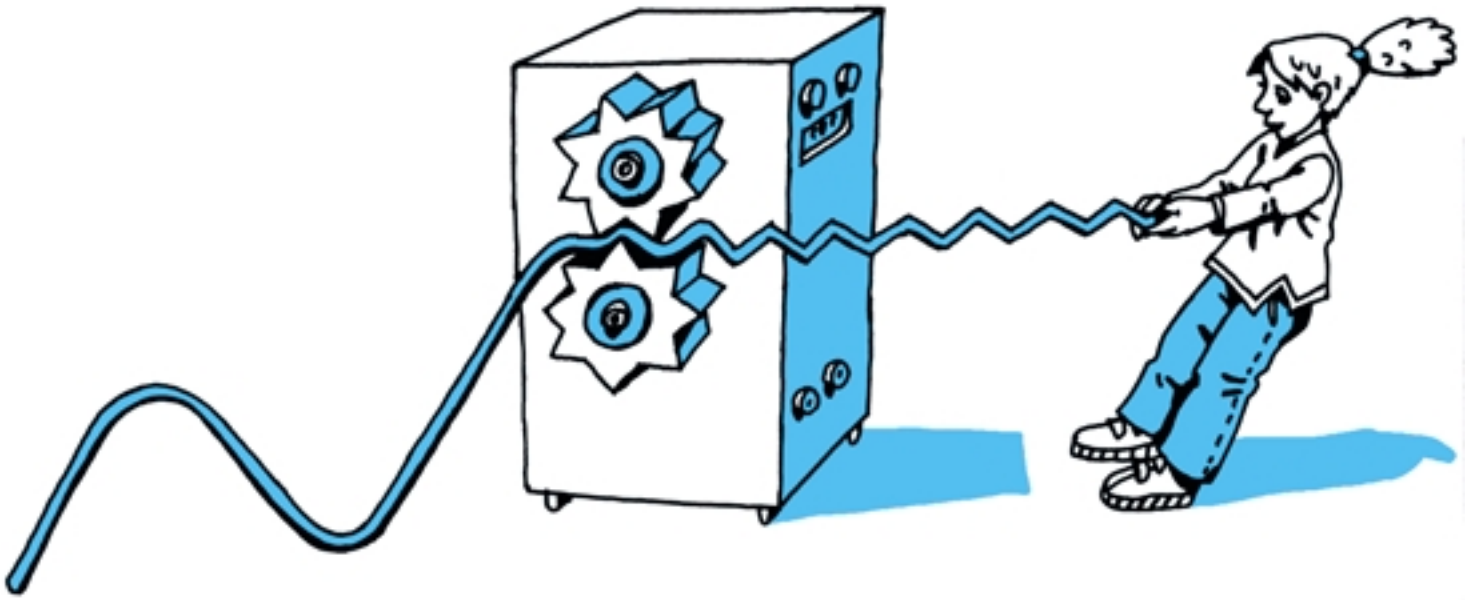


Was bedeutet Denken in Funktionen und wie kann es gefördert werden? Wozu müssen verschiedene Grundvorstellungen und Darstellungsformen verfügbar sein? Welche Tätigkeiten sind im Zusammenhang mit Funktion von Bedeutung?
Der Einführungsartikel fasst wichtige Aspekte der didaktischen Diskussion um Funktionen zusammen und gibt Anregungen für eine verständnisorientierte Behandlung im Unterricht.

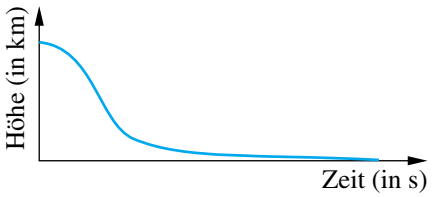
Funktioniert's? – Denken in Funktionen

Timo Leuders und Susanne Prediger

Manchmal funktioniert's halt nicht, aber wieso?

Stellen Sie sich vor, Sie haben am Ende der Klasse 10 erfolgreich alle Funktionstypen im Unterricht behandelt, die Sie sich vorgenommen haben. Ihre Klasse hat in den Klassenarbeiten zu linearen und quadratischen Funktionen und zuletzt zu den Exponentialfunktionen insgesamt zufrieden stellende Leistungen gezeigt. Nun möchten Sie einmal gegen Ende des Jahres eine interessante Anwendung behandeln, bei der Schülerinnen und Schüler ihre erworbenen Kenntnisse zu Funktionen einsetzen können. Sie präsentieren also eine Graphik wie die in *Abbildung 1* abgedruckte und diskutieren mit der Klasse, was sich hieraus ablesen lässt.

Abb. 1: Fallschirmspringen



Dabei vernehmen Sie Äußerungen wie die folgenden:

„Der nimmt Anlauf und springt erst ganz waagerecht ab" – „Nee, das liegt daran, dass das Flugzeug nach rechts fliegt, wenn er heraus springt."

„Das kann irgendwie nicht sein! Der müsste doch eher senkrecht landen, oder ist das so ein Gleitfallschirm?"

Was ist hier passiert? Wieso scheinen die Schüler einfache Zusammenhänge nicht aus einem Graphen ablesen zu können, obwohl sie bereits geschickt mit Parametern von exponentiellen Funktionstermen umgehen können? Wieso können sie sich nichts unter der Abbildung vorstellen? Warum verfallen sie in derartige Fehldeutungen? Hier muss man offensichtlich tiefer graben als nur nach den technischen Fertigkeiten. Welchen Funktionsbegriff haben die Schüler eigentlich? Was ist eine „Funktion" für sie?

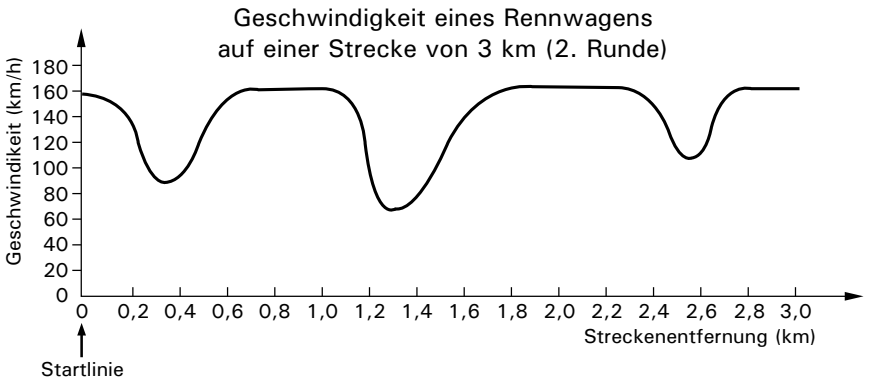
Diese grundsätzlichen Schwierigkeiten beim Umgang mit Funktionen (nicht nur in ihrer Darstellung als Funktionsgraph) sind nichts Ungewöhnliches, wie wir spätestens seit der PISA-Studie wissen. Die Schwierigkeiten liegen aber nicht an unüberwindlichen psychologischen Barrieren, sondern sind auch ein Produkt unseres Mathematikunterrichts, darauf deuten die sehr unterschiedlichen Lösungshäufigkeiten in den einzelnen Ländern bei funktionsbezogenen PISA-Aufgaben hin (siehe *Kasten 1*).

Was ist überhaupt eine Funktion?

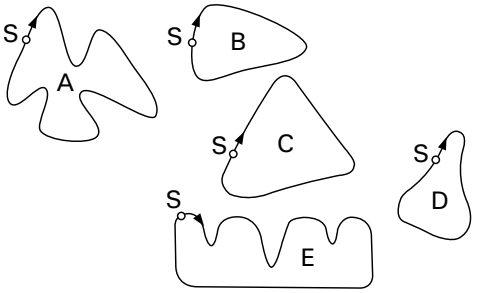
Sie mögen bitte diese (scheinbar) triviale Frage verzeihen. Vielleicht treten Sie für einen Moment vom täglichen Geschäft eines Mathematik Lehrenden zurück und betrachten die Frage mit dem Blick eines Menschen, der mit Mathematik nach seiner Schulzeit nur wenig zu tun hatte. Dann erkennt man nämlich, wie schillernd und vielgestaltig der Begriff ist. Die *Funktion* einer Maschine ist der Zweck ihrer Konstruktion. Wenn eine Sache *funktioniert*, erfüllt sie ihren Zweck, sie läuft rund, alles greift sinnvoll ineinander, Probleme sind gelöst, Fragen beantwortet. In letzter Zeit hört man oft von *funktionaler* Bil-

PISA-Aufgabe zur Überprüfung des Denkens in Funktionen

Dieser Graph zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen ebenen Rennstrecke variiert.



Hier siehst du Abbildungen von fünf Rennstrecken: Auf welcher dieser Rennstrecken fuhr der Wagen, so dass der am Anfang gezeigte Geschwindigkeitsgraph entstand?



Lösungshäufigkeiten:

	D	USA	NL	JAP
A	15,8	18,3	18,7	12,3
B	29,8	20,6	42,6	55,4
C	9,5	8,9	11,5	10,3
D	5,6	4,4	6,6	7,7
E	36,0	44,3	19,3	12,5

Quelle: PISA 2000, http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/Beispielaufgaben_Mathematik.PDF

Kasten 1

dung, also einer Bildung, die sich nicht im Anhäufen von Wissen erschöpft, sondern sich darin beweist, dass sie in den unterschiedlichsten Situationen anwendbar ist, dass sie also *funktioniert*. Näher am mathematischen Konzept ist die französische Wendung *en fonction de – in Abhängigkeit von …*

Dieses ganze Feld von Assoziationen schwingt mit, wenn man jenseits des Mathematikunterrichts und außerhalb der mathematischen Fakultäten über Funktionen redet. Mit einer strengen und formalen mathematischen Definition einer Funktion haben diese Assoziationen beim ersten Hinsehen wenig zu tun. Dass der mathematische Funktionsbegriff trotz dieser scheinbaren Ferne zum alltäglichen Denken für jeden Menschen bedeutsam und tragfähig ist, und dass er in der Schule nachhaltig verstanden werden kann, das soll im Folgenden erläutert werden. Dabei möchten wir auch einen kurzen Einblick in einige Aspekte der aktuellen didaktischen Diskussion zum Thema Funktionen geben.

Mit Funktionen Zusammenhänge beschreiben

Wir strukturieren die Welt, indem wir bestimmte Zusammenhänge betrachten oder explizit herstellen, z. B. in den Situationen in *Kasten 2*.

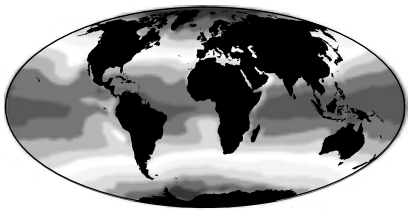
Der Mathematik ist es gelungen, die Gemeinsamkeiten solcher sehr unterschiedlichen Situationen herauszuarbeiten, gleichsam den abstrakten Gehalt herauszudestillieren, so dass sie sich alle durch den mathematischen Begriff der Funktion (und deren Eigenschaften) erfassen lassen.

Wenn diese unterschiedlichen Situationen mit Hilfe des Funktionsbegriffs beschrieben werden, treten dabei allerdings ganz unterschiedliche Grundvorstellungen von dem in den Vordergrund, was jeweils die funktionale Beschreibung einer Situation ausmacht (vgl. Vollrath 1989):

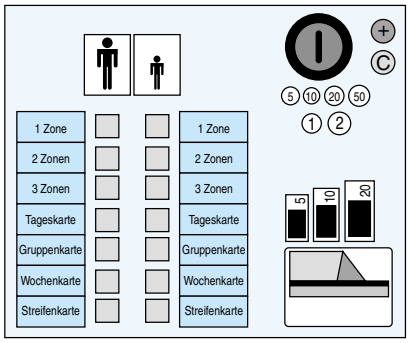
1 **Zuordnungsvorstellung:** Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge: Einer Ware ist ein Preis zugeordnet, einem Ort eine Temperatur oder einem Zeitpunkt eine Wasserhöhe. Hier werden Größen als abhängig von anderen Größen beschrieben.
2 **Kovariationsvorstellung:** Durch Funktionen erfasst man, wie zwei Größen sich miteinander verändern. Zu der Per-

Situationen, die sich funktional beschreiben lassen

Temperaturkarte
Für jeden Ort auf der Weltkugel gibt es einen Längen- und Breitengrad, zu jedem Zeitpunkt lässt sich an diesem Ort eine eindeutige Temperatur feststellen (zumindest im Prinzip).
Zuordnungsvorstellung



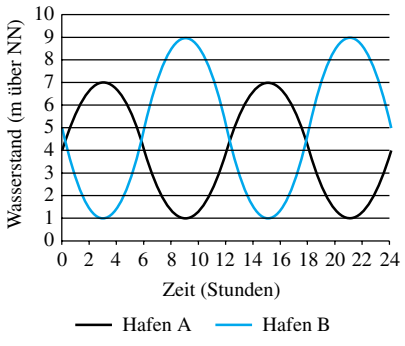
Fahrkartenkauf
Am Fahrkartenautomat erhält man für jede Tastenkombination eine bestimmte Fahrkarte (auch wenn für den Benutzer nicht immer klar ist, welche …).
Zuordnungsvorstellung



Einkauf
Der Preis einer Ware ist abhängig von der Menge, und es gilt: Je größer die Menge, desto höher der Preis. (Bei näherem Hinsehen ist dieser Zusammenhang aber nicht unbedingt proportional …)
Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung

Höhenmessung
Temperatur und Luftdruck in den Bergen hängen mit der Höhe zusammen, auf der man sich befindet. Das wird zur Höhenmessung benutzt.
Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung

Gezeitenabfolge
Der Verlauf von Ebbe und Flut zeigt ein charakteristisches, periodisches Muster. Wenn man es vereinfacht darstellt, sieht es aus wie in nebenstehender Abbildung *Funktion als Ganzes*, aber auch *Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung*



Kasten 2

spektive der Zuordnung tritt hier die spezifische Dynamik einer Veränderung hinzu, z. B. in Äußerungen wie „je größer die Menge, desto höher der Preis".

3 **Vorstellung von der Funktion als Ganzes:** Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes, wie etwa das spezifische Muster in der Gezeitenabfolge. So wird ein Gesamtphänomen erfasst, und die Funktion tritt uns als eigenständiges Objekt entgegen, etwa als charakteristischer Graph oder symbolisch als Term oder Funktionsname.

Schülerinnen und Schüler zu einem *Denken in Funktionen* zu führen, bedeutet, sie zu befähigen, in unterschiedlichen Situationen Zusammenhänge funktional zu erfassen, mit informellen und auch formaleren Mitteln zu beschreiben, und mit Hilfe dieser Mittel Probleme zu lösen. Dazu müssen Lernende die beschriebenen Grundvorstellungen aufbauen, denn sie stellen die Bindeglieder zwischen der realen Situation und dem mathematischen Funktionsbegriff dar (vom Hofe 2003).

Die verschiedenen Grundvorstellungen erlauben uns unterschiedliche Sichtweisen auf Situationen und bieten so jeweils die Grundlage für ihre mathematische Beschreibung und Behandlung.

Dass die hier genannten Grundvorstellungen nicht streng voneinander getrennt werden können, sondern aufeinander aufbauen, zeigt das folgende Beispiel: Wer bei Betrachtung eines exponentiellen Wachstumsprozesses über den Zuordnungsaspekt verfügt, kann beispielsweise Werte aus Graphen ablesen oder aus einem gegebenen Funktionsterm berechnen und Fragen beantworten wie *„Wann wird die Bevölkerung auf das Doppelte angestiegen sein?"*. Aber erst, wenn man über die Kovariationsvorstellung verfügt, kann man die gemeinsame Veränderung der beiden Größen „Zeit" und „Anzahl" sehen und mathematisch beschreiben: *„In gleichen Zeiten wächst die Zahl immer um denselben Prozentsatz"*. Wer dieses gemeinsame Änderungsverhalten so charakterisieren kann, identifiziert daran das allgemeine, charakteristische Muster exponentieller Funktionen und kann mit anderen Wachstumsprozessen vergleichen. Er nimmt dabei bereits die Funktion als Ganzes in den Blick. Wie eng die drei

Grundvorstellungen beim problembezogenen Denken in Funktionen miteinander vernetzt sind, zeigt auch das Beispiel in *Kasten 3*.

Für die Gestaltung von Lernprozessen zum Aufbau adäquater Grundvorstellungen ist es wichtig, sich bewusst zu machen, dass der Name „Grund"-Vorstellung auf ihre grundlegende Bedeutung für die Aktivierung und Interpretation des Funktionsbegriffs in realen Situationen hinweist. Er bedeutet dagegen nicht, dass sie bei allen Lernenden sowieso natürlich vorhanden sind, im Gegenteil: Die Vorstellungen, mit denen Schülerinnen und Schüler sich funktionalen Zusammenhängen nähern, sind höchst individuell und entsprechen durchaus nicht immer den hier beschriebenen Grundvorstellungen. Lernende dabei zu unterstützen, ihre individuellen Vorstellungen zu mathematischen Grundvorstellungen weiterzuentwickeln, ist Aufgabe des schulischen Umgangs mit Funktionen. Dabei müssen die individuellen Denkweisen von Schülerinnen und Schülern im Unterricht zu Wort kommen, denn sie sind Ausgangspunkt für die Entwicklung eines reichhaltigen und nutzbringenden Funktionsbegriffs. Katja Lengnink zeigt in ihrem Beitrag im Thementeil dieses Heftes einen möglichen Weg für den Aspekt der funktionalen Abhängigkeit zwischen Größen auf, Steffen Hahn bereitet den Weg für ein ähnliches Vorgehen im Thema Kurvendiskussion.

Die verschiedenen Gesichter einer Funktion

Wenn man hinreichend viel mit Funktionen gearbeitet hat, gewinnen sie ein Eigenleben, sie sind nicht mehr nur Abbilder oder Modelle von Beziehungen und Veränderungsprozessen in der Umwelt, sondern auch eigenständige Objekte, mit denen man umgehen kann. Dieser Abstraktionsvorgang ist typisch für die Mathematik, ja eigentlich sogar die Vorgehensweise mathematischer Begriffsbildung schlechthin.

Entscheidend für den mathematischen Umgang mit funktional beschriebenen Zusammenhängen ist die Möglichkeit, sie auf vielfältige Weise darzustellen: Als verbale Beschreibung, numerisch als Tabelle, graphisch als Diagramm oder Graph und schließlich rein symbolisch als Term (s. *Abbildung 2 und 4*, vgl. auch Herget/Malitte/Richter 2000).

Wer verschiedene Darstellungen verwendet, muss auch zwischen ihnen wechseln können. Der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge erfordert eine Vielzahl mathematischer Tätigkeiten, die in *Abbildung 3* zusammengestellt sind (in Anlehnung an Swan u. a. 1985).

Erst die Kenntnis dieser verschiedenen Gesichter und die Kompetenz, zwischen ihnen hin und her zu wechseln, zeugen von einem Verständnis von Funktionen und führen zu einem flexiblen Umgang mit ihnen. Es lohnt sich, auch mit Lernenden über die Frage zu reden, wieso man überhaupt zwischen den verschiedenen Darstellungsformen hin- und herwechseln will (vgl. Prediger 2003). Die Antwort von Lernenden nach einiger Diskussion: *„Weil man in den jeweiligen Darstellungen unterschiedliches gut machen kann: Für einen groben Überblick oder das näherungsweise Finden einer Nullstelle ist der Graph gut, für Prognosen ein Funktionsterm praktisch, und die Gleichmäßigkeit eines Wachstumsprozesses sehen wir am schönsten an einer Tabelle."*

Herausarbeiten lässt sich so die in der Mathematik so fundamentale Idee des Beschreibungswechsels und ihr Potential für Problemlösungen (vgl. auch den Beitrag

Abb. 2: *Die verschiedenen Gesichter von Funktionen*

Als verbale Beschreibung:

„Die Kosten für das Projekt steigen mit laufender Zeit exponentiell."

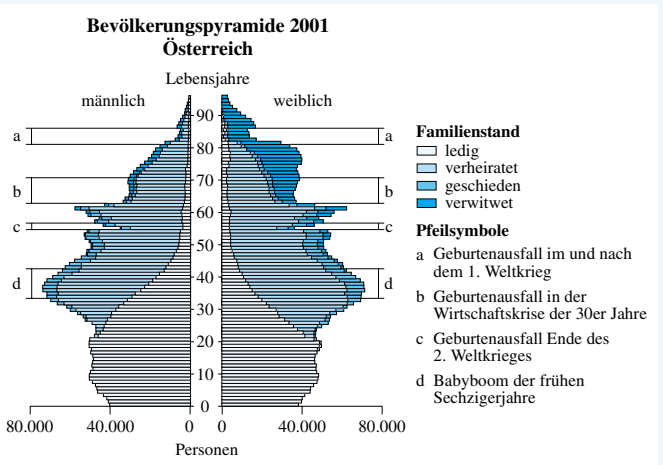
„Der Preis einer Ware ist nicht ganz proportional zur Menge."

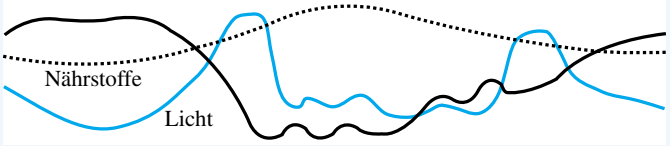
Numerisch als Tabelle

lfd. Nr.	zu versteuerndes Einkommen in EUR von	bis	Einkommensteuer in EUR
1	0	7.235	0
2	7.226	7.271	10
3	7.272	7.307	17
4	7.308	7.343	25
5	7.344	7.379	32
6	7.380	7.415	39
7	7.416	7.451	46

Symbolisch als Term

Als Diagramm oder Graph





Problemlösen durch Vernetzung von Grundvorstellungen an einer PISA-Beispielaufgabe

Aufgabe aus PISA 2000:

Eine Pizzeria bietet zwei runde Pizzas mit derselben Dicke in verschiedenen Größen an. Die kleinere hat einen Durchmesser von 30 cm und kostet 30 Zeds. Die größere hat einen Durchmesser von 40 cm und kostet 40 Zeds.
Bei welcher Pizza bekommt man mehr für sein Geld? Gib eine Begründung an.

Natürlich lässt sich die Aufgabe durch Ausrechnen der Flächeninhalte und Dreisatzbetrachtungen lösen. Mathematisch Geschulte sehen aber sofort auch einen eleganteren Lösungsweg durch Denken in Funktion: Der Preis steigt linear, der Flächeninhalt quadratisch, also ist die größere Pizza preiswerter. Dieser Lösungsweg gibt einem zwar keine genauen Angaben, ist aber stabiler gegen Rechenfehler und liefert auch Gründe für die Lösung. Wer diese Argumentation routiniert benutzt, macht sich nicht mehr klar, welch hohe Flexibilität im Umgang mit verschiedenen Grundvorstellungen nötig ist, wie viele Wechsel in der Sichtweise auf die gleiche Situation wir vollziehen, um diese Überlegung anzustellen. Um mögliche Schwierigkeiten von Lernenden in der Erstbegegnung mit solch einer Argumentation zu verstehen, sollen die notwendigen Vernetzungen von Grundvorstellungen hier durch eine ausführliche Version explizit gemacht werden:

Überlegung	Welche Grundvorstellung wird aktiviert?
Die zu untersuchende Beziehungen sind die zwischen dem Durchmesser der Pizza, der Menge der Pizza und ihrem Preis. Dazu vergleicht man den Zusammenhang von Durchmesser und Flächeninhalt (als Modellierung der Menge) mit der Zuordnung des Preises zum Durchmesser.	*Zuordnungsvorstellung*: zwei Funktionen werden spezifiziert: Mengenfunktion: Durchmesser → Flächeninhalt und (die muss man während der Lösung als relevant erkennen und selbst spezifizieren) Preisfunktion: Durchmesser → Preis (die wird durch die Aufgabe bereits spezifiziert)
Die Abhängigkeit des Flächeninhalts vom Durchmesser lässt sich durch eine quadratische Formel beschreiben, denn es gilt $F = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$	Identifizieren eines Funktionstyps in der Zuordnungsvorstellung (Formel wird als Termdarstellung einer Funktion interpretiert)
Preis und Durchmesser wachsen gleich, die Zuordnung des Preises zum Durchmesser ist also proportional angelegt.	Identifizieren des Funktionstyps der Mengenfunktion im *Kovariationsvorstellung* (Tabellendarstellung): $\cdot\frac{4}{3}$ ↷ Durchmesser: 30 cm, 40 cm; Preis: 30 zeds, 40 zeds ↷ $\cdot\frac{4}{3}$ gleicher Zuwachs, also proportional
Wir wissen, dass quadratische Funktionen (fast überall) schneller wachsen als lineare.	*Funktion als Ganzes:* Wissen über charakteristische Wachstumseigenschaften linearer und quadratischer Funktionen.
Also steigt der Flächeninhalt schneller als der Preis.	Rückschluss auf *Kovariation*
Daher muss die größere Pizza im Verhältnis zum Flächeninhalt preiswerter sein als die kleinere, d. h. bei der großen Pizza bekommt man mehr für sein Geld.	Rückschluss auf *Zuordnung* an Stelle x = 40 cm

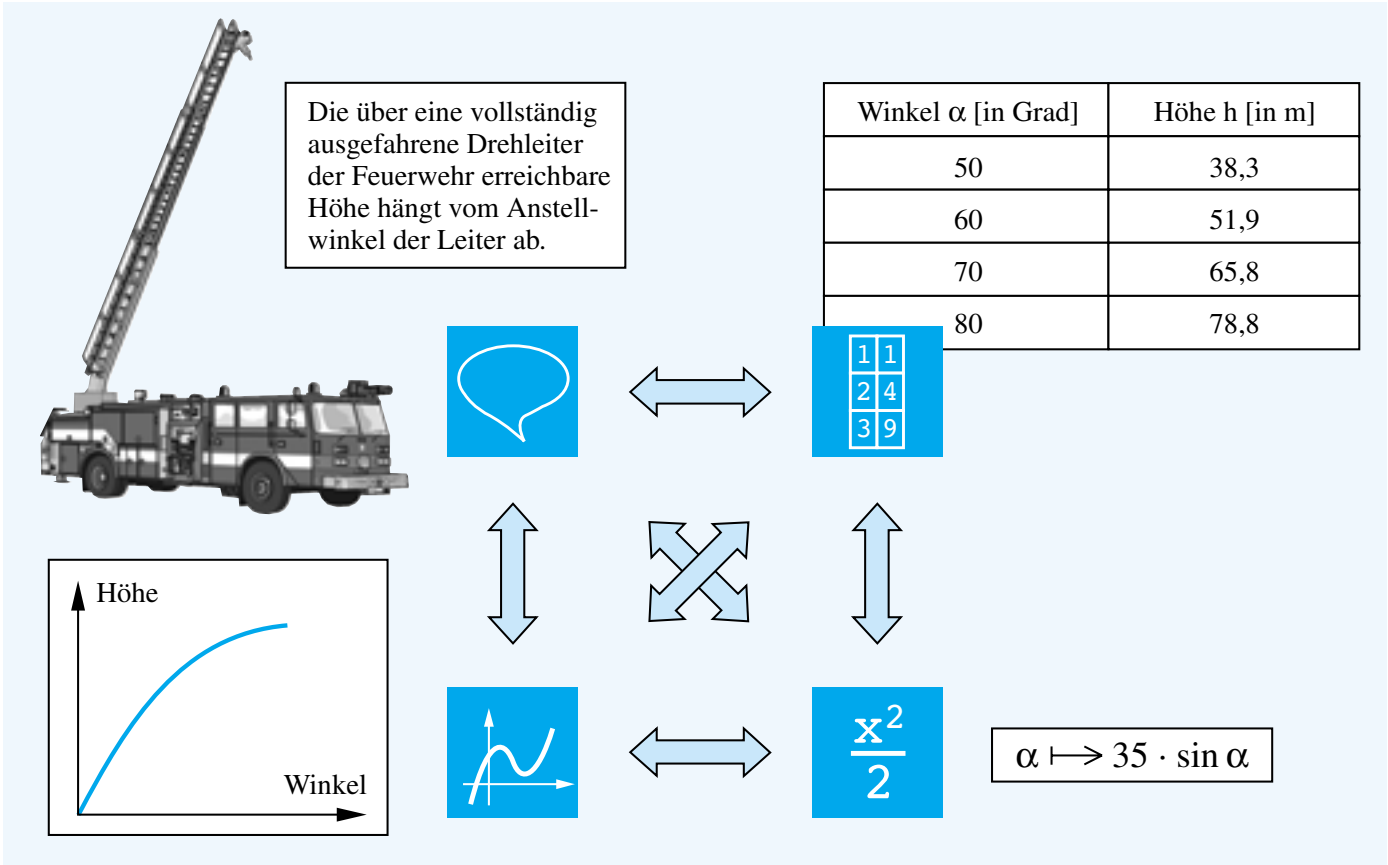
Kasten 3

von \ zu	**Situationen** (Bilder und Texte)	**Tabellen**	**Graphen**	**Terme**
Situationen (Bilder und Texte)		Werte finden	skizzieren	algebraisch beschreiben
Tabellen	lesen		Punkte einzeichnen	annähern (z. B. lineare Regression)
Graphen	interpretieren	ablesen		annähern (Kurven hindurchlegen)
Terme	Variablen interpretieren	berechnen	skizzieren	

Abb. 3: *Vielfältige Tätigkeiten beim Darstellungswechsel*

von Bärbel Barzel u. a. im Thementeil dieses Heftes).
Offenbar beschränken sich die Kompetenzen, die beim Darstellungswechsel benötigt werden, nicht auf das Zuordnen von linearen und quadratischen Graphen und Termen, wie es oft in großer Breite in Schulbüchern geübt wird. Geht man im Unterricht zu schnell zu der symbolischen Behandlung einiger durch einen geschlossenen Term darstellbarer Funktionstypen über, so riskiert man, dass fundamentale Kompetenzen des Lesens, Interpretierens und Modellierens nicht ausgebildet werden. Der Umgang von Schülerinnen und Schülern mit Funktionen bleibt dann schematisch und wird nicht nachhaltig behalten und genutzt.
Will man die reichhaltigen Aspekte und Eigenschaften von Funktionen mit Lernenden erkunden, so ist es kontraproduktiv, sich vornehmlich mit den elementar algebraisch beschreibbaren Funktionen zu befassen. Wer Denken in Funktionen für realistische Situationen schulen will, stößt dagegen oft auch auf nur numerisch oder graphisch-qualitativ gegebene Funktionen, die sich durch einfache Terme nicht beschreiben lassen. Da dieser Ansatz in der heutigen Praxis oft zu kurz kommt, möchten wir ihn in den Beiträgen dieses Heftes, insbesondere dem von Walter Affolter besonders betonen. Steffen Hahn zeigt, wie sich die qualitative Beschäftigung mit Funktionen auch in Klasse 11 fruchtbar machen lässt.

Abb. 4: *Darstellungswechsel für den Zusammenhang zwischen Höhe und Anstellwinkel der Feuerwehrleiter*



„Wenn ich auf der linken Seite der	$2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$
Rechnung jede Zahl um 1 erhöhe,	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$
was passiert dann mit dem Ergebnis?	$4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 7$
Und warum?“	$5 \cdot 5 - 4 \cdot 4 = 9$
	…

Abb. 5: *Funktionales Denken vor dem Funktionsbegriff – Beispielaufgabe*

Denken in Funktionen beginnt vor Einführung der Funktionsdefinition

Die formale mathematische Definition einer Funktion ist zwar aus mathematischer Sicht ausgesprochen galant, doch fasst sie keinesfalls intuitiv den Kern des Funktionsbegriffs, wie er für Schulmathematik relevant ist. Man muss nicht allzu tief in die Geschichte des Funktionsbegriffs einsteigen, um zu begreifen, dass er das Endprodukt eines Jahrhunderte währenden und mühsamen Exaktifizierungsprozesses darstellt (vgl. Hischer 2002, Malle 1996).

Den fertigen Begriff zu Beginn des Lernprozesses „einzuführen“, stellt nicht nur die Geschichte auf den Kopf, sondern verkennt auch, dass zum es Lernen dazugehört, eigene Erfahrungen zu machen und Vorstellungen aktiv zu konstruieren. Fertige Mathematik allein ist also nicht unbedingt geeignet für Novizen.

Wer jetzt aber fordert, man müsse akribisch den gesamten verschlungenen Denkweg unserer mathematischen Ahnen nachverfolgen (das wäre die überstrenge Auslegung des so genannten historisch-genetischen Prinzips), liegt falsch. Schülerinnen und Schüler können durchaus mit einem reichhaltigen Satz von Beispielen für sich entdecken, wie man funktional beschreibbare Zusammenhänge auf verschiedene Weise erfassen und darstellen kann. Die mathematische Definition einer Funktion steht dann am Ende einer solchen ausführlichen Entdeckungsreise durch das Reich der Funktionen, wie die Beiträge im Thementeil dieses Heftes illustrieren.

Das angestrebte Denken in Funktionen kann dabei noch weit vor der systematischen Einführung des Funktionsbegriffs beginnen:

– Funktionale Zusammenhänge sind erlebbar im Umgang mit Maßstäben und Größenvergleichen in Klasse 5 und in dynamischen Sichten auf geometrische Probleme (vgl. Krüger 2001).
– Vorerfahrungen mit Graphen und Tabellen werden unter Zuordnungsaspekten bereits in der Grundschule gesammelt.
– Produktive Rechenaufgaben geben Anlässe zum Entdecken arithmetischer Zusammenhänge, die bereits die Kovariationsperspektive einnehmen (vgl. *Abbildung 5*).

Die didaktischen Leitideen zum Aufbau eines hier beschriebenen Denkens in Funktionen haben wir in *Kasten 4* noch einmal zusammengefasst. Wir hoffen, dass die Beiträge im Thementeil dieses Heftes für einen solchen Umgang mit Funktionen einige Anregungen für den eigenen Unterricht bieten.

Kasten 4

Didaktische Leitideen zum Umgang mit Funktionen in der Schule

- **Vielfältige Grundvorstellungen** aufbauen und verknüpfen
- Früh anfangen – Gelegenheiten für das Erfahren von Abhängigkeit und Kovariation bieten sich schon **von Beginn der Grundschule an**.
- Funktionen in der Sekundarstufe I als Beschreibungsmittel für reale Zusammenhänge erfahrbar machen (man könnte dies den **„Primat des Modellierungsaspekts“** nennen).
- Bei der Entwicklung von Lerngelegenheiten das **Verstehen vor den Kalkül** setzen. Hierzu kann vor allem das Betrachten reichhaltiger qualitativer Zusammenhänge dienen.
- Durchgehend **verschiedene Darstellungsformen** von Funktionen nutzen und den Wechsel zwischen Beispielen als produktiv erlebbar machen.
- Funktionales Verständnis **vernetzen mit Alltagsverständnis**, aber auch Abgrenzungen vornehmen.

Literatur

Malle, G. (1996): Aus der Geschichte lernen, Mathematik lehren 75, 4–8.

Malle, G. (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation, Mathematik lehren 103, 8–11.

Herget, W./Malitte, E./Richter, K. (2000): Funktionen haben viele Gesichter – auch im Unterricht, in: Flade, L./Herget, W. (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen, Volk und Wissen, Berlin, 115–124.

Hischer, H. (2002): Zur Geschichte des Funktionsbegriffs, Vortragsmanuskript, Universität des Saarlandes, http://hischer.de/uds/forsch/vortrag/hischer/ringvl02/funkbegr.pdf.

Krüger, K. (2001): Funktionales Denken „alte“ Ideen und „neue“ Medien. In: Herget, Sommer, Weigand, Weth (Hrsg.): Medien verbreiten Mathematik. Franzbecker, Hildesheim.

Prediger, S. (2003): Ausgangspunkt: Die unsortierte Fülle. Systematisieren am Beispiel des Mathematikunterrichts. In: Friedrich Jahresheft XXI: Aufgaben. Lernen fördern – Selbständigkeit entwickeln, 93–95.

Swan, M. u. a. (1985): The language of functions and graphs, Shell Centre and Joint Matriculation Board, Nottingham.

Vollrath, H. J. (1989): Funktionales Denken. Journal für Mathematikdidaktik 10, 3–37, online unter http://www.mathematik. uni-wuerzburg.de/~vollrath/papers/052.pdf.

vom Hofe, R. (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen, Mathematik lehren 118, 4–8.

Susanne Prediger,
Universität Bremen,
prediger@math.uni-bremen.de

Timo Leuders,
Pädagogische Hochschule Freiburg,
leuders@ph-freiburg.de