Abb. 1:
Christbaumkugeln *(© MEV/GEWA Fotodesign)*

Kreis und Kugel – eine runde Sache mit unendlich vielen Seiten

Ines Fröhlich und Susanne Prediger

Zusammenfassung: Kreis und Kugel sind mathematische Objekte, die gleichzeitig für Realitätsnähe, Einfachheit der Definition und Tiefe der innermathematische Theorie stehen. Der Einführungsartikel gibt einen Überblick über die „unendlich vielen Seiten" von Kreis und Kugel. Er zeigt unterschiedliche mathematische Perspektiven auf (wie die konstruktive, algebraische, berechnend-geometrische, algorithmische, numerische u.v.m.) und stellt sie mittels zentraler Ideen in Zusammenhänge, die für das Curriculum tragende Pfeiler bilden können. Vielfältige unterrichtliche Zugänge zum Thema Kreis und Kugel werden im Themenheft vorgestellt.

Schöne, friedvoll glänzende Christbaumkugeln – gerade in dieser Vorweihnachtszeit sind sie für uns der Inbegriff von ästhetisch perfekter Harmonie, in die wir unsere Hoffnungen legen können, ein ebensolches Fest begehen zu dürfen.
Selbst ohne den weihnachtlichen Kontext sind Kugeln und Kreise auch aus mathematischer Sicht perfekte Objekte, der Inbegriff von Einfachheit und Komplexität zugleich. Einfach ist ihre geometrische Charakterisierung, komplex wird die Mathematik, wenn wir sie im Einzelnen zu ergründen suchen und z. B. auf die transzendente Zahl π stoßen, die sowohl aus algebraischer als auch aus algorithmischer Sicht reichhaltige Herausforderungen bietet.

Viele Perspektiven auf dasselbe Thema
Uns fasziniert an dem Thema Kreis und Kugel am meisten, dass sich diese zwei geometrischen Objekte durch die gesamte Schullaufbahn hindurch mit Gewinn thematisieren lassen und dabei immer wieder von anderen Seiten aus betrachtet werden können. So hören wir im Lehrerzimmer auch ganz unterschiedliche Stimmen:

– *Phänomenologische Perspektive:* Kreise mögen schon Grundschulkinder gern, denn sie können sie in ihrer Umwelt überall finden und leicht identifizieren. Sie malen auch sehr gerne Mandalas.

– *Konstruktive Perspektive:* Schön gestaltete Kreisbilder sind ästhetisch ansprechende Motive, an denen man Symmetrien finden und herstellen und das Erklären von Konstruktionen üben kann (vgl. Prediger/Vernay in diesem Heft).
– *Klassische euklidisch-geometrische Perspektive* oder *dynamisch-geometrische Perspektive:* Die klassische Kreislehre mit Satz des Thales, Umfangswinkelsatz und Tangentensätzen ist ein wunderbares Feld für entdeckendes Lernen und Argumentieren (vgl. Krug/Debertshäuser in diesem Heft, Brückner 1992), unbedingt auch mit Hilfe Dynamischer Geometrie-Software (s. u.).
– *Perspektive der berechnenden Geometrie:* Mit Kreisen kann man auch berechnende Geometrie betreiben, etwa Trigonometrie oder die Bestimmung von Kreisflächen und Volumina krummliniger Körper (vgl. Annesers Denkzettel in diesem Heft, auch Biermann et al. 2001 für gute Aufgaben in diesem Feld).
– *Perspektive der analytischen Geometrie:* Kreise und Kugeln lassen sich durch algebraische Gleichungen erfassen und dadurch schwierigeren geometrischen Überlegungen durch Berechnung zugänglich machen (vgl. Furdek

in diesem Heft und Oldenburg in PM Heft 5, mit CAS auch Schwarze 2001).

– *Modellierungsperspektive:* Mit Kreisen und Kugeln lassen sich interessante Probleme modellieren, von der Suche nach faire Zentren (Roth-Sonnen 2005a) und der hypothetischen Verlängerung des Bindfadens um die Erde (Walsch 1999) über Satellitenpositionierung (Haubrock 2000 für Kl. 12 und Roth-Sonnen 2005b für Kl. 8) und Fahrrädern (Riemer 1998) bis zu Horizontbetrachtungen (Münchenbach in diesem Heft) u.v.m.
– *Algebraische Perspektive:* Die Quadratur des Kreises ist ein Problem, das zunächst von der elementargeometrischen Frage der Flächentransformation her kommt und bis tief in die Algebra hineinführt. Beweise der Transzendenz der Kreiszahl π bedienen sich funktionentheoretischer Methoden (Delahaye 1999).
– *Numerische Perspektive:* Seit vielen Jahrtausenden wird nach geeigneten Annäherungen an die Kreiszahl π gesucht (eine lebendige Geschichte der Zahl π schreibt Delahaye 1999, über den kühnsten, nämlich gesetzlichen, „Lösungsversuch" des Problem berichtet Henn 1992). Hier können schon auf elementarem Niveau Vorerfahrungen für approximative Grenzwertprozesse gemacht und Fehlerbetrachtungen angestellt werden.
– *Analytische Perspektive:* Die Idee des Ausschöpfens von Kreisen lässt sich dann in der Intergralrechnung zu einer allgemeinen Vorgehensweise ausbauen.
– *Algorithmische Perspektive:* Noch immer wird die Berechnung neuer Nachkommastellen von π als interessante Herausforderung betrachtet, um die Leistungsfähigkeit neuer Computer zu testen. Natürlich hängt die Leistungsfähigkeit auch von dem Berechnungsalgorithmus ab. Mit der in *Abb. 2* abgebildeten Formel errangen z. B. die russischen Brüder Chudnowsky 1994 den damaligen Weltrekord von 4 Milliarden Nachkommastellen von Pi. Mit dieser Formel konnten sie in jedem Schritt 14 neue Nachkommastellen bestimmen (vgl. Delahaye 1999). Seit Oktober 1999 lag der offizielle Weltrekord des Japaners Yasuma Kanada dann bei 206 Milliarden Nachkommastellen, im Jahr 2005 informiert uns das Guiness Buch der Rekorde über 1241100000000 (d.h. 1 Trilliarde) Nachkommastellen als Kanadas neuen Rekord.
– *Stochastische Perspektive:* Und schließlich bleibt nach Geometrie, Algebra, Numerik und Analysis nicht einmal die Stochastik außen vor: Den Flächeninhalt eines Kreises kann man mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode auch durch stochastische Simulationen bestimmen (Delahaye 1999, zahlreiche animierte Applets dazu findet man im Internet).

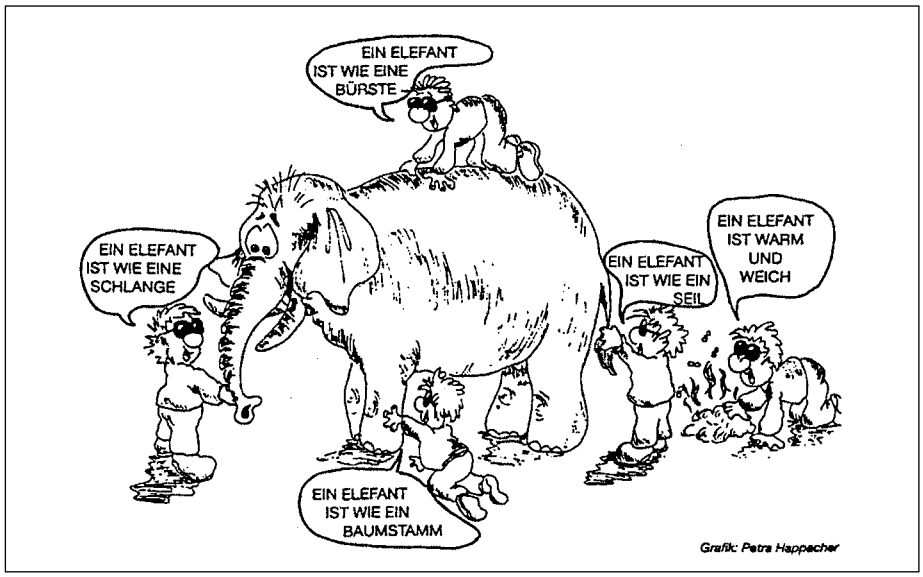

Abb. 3:
Alles eine Frage der Perspektive

Diese Vielfalt der möglichen Perspektiven erklärt vermutlich auch die Uneinheitlichkeit der Lehrpläne der einzelnen Bundesländer, was am Thema Kreis und Kugel eigentlich gelernt werden soll und wann.

Insgesamt ergeht es uns mit Kreis und Kugel also wie den Erforschern des Elefanten in *Abb. 3:* Mit jeder einzelnen Perspektive erfasst man die Komplexität des Untersuchungsgegenstandes immer nur partiell, erst die Vernetzung der Perspektiven ergibt ein adäquates Gesamtbild. Gleichzeitig hat das Gegenüberstellen unterschiedlicher Perspektive in der Rückschau (etwa in Klasse 12 im Zusammenhang mit der analytischen Geometrie) einen hohen Bildungswert, weil sich in der Rückschau die Perspektiven unterschiedlicher mathematischer Teildisziplinen vergleichen und in ihren Eigenarten noch besser verstehen lassen.

Die Perspektiven sind also nicht nur konkurrierend zu sehen, sondern zeigen uns jede einen anderen Aspekt und einen wichtigen mathematischen Zugang.

Reichhaltige Möglichkeiten für die Konkretisierung zentraler Ideen

Etwas Ordnung in diese Vielfalt bringt *Abb. 4.* Sie zeigt ein Spiralcurriculum für Kreis und Kugel, das gestützt ist von den zentralen Ideen der Mathematik als Pfeiler (in Anlehnung an Bruner und Humenberger/Reichel 1995, S. 27). Jeder Knoten an einem Pfeiler steht für die Möglichkeit, altersspezifisch eine zentrale Idee am Themengebiet Kreis und Kugel zu konkretisieren. Dabei sind einige nur exemplarisch zu sehen, viele weitere Konkretisierungen sind möglich.

Vernetzungen ergeben sich durch das Wiederaufgreifen derselben zentralen Idee auf unterschiedlichen Stufen. So ist z. B. die Kreisfläche ein ideales Thema, um die Idee des Approximierens auf unterschiedlichen Stufen zu thematisieren. Erste handlungsorientierte Möglichkeiten zum Bestimmen der Kreisfläche ergeben sich schon in der Grundschule: Durch Auswiegen von Pappen kann man feststellen, dass das Gewicht einer kreisförmige Pappe im Verhältnis zum umbeschriebenen Quadrat etwas mehr

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(6n)^n}{(n!)^3(3n)} \cdot \frac{13591409 + n545140134}{\sqrt{640\,320^{3(n+1)}}}$$

Abb. 2: *Formel zur Berechung von π von den Brüdern Chudnowsky (1998)*

als 3 zu 4 ist. Die Genauigkeit der Approximation stößt hier schnell an handwerkliche Grenzen (wie gerade haben wir den Kreis eigentlich ausgeschnitten?).

Im Zusammenhang mit Flächeninhaltsberechnungen von Vielecken können Kreisflächen in einem zweiten Anlauf genauer bestimmt werden: Viele verschiedene Strategien des Ausschöpfens sind ab Klasse 7 thematisierbar, über die Genauigkeit der Approximation lässt sich hier intensiver nachdenken.

In der Oberstufe wird dann die Idee des Ausschöpfens mit Hilfe des Grenzwertes von Treppenfunktionen präzisiert und zum Integralbegriff weiter entwickelt. Die mathematisch geniale Präzisierung und gleichzeitig Verallgemeinerung der Idee des Ausschöpfens auf andere krummlinigen Flächen als dem Kreis wissen vermutlich diejenigen besonders zu würdigen, die auf ihre Vorerfahrungen mit Annäherungen an die Kreisfläche zurückgreifen können.

Gleichzeitig bietet die Beschäftigung mit der Kreiszahl π auch andere Möglichkeiten zur bereichsspezifischen Ausgestaltung der Idee des Approximierens ohne geometrischen Hintergrund: Zahlreiche algorithmische Annäherungen an π können spätestens im Zusammenhang mit Folgen und Reihen thematisiert werden und weisen bis in die aktuelle Forschung hinein (s. o.).

In ähnlicher Weise kann die Idee des funktionalen Zusammenhangs Betrachtungen rund um Kreis und Kugel verbinden: So bekommt zum Beispiel die Kreiszahl π ihre Bedeutung, wenn man den Zusammenhang von Durchmesser und Umfang als funktionalen Zusammenhang untersucht, seine Proportionalität feststellt und den Proportionalitätsfaktor ermittelt. Die in Leuders/Prediger (2005) analysierte PISA-Beispiel-Aufgabe zu Pizzen unterschiedlicher Größe und Preise verwies uns auf den quadratischen Zusammenhang zwischen Durchmesser und Flächeninhalt von Kreisen, dessen Erkennen die Rechnung ersparen kann: Eine Pizzeria bietet zwei runde Pizzen an: 30 cm Durchmesser zum Preis von 30 Zeds und 40 cm zum Preis von 40 Zeds. Bei welcher Pizza bekommt man mehr für sein Geld?

Wer gelernt hat, die funktionale Abhängigkeit von geometrischen Größen in dieser Weise zu untersuchen, wird die in der

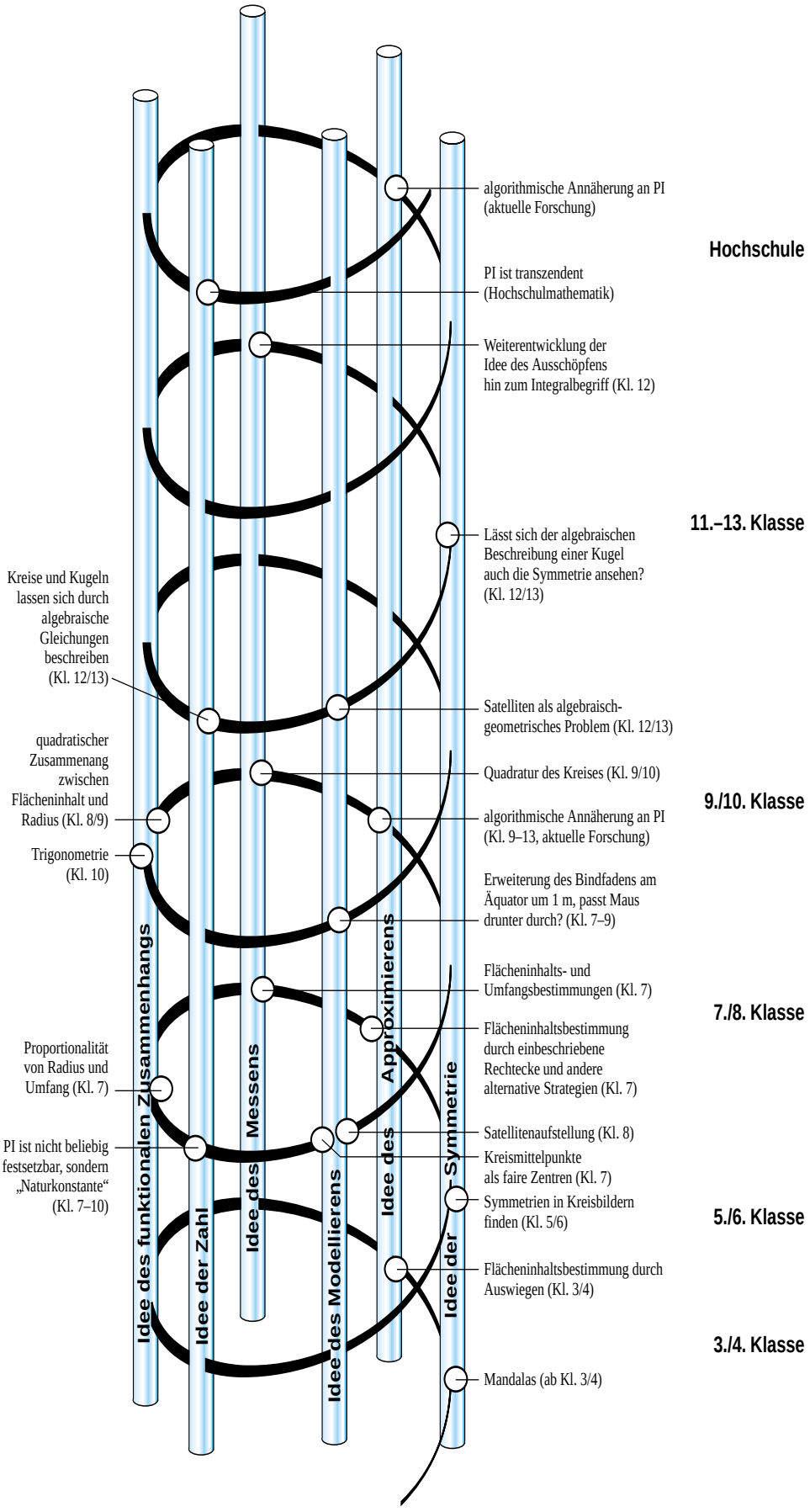

Abb. 4: *Spiralcurriculum für Kreis und Kugel – eine reichhaltige runde Sache!*

Trigonometrie genutzten funktionalen Zusammenhänge zwischen Seitenverhältnissen und Winkeln (die „Kreisfunktionen“) in einem größeren Sinnkontext begreifen und nutzen können.
So können zentrale Ideen zu roten Fäden werden, an denen entlang sich unterschiedliche Perspektiven auf das gleiche Thema Kreis und Kugel strukturieren lassen.

Chancen einer Dynamischen Geometrie-Software

Trotz dieser Reichhaltigkeit sind die Pfeiler der Spirale in *Abb. 4* inhaltlich noch längst nicht erschöpfend. Gerade die klassischen Inhalte (wie die Winkelsätze am Kreis) und wichtige Tätigkeiten der euklidischen Geometrie wie Explorieren, Vermutungen Aufstellen und Begründen, sind hier noch nicht genügend abgebildet. Insbesondere für diese Inhalte und Tätigkeiten bietet es sich besonders an, mit den Lernenden an einer Dynamischen Geometrie-Software zu arbeiten (vgl. z. B. Jock 1994). Erfahrungen aus dem Unterricht zeigen, dass Lernarrangements mit dieser Software

- die Schülerinnen und Schüler von zeitaufwändigem Zeichnen entlasten
- anhaltendes selbstständiges Arbeiten allein oder zu zweit ermöglichen
- Arbeiten im individuellen Tempo ermöglichen
- eigene Lösungswege, neue Fragen und kreatives Arbeiten initiieren können
- das Erkennen wesentlicher mathematischer Strukturen verlangen und ihre konsequente Umsetzung einfordern können (Lassen Sie bloß einmal Lernende mit dem Rechner einen Würfel konstruieren, der in eine Kugel mit variablem Durchmesser einbeschrieben ist; sie merken schnell, dass Mogeln dabei nicht möglich ist.)
- die Entwicklung modularen Denkens ermöglichen (nicht zuletzt durch die Erstellung von Makros)
- vielfältige Kontrollen erlauben (Rückblende, Konstruktionstext zeigen).

Immer wieder sind Lehrerinnen und Lehrer beeindruckt von der entstehenden konzentrierten Arbeitsatmosphäre und davon, dass die Unterrichtsstunde wie im Fluge vergeht. Die modernen Programme (wie Euklid DynaGeo, Cabri, Geonext u.v.a.) sind fast selbsterklärend und leicht zu bedienen. Wer noch nie daran gesessen hat, sollte es unbedingt einmal probieren (z. B. mit der Aufgabe in *Abb. 5*)!
Wer den Einsatz der Dynamischen Geometrie-Software im Unterricht zunächst aufgrund der Komplexität der neuen Situation nicht wagt, kann mit dynamischen Arbeitsblättern (z. B. Baptist/Ulm 2004 oder Elschenbroich/ Seebach 2003) beginnen. Gleichwohl bieten die offenen Werkzeuge der Dynamischen Geometrie-Software in ihrer Offenheit noch mehr Möglichkeiten für einen kreativen und herausfordernden Einsatz.
Abb. 5 gibt ein Beispiel für eine klassische Aufgabe zum Einsteigen. Geeignete Foto-Punkte sind alle Punkte, die mit der Strecke des Schlosses den festen Winkel 40° einschließen (vgl. *Abb. 6a*). Dazu können in einem DGS zunächst einmal einige Dreiecke konstruiert und durch den Zugmodus verändert werden.
Die erste Herausforderung der Aufgabe ist, die eigentliche Aussage des Umfangswinkelsatzes überhaupt zu finden, dass nämlich die Ortskurve aller Foto-Punkte gerade einen Kreis bildet.
Wenn die Vermutung einmal da ist, kann in einer zweiten (von den Lernenden zu entwickelnden!) Konstruktion überprüft werden, ob sich tatsächlich für alle Punkte auf dem Kreis der Winkel 40° ergibt.
Dies tun Schülerinnen und Schüler z. B. durch Wandern lassen eines Foto-Punktes auf einem vorgegebenen Kreis und Ausmessen des Winkels. In DGS erfahrene Lernende kommen manchmal auch auf Konstruktion mit einer Termdarstellung des Winkes Beta und einer Spurfunktion für den Schnittpunkt der beiden Geraden AC und BC, so dass sich der Kreis als Ortslinie ergibt (vgl. *Abb. 6b*, die entsprechende Dynageo-Datei ist in den Online-Ergänzungen der Zeitschrift zu finden).
Dem Explorieren, Vermutungen aufstellen und Begründen sind bei dieser Aufgabe keine Grenzen gesetzt, dem DGS dagegen schon: Für eine Zurückführung des Umfangswinkelsatzes auf bereits bekannte Sätze (also dem Beweisen im Sinne des logischen Herleitens, denn überzeugt sind wir schon!) gehen wir meist zu Papier und Bleistift über.

Abb. 5:
Beispiel einer Aufgabe zur Kreisgeometrie mit Dynamischer Geometrie-Software

Bildwinkel für Fotos

„Der Bildwinkel einer Kamera ist die Größe des Feldes, das vom Objektiv auf den Film abgebildet wird. Er gehört neben Lichtstärke und Brennweite des Objektivs sowie der Art des Verschlusses zu den wichtigsten Kenngrößen einer Kamera.
Der Bildwinkel beträgt beim Kleinbildformat von 24 x 36 mm und einem Standard-Objektiv mit 50 mm Brennweite etwa 27° – 40°.“
(http://de.wikipedia.org/wiki/Bildwinkel)

Aufgabenstellung:

© *Schloss Schönbrunn Kultur- und Betriebsges. m. b. H.*

Wo kann man sich zum Fotografieren mit der oben beschriebenen Kleinbildkamera hinstellen, um das gesamte Schloss Schönbrunn auf das Bild zu bekommen? Um möglichst nah heran zu kommen, wird der maximale Blickwinkel gewählt, aber es soll nicht nur von vorn frontal fotografiert werden. Gibt es weitere geeignete Foto-Punkte?

1. Macht Euch den Sachverhalt mit einer Skizze klar. Welche geometrische Bedingung muss für einen geeigneten Foto-Punkt erfüllt sein?
2. Probiert mit Hilfe einer Dynamischen Geometrie-Software aus, wo diese Foto-Punkte liegen. Formuliert Eure Vermutung als einen mathematischen Satz.
3. Wenn Ihr eine Vermutung entwickelt habt, dann versucht, sie durch eine andere Konstruktion zu bestätigen. Stimmt es wirklich?
4. Wenn sich die Vermutung verdichtet: Findet Ihr auch eine Begründung für Euren Satz? Auf welche bekannten geometrischen Zusammenhänge lässt sich das Phänomen / der Satz zurückführen?

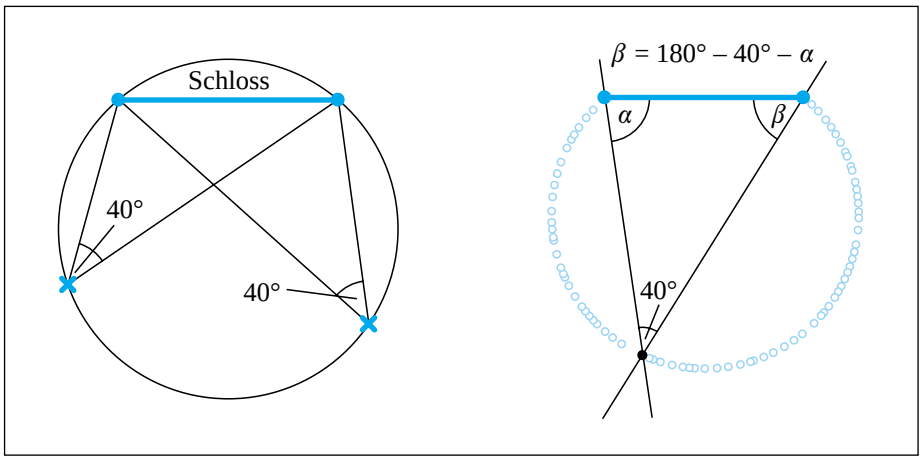

Abb. 6 a und b:
Lösungen zur Aufgabe Abb. 5

Vielseitige unterrichtliche Zugänge

So vielseitig wie die *mathematischen Perspektiven* auf das Thema Kreis und Kugel können auch die *unterrichtlichen Zugänge* sein, mit dem man sich dem Thema annähern kann, da ist das Arbeiten mit Dynamischer Geometrie-Software nur eine Variante. Natürlich können wir in diesem Heft diese unendlich vielen Möglichkeiten bei weitem nicht erschöpfend darstellen. Trotzdem soll mit der Auswahl der Beiträge in diesem Heft gerade auch die Vielfalt der unterrichtlichen Zugänge rund um ein Thema zum Ausdruck kommen:

Oldenburg (2005) hat in Heft 5 aufgezeigt, welche neuen Möglichkeiten zur Verknüpfung von DGS und CAS sich für das Thema Kreis und Kugel (und viele weitere Themen) in naher Zukunft für die Schule ergeben werden. Roth-Sonnen (2005b) hat im Heft 3 ein Modellierungsprojekt zur Erdkugel und Satelliten in Klasse 8 vorgestellt, Münchenbach greift in diesem Heft die Thematik der Erdkugel in Anwendungsaufgaben auf.

In diesem Heft geben außerdem Prediger/Vernay ein Beispiel für die Anregung von Kommunikation durch ein Gruppenpuzzle zur Konstruktionsbeschreibung von Kreisbildern, Krug/Debertshäuser stellen den Ansatz der Aufgabenvariation am Beispiel rund um die Kreisdefinition vor, und Weber zeigt, welche Rolle kopfgeometrische Vorstellungsübungen rund um Kreis und Kugel für die Entwicklung von Vorstellungen spielen können. Der Denkzettel von Anneser liefert Beispiele für Aufgaben zum Kreis mit vielfältigen Lösungswegen, und Furdek zeigt an einem Beispiel aus der analytisch-geometrischen Behandlung von Kugeln, wie die Auseinandersetzung mit Fehlern im Klassengespräch zur intensiven Beschäftigung mit Mathematik beitragen kann.

Mit diesem kurzen Überblick über die Literatur und vielfältigen Beispielen aus der Praxis für die Praxis hoffen wir Anregungen liefern zu können, damit auch Ihr Unterricht zu Kreisen und Kugeln eine runde Sache wird!

Literatur

Baptist, Peter / Ulm, Volker (2004): Dynamische Arbeitsblätter Mathematik – Klasse 7/8, Friedrich Verlag, Seelze. Beispiel-Arbeitsblatt zum Satz des Thales unter http://geonext.unibayreuth.de/data/download/mmlu/thales/index.html [Zugriff Mai 2005]

Biermann, Mark et a. (2001): Materialien zum Modellversuch: Vorschläge und Anregungen zu einer veränderten Aufgabenkultur, Kap. 14: Themengebiet Kreis, online unter http://modellversuch-mathematik.he.schule.de/Materialien/pdf-Dokumente/14Kreis.pdf [Zugriff Mai 2005]

Brückner, Axel. (1992): Für eine umfassendere Problemsicht der Schüler in der Kreislehre, in: Mathematik lehren, 52, S. 55-59.

Delahaye, Jean Paul (1999): Pi. Die Story, Birkhäuser, Basel.

Elschenbroich, Hans-Jürgen / Seebach, Günter (2003): Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter mit Euklid DynaGeo Klasse 10, CoTec-Verlag, Rosenheim.

Haubrock, Daniel (2000): GPS in der analytischen Geometrie, in: Förster, Frank et al. (Hrsg.): ISTRON – Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Bd. 6, Franzbecker, Hildesheim, S. 86-103.

Henn, Hans-Wolfgang (1992): Wie Pi einst fast 4 wurde, in: Mathematik lehren 51, S. 74/75.

Humenberger, Johann / Reichel, Hans-Christian (1995): Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Mathematikunterricht, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Jock, Werner (1994): Der Umfangswinkelsatz – Hinführung und Anwendungen, in: Der Mathematikunterricht 40 (19), S. 13-24.

Leuders, Timo / Prediger, Susanne (2005): Problemlösen durch Vernetzung von Grundvorstellungen an einer PISA-Beispielaufgabe dies.: Funktioniert's? Denken in Funktionen, in: PM 47 (2), S. 5.

Oldenburg, Reinhard (2005): Kreise algebraisch Modellieren – neue Möglichkeiten durch neue Werkzeuge, in: PM 47 (5), S. 35-38.

Riemer, Wolfgang (1998): Wie weit rollt dein Fahrrad? Fragestellungen eines fächerübergreifenden Projekts zum mathematischen Modellieren und Experimentieren. MNU 51 (7), S. 426ff.

Roth-Sonnen, Nicole (2005a): Was ist ein Mittelpunkt? – Modelle entwickeln und vergleichen, in: Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.): Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht, Cornelsen Scriptor, Berlin, S. 190-198.

Roth-Sonnen, Nicole (2005b): Von der Wetterkarte zur Tangentenkonstruktion – ein Modellierungsprojekt in Klasse 8, in: PM 47 (3), S. 19-24.

Schwarze, Monika (2001): Die Geometrie des Kreises, Arbeitsmaterialien zur Koordinatengeometrie Kl. 11 (aus SELMA), online http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/uebersichten/uebersicht_mathematik.htm [Zugriff Juni 05]

Walsch, Werner (1999): Die aufgehängte Erdkugel und andere praxisferne Anwendungsaufgaben, in: Henning, Herbert (Hrsg.): Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung, Bueltmann und Gerriets, Oldenburg, S. 199-203.

Zur Aufgabe in Abb. 5 liegen die DynaGeo-Dateien mit Schülerlösungen unter: http://www.aulis.de/zeitschriften/math → Ausgabe Dezember 2005, dort den Link online-Ergänzungen anklicken.

Ines Fröhlich,
Landesinstitut für Schule und Medien Brandenburg,
Ludwigsfelde-Struveshof,
ines.froehlich@lisum.brandenburg.de

Prof. Dr. Susanne Prediger,
AG Didaktik der Mathematik,
Universität Bremen,
prediger@math.uni-bremen.de