Kreisbilder erklären im Gruppenpuzzle – eine kommunikative Herausforderung

Susanne Prediger, Rüdiger Vernay

Erscheint in Praxis der Mathematik in der Schule 47 (2005) 6

Dinge, die wir lernen müssen,
bevor wir sie tun können,
lernen wir,
indem wir sie tun.
Aristoteles

Zusammenfassung:

Das Gruppenpuzzle ist eine interessante Unterrichtsmethode zur Initiierung eigenverantwortlichen Lernens, allerdings kann sie nur greifen, wenn das Aufgabenmaterial und das unterrichtliche Lernarrangement die Schülerinnen und Schüler auch in die Lage versetzt, die ihnen zugewiesene Verantwortung tatsächlich zu übernehmen. In diesem Artikel wird ein Gruppenpuzzle vorgestellt, in dem Kinder sich vor der systematischen Behandlung geometrischer Fachsprache der kommunikativen Herausforderung stellen, Konstruktionen von Kreisbildern zu erklären.

Zum Hintergrund

Das Gruppenpuzzle gehört zu den aktivierenden Unterrichtsmethoden, denen in vielen Darstellungen (z.B. Richter 2005, Aronson et al. 1978, Leuders 2001, S. 179ff) ein besonders großes Potential zur Initiierung eigenverantwortlichen Lernens zugesprochen wird. Die Grundidee ist bestechend: Man bietet ein Lernarrangement für arbeitsteilige Gruppenarbeit, in dem jede einzelne Schülerin und jeder Schüler hinterher in der Verantwortung steht, einigen Mitlernenden die eigenständig erarbeiteten Inhalte zu erklären. So kann sich niemand vollständig aus der Gruppenarbeit herausziehen, und gleichzeitig können die Lernenden ihre kommunikativen Kompetenzen weiter entwickeln. Es erscheint als eine Lernform, die in idealer Weise die Umsetzung der Idee des „Lernens durch Lehren“ (Martin 1996) für alle Schülerinnen und Schüler gleichzeitig ermöglicht, und damit einen hohen Beitrag leisten kann zu einem eigenverantwortlichen Lernen.

Aus diesen Gründen haben auch wir in unserem Schulbegleitforschungsprojekt zum Umgang mit Heterogenität das Gruppenpuzzle in das auszuweitende Methodenrepertoire aufgenommen: Kinder der sechsten Gesamtschulklasse sollten sich arbeitsteilig Aufgaben zu einem Text selbst erarbeiten und hinterher den anderen erklären (ein einfaches Arrangement für ein Gruppenpuzzle, das sich in anderen Zusammenhängen auch bewährt hat). Unsere ersten Erfahrungen in diesem speziellen Fall waren ernüchternd: Die Lernenden nahmen die ihnen übertragene Verantwortung dafür, dass die anderen die Aufgabe verstehen, nicht an. Die Erklärungen blieben unverbindlich und unverstehbar, was aber die Kinder nicht zu stören schien. Was war falsch gelaufen? Überforderung? Zu wenig Kontrolle darüber, was bei den anderen angekommen ist? Vermutlich ein bisschen von jedem.

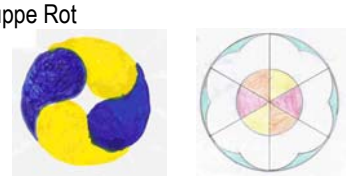
Wie oft beim ersten Einsatz von aktivierenden Unterrichtsmethoden stellte sich hier also das Problem, dass die Methode in ihrer dargebotenen Form die Lernenden überforderte und sie nicht hinlänglich darauf vorbereitete.

Deswegen beschlossen wir die Wiederholung der Methode in einem Lernarrangement, das zum einen die Erklärungsphase besser vorbereitet, zum anderen einen verbindlicheren Rahmen schafft, in dem die Erklärenden eine durch die Situation selbst gegebene Rückmeldung über ihre Erklärungen bekommen. Das Gebiet der geometrischen Konstruktionen und ihrer Beschreibungen erschien uns dazu sehr gut geeignet, weil die Qualität der Erklärung daran sichtbar wird, ob das Gegenüber die richtige Zeichnung auf dem Blatt hat (vgl. Maier 2000). Schön gestaltete Kreisbilder haben einen großen Aufforderungscharakter für die Kinder.

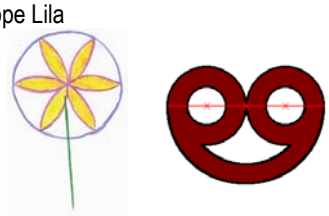
Das dabei entstandene Gruppenpuzzle hat sich in drei Klassen (zweimal Klasse 6 und einmal Klasse 7 nach abgeschlossener Einheit zu Dreieckskonstruktionen) nun bewährt und soll hier genauer vorgestellt werden.

Kasten 1:
Kreisbilder aller Gruppen
(mit absteigender Schwierigkeit, gezeichnet von Schülerinnen und Schülern)

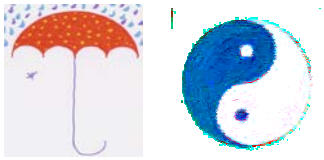
Gruppe Rot



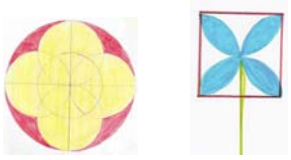
Gruppe Lila



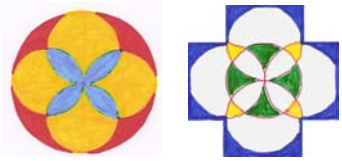
Gruppe Grün



Gruppe Gelb



Gruppe Blau



Zum Ablauf des Gruppenpuzzles

Die zwei Doppelstunden des Gruppenpuzzles verlaufen in drei Phasen (vgl. Arbeitsblatt in der Kopiervorlage, die farbigen Arbeitsblätter der anderen Gruppen sind in den Online-Ergänzungen der Zeitschrift zu finden).

In der ersten Phase werden in einer Klasse mit 27 Kindern neun Expertengruppen zu je drei Kindern gebildet, von denen sich jeweils drei in der zweiten Phase zu drei neu zusammengesetzten Erklärungsgruppen mischen (für neun Kinder visualisiert in Abb. 1).

In einer **ersten Phase**, in den möglichst leistungshomogen zusammengesetzten Expertengruppen, erarbeiten sich jeweils drei Kinder zu einem vorgegebenen Kreisbild die Konstruktion auf weißem Papier. Kasten 1 zeigt alle angebotenen Kreisbilder in ihren unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen. Sie unterscheiden sich sowohl im Anspruch beim Finden der Konstruktion als auch in der Kompliziertheit ihrer Beschreibungen.

Zur Vorbereitung ihrer Vermittlungsaufgabe in den Erklärungsgruppen handeln sie danach miteinander eine geeignete Konstruktionsanleitung aus und verschriftlichen diese.

Diese muss sich **in der zweiten Phase** in den Erklärungsgruppen bewähren, wenn jedes Kind seine Konstruktionsanleitung zwei anderen ohne Vorlage des Zielbildes diktiert („Situation Telefongespräch“) . Der Erfolg der Erklärung wird dabei unmittelbar an den Konstruktionen der anderen sichtbar.

Die dabei gewonnenen Erfahrungen über Stärken und Probleme der eigenen Anleitung werden **in einer dritten Phase** in den alten Expertengruppen wieder ausgetauscht mit dem Ziel, die Gruppenanleitung zu verbessern. Als Hausaufgabe zeichnen schließlich alle ihr Kreisbild mit der endgültigen Beschreibung ganz exakt und sauber, um sie dann in der Portfoliomappe als schönes Werkstück aufheben zu können.

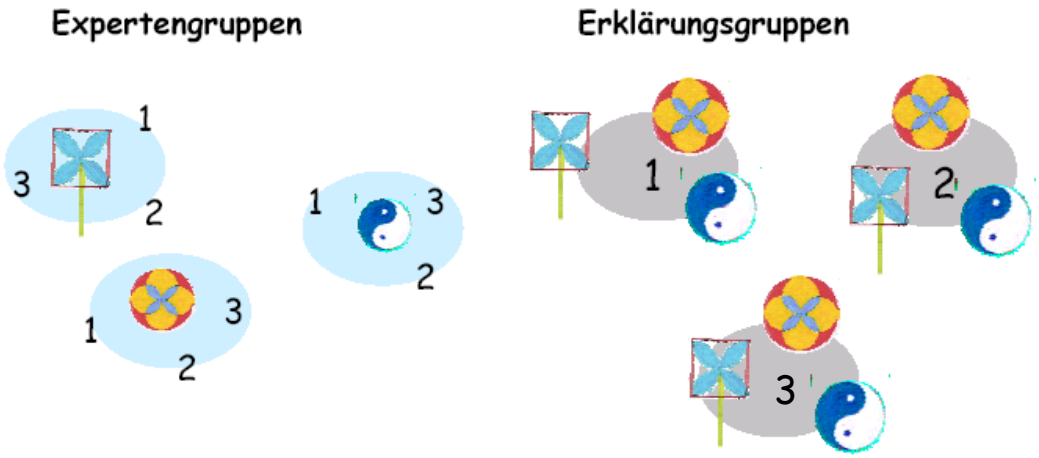


Abb. 1: Gruppenzusammensetzung in 1. und 2. Phase (dargestellt für 9 Kinder)

Wenn die Klasse noch nie eine Konstruktionsanleitung und teilweise auch noch keine Zirkel benutzt hat, kann dies durch die Vorübung in Kasten 2 vorbereitet werden. Die Vorübung liefert außerdem eine mögliches Inventar an hilfreichem Fachvokabular, sollte dabei aber keinesfalls als Vorab-Normierung der Sprache benutzt werden. Ein Lernen auf Vorrat – auch wenn es direkt anschließend verwendet werden kann – ist hier nicht angebracht, da die Lernenden ihre eigenen Wege erproben müssen.

Erklärtes geometriedidaktisches Ziel dieses Gruppenpuzzles ist, die Lernenden die Notwendigkeit von genauen Angaben erfahren zu lassen und somit erste Vorerfahrungen zur Notwendigkeit einer Fachsprache für Konstruktionen zu schaffen. Auf formalisierte Ausdrucksweisen der konventionellen Fachsprache dagegen wurde nicht hingearbeitet.

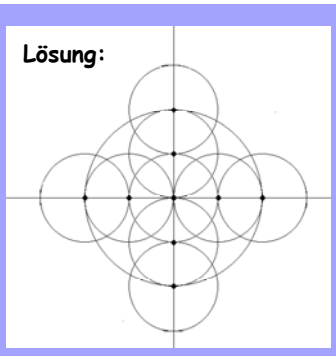
Möglicherweise kann man den ersten Teil (selber die Figur zu konstruieren und eine vorläufige Konstruktionsbeschreibung zu erstellen) in der Expertenphase teilweise in eine Hausaufgabe verlagern, um so Zeit zu sparen. Die Expertengruppen würden dann erst in der darauf folgenden Stunde zusammenkommen und die Ergebnisse der Hausaufgaben austauschen und besprechen.

Die Überarbeitung kann in zwei Phasen geschehen. Zunächst fertigen alle in ihrer Expertengruppe gemeinsam eine Fassung an, die anschließend von der Lehrperson durchgesehen und ggf. korrigiert wird. Die Endfassung und die saubere Zeichnung würde als Hausaufgabe verbleiben.

Vorübung zu Kreisbildern

Nimm einen weißen Zettel ohne Linien sowie Zirkel und Geodreieck. Zeichne nach folgender Anleitung ein Bild und vergleiche es dann mit Deiner Nachbarin oder Deinem Nachbarn. Frage nach, wenn Du die Schritte nicht verstehst.

Lösung:



Konstruktionsanleitung:

1. Zeichne eine Gerade auf Deinen Zettel.
2. Zeichne auf die Gerade einen Punkt (nicht direkt an den Rand).
3. Schlage einen Kreis um diesen Punkt.
4. Stich jetzt in einen der Schnittpunkte des Kreises mit der Gerade und schlage mit dem gleichen Radius wieder einen Kreis um den Punkt.
5. Wiederhole dies, bis Du fünf Kreise nebeneinander hast, die sich überschneiden.
6. Wenn Du meinst, Du kommst mit dieser Übung bis hierhin zurecht, dann mach mit dem nächsten Schritt weiter, sonst zeichne noch fünf neue Kreise mit einem doppelt so großen Radius. Diesen kannst Du an Deinem alten Kreis mit dem Zirkel abmessen.
7. Suche den mittleren Kreis.
8. Zeichne durch den Mittelpunkt des Kreises eine Senkrechte zu Deiner ersten Geraden. Senkrecht heißt, dass zwischen der neuen und alten Geraden ein rechter Winkel sein soll.
9. Zeichne nun je einen Kreis mit dem selben Radius um die Schnittpunkte der neuen Geraden mit dem mittleren Kreis.
10. Um die neuen Schnittpunkte dieser Kreise zeichnest Du noch je einen Kreis, so dass Du jetzt fünf Kreise in jeder Richtung hast.
11. Wenn Du jetzt noch Zeit hast, zeichne einen Kreis mit einem doppelt so großen Radius, wie dem vorher um den Mittelpunkt des vorherigen Kreises. (Miss den doppelten Radius nicht an Deinem Lineal aus, sondern an den Kreisen, die Du gezeichnet hast.)

Kasten 2: Aufgabentext und Lösung der Vorübung

Erfahrungen und Beobachtungen

Die Kreisbilder haben sich als tragfähiges Thema erwiesen, sie waren anregend und herausfordernd zugleich. Die Schülerinnen und Schüler waren mit Eifer bei der Sache, erste Konstruktionen waren schnell gefunden, auch wenn eine Gruppe zunächst ausschließlich nach Augenmaß konstruierte (beim linken Bild der Gruppe rot). Erste Anleitungen wurden formuliert, hielten dann aber nicht immer der Überprüfung in der eigenen Expertengruppe stand. Anleitungen wie „dann setzt man den nächsten Kreis weiter unten an ...“ waren zu hören. Jetzt war die Gruppe gefordert, hier gemeinsam präziser zu formulieren. Das gestaltete sich zuweilen schwierig und bedurfte teilweise Lehrerunterstützung, um auf Klippen aufmerksam zu machen. In leistungsstärkeren Gruppen trat dieser Effekt kaum auf, so dass in den weiteren Klassen die leistungshomogene Zusammensetzung der Kleingruppen im unteren Leistungsbereich etwas aufgeweicht wurde.

In der Erklärungsphase war allseits große Anstrengung bei der Umsetzung zu spüren. Die Lernenden nahmen die Aufgabe diesmal so ernst, dass sie sich nicht immer an die Vereinbarung halten konnten, nur mündlich zu kommunizieren. Bei einigen Gruppen wurde die mündliche Erklärung zuweilen ganz „hand-

greiflich“ unterstützt: „... Nein, so habe ich das nicht gemeint, du musst hier den Zirkel einsetzen...“ (mit dem Finger wurde der Punkt gezeigt).

Als Konsequenz haben wir in der Parallelklasse die Situation „Telefongespräch“ eingeführt: „Stellt euch vor, ihr müsst diese Konstruktion eurer Freundin am Telefon mitteilen: Ihr seht nicht, was sie zeichnet. Es kommt ganz allein auf eure präzise Anleitungen an“. Dieses Verfahren erwies sich als sinnvoll. Die Eingriffe entgegen der Verabredung verschwanden fast vollständig.

Schön war zu beobachten, wenn die fertigen Produkte begutachtet wurden und es eine große oder vollständige Übereinstimmung mit dem Original gab. Es wurde durchaus sehr kritisch bei Abweichungen über die Ursachen debattiert (Wichtig war immer, die Schuldfrage zu klären!). Leider ließ sich das nur teilweise in eine Überarbeitung der Konstruktionsbeschreibung kanalisieren. Insbesondere die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler waren selten bereit, ihre einmal (mühsam) erarbeitete Beschreibung ein weiteres Mal zu überarbeiten. Ihrer Meinung nach war die Lernsituation nun beendet, der Hinweis auf einen weitergehenden Kompetenzerwerb durch Präzisierung war nicht für alle überzeugend. Andere ließen sich auch auf diese Herausforderung ein und rangen um möglichst präzise Formulierungen: „..aber den äußeren Kreis soll der doch nicht schneiden, also können wir nicht schreiben, ‚der Kreis soll *alle* Kreise berühren‘!“

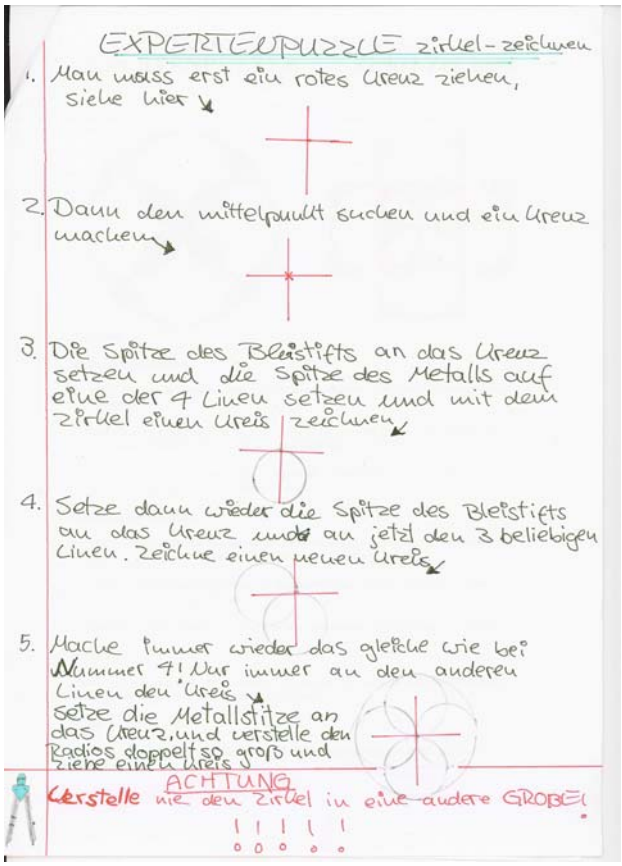


Abb. 2: So beschreibt es sich doch leichter! Annemaries visuell unterstützte Anleitung

Die Abbildungen zeigen Konstruktionsanleitungen unterschiedlicher Qualität aus verschiedenen Phasen. (Sie sollten vor dem Weiterlesen selbst zuerst danach konstruieren, um die Anleitungen und die innewohnenden Schwierigkeiten würdigen zu können!)

Annemarie (Abb. 2) hat uns mit ihrer Anleitung überrascht, und wir mussten eingestehen, dass jede Gebrauchsanweisung genau mit solchen visuellen Unterstützungen arbeiten würde (Gruppe gelb links). Wieso eigentlich werden solche Konstruktionsbeschreibungen in der Geometrie nicht zugelassen? Der Hinweis auf die „Situation Telefongespräch“ wirkt da doch als reichlich künstliches Argument...

Abb. 3 und 4 zeigt die Entwicklung einer Expertengruppe aus dem unteren Leistungsspektrum (Gruppe blau links, von der Konstruktion her dieselbe Figur wie Annemaries), die um die Exaktheit ihrer Anleitung eindrucksvoll gerungen hat. Auch die endgültige

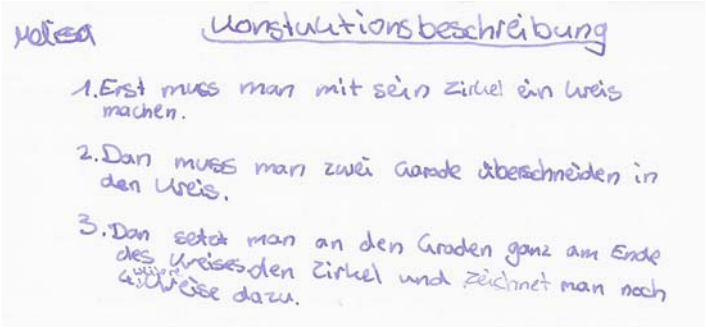
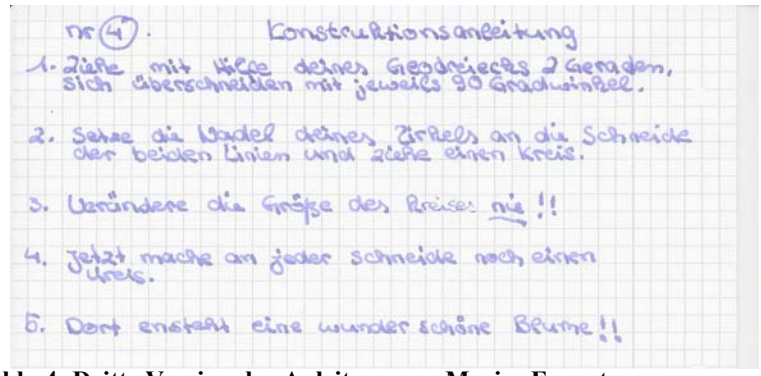


Abb. 3: Erste Version der Anleitung von Maria


nr (4). Konstruktionsanleitung

1. Ziehe mit Hilfe deines Geodreiecks 2 Geraden, sich überschneiden mit jeweils 90 Gradwinkel.
2. Setze die Nadel deines Zirkels an die Schneide der beiden Linien und ziehe einen Kreis.
3. Verändere die Größe des Kreises nie !!
4. Jetzt mache an jeder Schneide noch einen Kreis.
5. Dort entsteht eine wunderschöne Blume!!

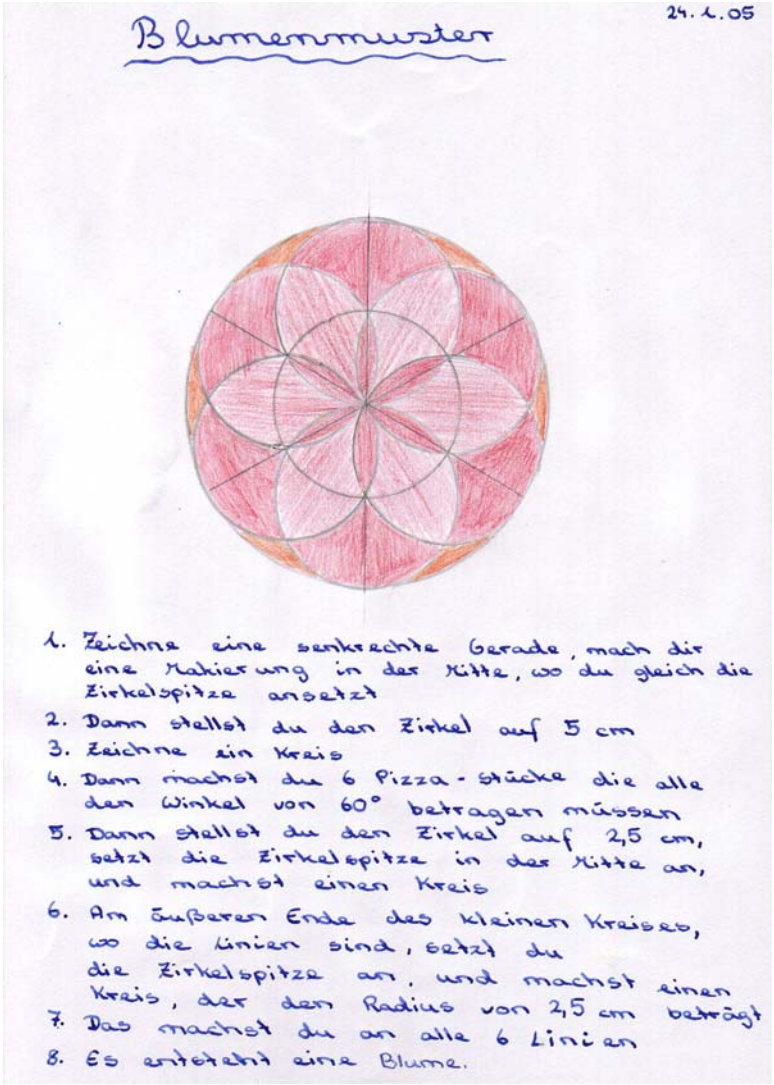
Abb. 4: Dritte Version der Anleitung von Marias Expertengruppe

Beschreibung in Abb. 4 ist von den fachsprachlichen Konventionen noch entfernt, sowohl in einzelnen Fachwörtern (wir würden von „Schnittpunkt“ statt von „Schneide“ sprechen) als auch in ganzen Wendungen (statt „Verändere die Größe des Kreises nie.“, hätten wir vielleicht der nächsten Anweisung hinzugefügt „mit gleichem Radius“). Gleichwohl erfüllt sie unzweifelhaft ihren Zweck der eindeutigen Kommunikation, und das war an dieser Stelle entscheidend.

Andere Konstruktionsbeschreibungen (insbesondere die vieler Siebtklässler, die bereits eine Unterrichtseinheit zu Dreieckskonstruktionen absolviert hatten), sind dagegen deutlich enger an der Fachsprache, was noch nicht heißt, dass sie die künstlichen klassischen Spielregeln des Konstruierens mit Zirkel und Lineal beachten (vgl. z.B. Abb. 5, Gruppe rot rechts).

In den drei Klassen gab es insgesamt aber nur eine einzige Beschreibung, die nicht zu der gewünschten Konstruktion geführt hat, das sehen wir als Erfolg.

Insgesamt haben fast alle Schülerinnen und Schüler die Erkenntnis gewonnen, dass es notwendig ist, sich über ein Grundvokabular an Fachbegriffen zu verständigen, da sich so bestimmte Dinge unmissverständlicher ausdrücken lassen. Dass nicht alle diese Einsicht unmittelbar umsetzen konnten, selbst wenn ihnen vom Lehrer bei der Beratung geeignete Fachbegriffe angeboten wurden, erscheint aber angesichts der Komplexität der Lernsituation nicht verwunderlich.


24.1.05

Blumenmuster

1. Zeichne eine senkrechte Gerade, mach dir eine Markierung in der Mitte, wo du gleich die Zirkelspitze ansetzt
2. Dann stellst du den Zirkel auf 5 cm
3. Zeichne ein Kreis
4. Dann machst du 6 Pizza-Stücke die alle den Winkel von 60° betragen müssen
5. Dann stellst du den Zirkel auf 2,5 cm, setzt die Zirkelspitze in der Mitte an, und machst einen Kreis
6. Am äußeren Ende des kleinen Kreises, wo die Linien sind, setzt du die Zirkelspitze an, und machst einen Kreis, der den Radius von 2,5 cm beträgt
7. Das machst du an alle 6 Linien
8. Es entsteht eine Blume.

Abb. 5: Reinfassung von Henrike, einer Siebtklässlerin mit mehr Vorerfahrung in Konstruktionsbeschreibungen

Fazit

„Dinge, die wir lernen müssen, bevor wir sie tun können, lernen wir, indem wir sie tun.“ (Aristoteles)

Schülerinnen und Schüler sollen über Mathematik kommunizieren, hier z.B. Konstruktionen von Kreisbildern erklären. Sie lernen dies, indem wir sie in Situationen versetzen, in denen sie genau dies tun müssen. Dazu ist das Gruppenpuzzle eine ausgesprochen geeignete Methode, weil Kinder sowohl in kommunikative Problemlöseprozesse versetzt werden (gemeinsames Finden einer Konstruktion und Konstruktionsbeschreibung) als auch Erklärungsverantwortung übernehmen. Doch das Tun alleine reicht nicht, das haben wir in dem erstem Versuch schmerzlich erfahren. Die Aufgaben müssen wirklich so gestaltet sein, dass sie zwar hinreichend herausfordernd, aber nicht überfordernd sind. Als besonders günstig an dem geometrischen Kontext erwies sich, dass die Qualität der Erklärungen sofort an den Konstruktionen des Gegenübers sichtbar wurde.

Inzwischen haben wir auch Erfahrungen mit vielen anderen Gruppenpuzzeln gesammelt: Auch Schulbuchaufgaben können sich dazu eignen, wenn sie zunächst arbeitsteilig bearbeitet und dann in Puzzlegruppen, mit jeweils einem Experten, nacheinander bearbeitet werden.

Unser geometriedidaktisches Ziel, durch die Kommunikationssituation das Bedürfnis nach einer genauen Fachsprache zu wecken, haben wir im Wesentlichen erreicht. Gleichzeitig zeigt sich, wie weit der Weg zur konventionellen Fachsprache ist, wenn man die Kinder selbst gehen lässt und sie ihnen nicht überstülpt. Am Ende haben wir uns die Frage gestellt, wie wir bei noch mehr Kindern auch das Präzisierungsbedürfnis in der Überarbeitungsphase hätten weiter anstacheln können. In einem nächsten Versuch würden wir dem noch mehr Bedeutung geben wollen durch eine weitere Testsituation unter Extrembedingungen: Schriftlich an die Parallelklasse, per Email, als Wettbewerb, wer dem Hausmeister das beste Bild entlockt usw. Der Phantasie sind hier keine Grenzen gesetzt....

Anmerkung:
Wir danken Jana Kösters und Björn-Sören Schlemmer für ihre Mithilfe in der Ausarbeitung und Erprobung der ersten Version des Gruppenpuzzles. Dem Team des Schulbegleitforschungsprojekts zum Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht, insbesondere Andreas Kraatz-Röper und Susanne Bialek, danken wir für das Mitentwickeln, Erproben und Reflektieren des Lernarrangements.

Literatur

Aronson, Elliot et al. (1978): The Jigsaw Classroom, Sage Publication, Beverly Hills, CA.

Martin, Jean-Pol (1996): Das Projekt 'Lernen durch Lehren' - eine vorläufige Bilanz, in: Fremdsprachen Lehren und Lernen, 25. Jahrgang. Themenschwerpunkt: Innovativ-alternative Methoden, Narr, Tübingen, S.70-86

Leuders, Timo (2001): Qualität im Mathematikunterricht, Cornelsen Scriptor, Berlin.

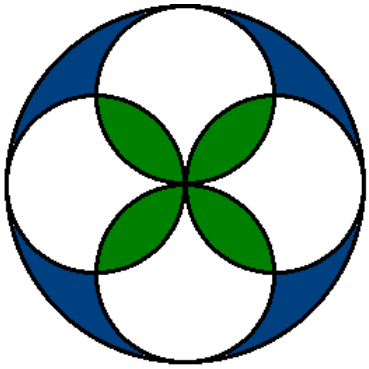
Maier, Hermann (2000). Schreiben im Mathematikunterricht. Mathematik lehren 99, S. 10-13.

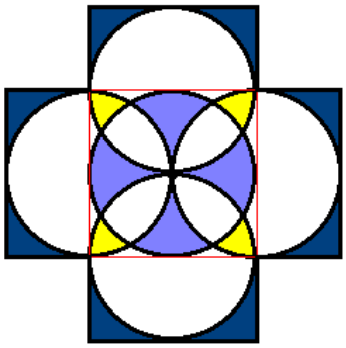
Richter, Kathrin (2005): Wendestellen in Unterrichtsmethodik und Analysis - Ein Gruppenpuzzle zu Wendestellen als Beitrag zum selbstständigen Lernen, in: PM 47(1), S. 20-28.

Die Kopiervorlage gibt es in einer farbigen Fassung ebenso wie die Arbeitsblätter der anderen Gruppen in den Online-Ergänzungen von PM.

Gruppenpuzzle Kreisbilder

Gruppe Blau





In den Expertengruppen:

1. Wählt als Gruppe eines der beiden Bilder aus, zu dem Ihr eine Konstruktion mit dem Zirkel und Geodreieck finden wollt. Diese sollt Ihr später den anderen erklären.

   Hilfen: Die dünnen roten Linien sind Hilfslinien, die Euch helfen sollen, die Bilder besser zu konstruieren. Sie müssen hinterher nicht zu sehen sein.

2. Jede Person versucht zunächst für sich allein, das Bild zu konstruieren.

3. Vergleicht, wie Ihr vorgegangen seid. Überlegt, welches die exakteste und gleichzeitig einfachste Möglichkeit ist, das Bild zu konstruieren.

4. Schreibt genau in Euer Heft auf, wie ihr den anderen die Konstruktion beschreiben wollt.
   Die Konstruktionsanleitung muss gut verständlich und vollständig sein, damit die anderen sie verstehen können, ohne dass sie vorher das Bild gesehen haben.
   Achtung: Jede Person braucht die Gruppen-Anleitung am Ende im eigenen Heft!

In den Erklärungsgruppen:

1. Der „Erklärer" liest die Schritte seiner Anleitung so vor, dass den anderen genügend Zeit bleibt, jeden Schritt zu befolgen. Zeigt dabei das Bild, das rauskommen soll, nicht vor.

2. Nach dem letzten Schritt zeigt der „Erklärer" den anderen Kindern das Originalbild.
   Die anderen Kinder beraten den Erklärer, wie seine Anleitung noch besser werden könnte, der Erklärer schreibt dies auf.

3. Danach ist die nächste Person Erklärer.

In den Expertengruppen:

1. Erzählt Euch gegenseitig Eure Erfahrungen beim Erklären:
   Was hat gut geklappt, was war schwierig?

2. Verbessert Eure Anleitung so, dass sie nun auch am Telefon funktionieren würde.

3. Schreibt die perfekte Anleitung so auf, dass sie für alle kopiert werden kann.

4. Zeichnet Euer Kreisbild nochmal so schön, dass Ihr das Bild gemeinsam mit der Anleitung aufbewahren könnt.