



## Eckige Bälle selbst gemacht –

**Untersuchungen zum Fußball als Anlass für handlungsorientiertes und differenzierendes Mathematiktreiben**

Susanne Prediger und Albrecht Beutelspacher

Wie ist eigentlich ein Fußball aufgebaut, und welche Strukturen lassen sich durch Nachbauen erkennen? Der Fußball ist als geometrisches Objekt immer eine Untersuchung wert, weil viele spannende und typische mathematische Fragen daran gestellt werden können. Der Artikel zeigt an einer vierstündigen Sequenz aus einer sechsten Klasse einer integrierten Gesamtschule, dass sich viele dieser Fragen schon für junge Schülerinnen und Schüler hervorragend fruchtbar machen lassen, um eigentätig Mathematik zu treiben, wenn handlungsorientiert und differenzierend vorgegangen wird.

### Wie ist so ein Fußball aufgebaut?

An den Fußball als geometrisches Objekt lassen sich zahlreiche typisch mathematische Fragen stellen (vgl. Beutelspacher 1996). Wir beginnen in der 6. Klasse die Untersuchung des Fußballs mit der Charakterisierung des Fußballs in seiner geometrischen Struktur: Wie ist so ein Fußball eigentlich aufgebaut?

Diese Frage können einige Kinder direkt durch Betrachtung eines Fußballs (oder dessen Foto) beantworten: Aus Sechsecken und Fünfecken, wobei an einer Ecke jeweils zwei Sechsecke ein Fünfeck tref-

fen. Mathematikerinnen und Mathematiker sehen darin ein abgestumpftes Ikosaeder, was Lernende aber nicht kennen.

Die meisten Kinder können sich dieser Charakterisierungsfrage aber besser nähern, wenn sie zunächst den Auftrag erhalten, einen Fußball nachzubauen. Wir haben dazu *Klickies* und *Polydrons* benutzt, mit denen man aus Kunststoff-Flächen einfach durch Zusammenklicken Körper bauen kann (vgl. *Abb. 1*). Kinder gehen an die Aufgabe sehr unterschiedlich heran:

– Claudia und Selim analysieren das

Original genau und stellen fest: „Wir brauchen die ganz großen [die Sechsecke] und die etwas kleineren [die Fünfecke]. Um jedes Fünfeck müssen nur Sechsecke herum. Die Fünfecke müssen aber trotzdem möglichst nah zusammenliegen.“

- Tom und Jürgen probieren einmal aus, ein Sechseck zwischen die Fünfecke zu bauen und entscheiden sich, „weil das nicht passt, irgendwie“, zunächst dafür, nur die Fünfecke zu benutzen. Erst als der Ball (der so ein Dodekaeder geworden ist, vgl. *Abb. 2*) am Ende viel weniger Teile hat als das Original, schauen Sie nochmal genauer hin: „Nee, das muss irgendwie auch anders gehen.“
- Auch Nadja und Tina halten sich nicht lange mit Analysen des Originals auf und beginnen nur mit Sechsecken, „weil das schöner aufgeht“. Erst nach einer Weile wundern sie sich, „dass alles so platt ist“. Dieser Umweg bringt sie zu einer zentralen Einsicht über die Relevanz der Innenwinkelsummen: „Nur Sechsecke sind doof, da wird es ein Teppich. Wir müssen Fünfecke dazwischen tun, damit das eine richtige Biegung kriegt.“ Doch erst nach weiterem Scheitern (nun werden Sechsecke und Fünfecke zunächst beliebig kom-



Abb. 1 a und b: Schülerinnen und Schüler beim Bau eines Fußballs aus Polydrons

biniert), entschließen sie sich zur genaueren Analyse: „Vielleicht sollten wir da doch nochmal genau gucken: Wie geht denn das wirklich? – Ach so ja, immer zwei Sechsecke und ein Fünfeck.“

Je größer die anfänglichen Schwierigkeiten sind, desto größer ist auch der Stolz, es am Ende geschafft zu haben.

Mathematische Reflexionen kommen in der Bau-Phase nebenbei. Damit sie nicht hinter den praktischen Problemen verschwinden, ist es oft ratsam, sie durch Lehrerimpulse zu verstärken. In dem hier beschriebenen Unterricht wurden die Reflexionen durch individuelle Nachfragen angestoßen, aber vor allem auch systematisch durch zwei Arbeitsblätter mit weiteren Forschungsaufträgen angeregt (vgl. *Kopiervorlage 1 und 3*).

Die Blätter dienten der inneren Differenzierung in einer sehr heterogenen Klasse 6; die Schilderungen der ersten Zugänge mögen von der Unterschiedlichkeit der Kinder einen Eindruck liefern. *Kopiervorlage 1* ist aufgrund der Abzähl-Thematik und der fehlenden Vorstrukturiertheit der Bastelaufforderung deutlich schwieriger als *Kopiervorlage 3*. Gleichzeitig bietet Ko-

piervorlage 3 aber auch eine Rampe für ganz starke Schülerinnen und Schüler, denn die Frage, welche anderen Körper sich als Fußball eignen würden, bietet einen selbstdifferenzierenden, weil offenen Forschungsauftrag (s. u.).

#### Wie kann man gut zählen?

In einer Gruppe entstand die Frage von allein: Reichen unsere Sechsecke überhaupt? Die anderen erhalten den Zählaufrag über das Arbeitsblatt oder per Lehrerimpuls.

Auch beim Zählen gehen die Kinder sehr unterschiedlich vor: Einige fangen irgendwo an zu zählen und hören irgendwo auf. Bei Anne, Mathias und Sara herrscht am Ende Unsicherheit: „Ich hab 21 Sechsecke gezählt, und du 19, was stimmt denn nun? Wir müssen irgendwie systematischer vorgehen!“

Einige Kinder, die ihre gebastelten Papp-Fußbälle (vgl. *Abb. 5*) als Anschauungsobjekt nehmen, greifen kurzerhand zum Bleistift und markieren die bereits gezählten Seiten. Aber wie geht es für das Kunststoffmodell?

Pia stellt den Fußball vor sich hin, gibt dem Fußball so eine klare Struktur und zählt systematisch: „Oben ein Fünfeck und darunter in der zweiten Reihe sind fünf Fünfecke. Dann sieht man, der Fußball sieht ja unten genauso aus, also zusammen 12 Fünfecke. Unter dem Deckel sind drei Reihen mit immer fünf Platten, macht insgesamt 15 plus den Deckel, also 16 Platten für die obere Hälfte und 16 unten. Der Fußball besteht aus 32 Platten, und davon 12 Fünfecken. Dann sind es doch 20 Sechsecke!“

Angeregt durch die Frage c) auf *Kopiervorlage 1* fällt Ralf noch ein weiterer Weg ein, die Seiten zu zählen; er ist in *Abb. 4*

abgedruckt. Damit hat er (und auch andere) in der Auseinandersetzung mit Bens falscher Lösung auf dem Arbeitsblatt das für die Kombinatorik wichtige Prinzip entdeckt, zunächst mutig zu viel abzuzählen und hinterher Dopplungen herauszurechnen (vgl. Danckwerts/Vogel 1985).

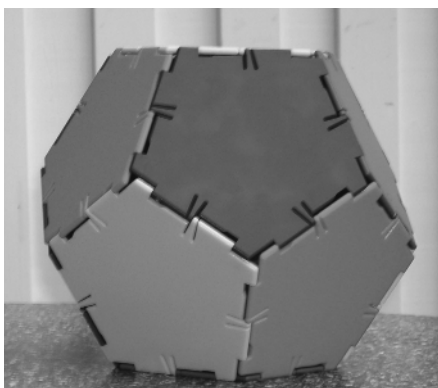
#### Wie können wir einen Fußball aus Pappe bauen?

Auf *Kopiervorlage 4* findet sich ein Bastelbogen, mit dem ein Fußball erstaunlich einfach aus Pappe hergestellt werden kann (vgl. *Abb. 5*). Auch Kinder mit zwei linken Händen erstellen damit problemlos ein ansehnliches Produkt.

Im Unterricht erfüllte der Bastelbogen außerdem die ganz praktische Funktion, der herrschenden Knappheit an *Klickies* und *Polydrons* zu entgegen, indem zeitversetzt entweder erst mit den Polydrons und dann mit Bastelbogen oder umgekehrt gearbeitet werden konnte.

Der Bastelbogen basiert auf der genialen Grundidee, die so schwer konstruierbaren Fünfecke durch Löcher im Sechseck-Raster zu erzeugen. Für die Leistungsstärkeren wurde ein Weg gesucht, wie sie die Grundidee des Bogens selbst nacherfinden konnten. Dazu bekamen sie ein Sechseck-Rosetten-Papier (auf *Kopiervorlage 2*) und den Auftrag zu überlegen, was damit vielleicht anzufangen ist. Max überlegte: „Nee, Fußball aus Pappe bauen, das geht mit dem Sechseck-Papier nicht, ich brauche doch auch Fünfecke! Außerdem ist es so platt, das muss ich irgendwie einschneiden zum Hochklappen.“ Der Lehrerinnenimpuls, „Wenn Dich eine Ecke stört, dann mach sie doch weg! Fünfecke dürfen auch aus Luft sein, Hauptsache, die Luft hat fünf Ecken und Kanten.“, brachte ihn auf die richtige

Abb. 2: Ist das ein guter Fußball?





**Abb. 3:** *Geschafft! Ein Polydron-Fußball?*

Idee: „Okay! Dann mach ich ein Loch und klebe das zusammen!“. So entwickelte er aus einer Sechseck-Rosette durch Ausschneiden des mittleren Sechsecks und Verkleben eine passende Konstellation aus fünf Sechsecken, die ein „Luft-Fünfeck“ einschließen.

Doch wie nun sollen mehrere solche Konstellationen zu einem Fußball zusammengebaut werden? Hier fehlte Max die richtige Idee, bis die Lehrerin (die Autorin dieses Artikels) den Rat gab, Ralf nach seiner Art zu fragen, wie er die Seiten gezählt hatte. Beide gemeinsam entwickelten dann den tragenden Gedanken: „Ralf hat drei mal dasselbe Sechseck gezählt. Jetzt kleben wir drei Sechsecke übereinander!“

In der Tat erwies sich diese Konstruktion auch deswegen als sehr geeignet, weil sie durch das Dreifach-Kleben auch bei sehr dünner Pappe eine gute Stabilität brachte.

**Abb. 5:** *Fußball aus Pappe bauen*



b) es gibt 12 Secke, und ein Secke wird von 5 Gecken umgeben  
da es 12 Secke gibt  $12 \cdot 5 = 60$  doch ein 6-cke wind sich  
von drei 5-cken geteilt also  $: 3 = 12 \cdot 5 : 3 = 20$  Gecke

**Abb. 4:** *Wie Ralf seine Abzählung erklärt*

Hinterher machte die Konstruktion den anderen Kindern am Tisch Ralfs Zählweise sehr anschaulich: „Um jedes Fünfeck fünf Sechsecke herum, dann habe ich 60. Aber dann muss ich jeweils drei übereinander kleben, also sind es eigentlich nur 20.“

Über den fertigen Bastelbogen, mit dem an einem anderen Tisch drei Kinder sehr gerne arbeiteten, die die Grundidee nicht selbst hätten finden können, rümpften die beiden Entdecker Robert und Max die Nase: „Das ist ja langweilig, da ist ja alles schon fertig gedacht! Wir haben das selbst erfunden!“

#### **Welche anderen Fußbälle gäbe es noch?**

Als die weitreichendste Frage hat sich die nach möglichen Alternativen zum Fußball herausgestellt. Wieso nicht einen Fußball nur aus Sechsecken? Das können nach der handlungsorientierten Erfahrung auch die ganz Schwachen klar sagen: „Das wird doch nur völlig platt und kein Ball!“

Eine genauere Begründung formuliert die Klasse später im abschließenden reflektierenden Stuhlkreis: „Die Sechsecke passen gerade gut zusammen, wie auch vier Vierecke. Es muss aber immer noch Platz übrig bleiben. Und wenn man mehr hat als einen

ganzen Kreis, dann kriegt der Ball eine Delle, das ist auch doof.“ In der Tat, bei mehr als dem ganzen Kreis (also einer Winkelsumme über  $360^\circ$ ), z. B. bei vier Fünfecken an einer Ecke, erhält man nicht-konvexe Körper, auch diese lassen sich mit *Klickies* oder *Polydrons* leicht herstellen. Interessante Diskussionen ergeben sich an der Frage, ob der Dodekaeder nicht auch einen guten Fußball abgeben würde. Hier kommen auch die Grenzen der Modellierung eines Fußballs durch den archimedischen Körper zur Sprache: „Der Ball mit den zwölf Fünfecken ist ja gar kein Ball, der ist viel zu eckig.“ – „Aber wenn der aus Leder wäre und nicht aus Plastik, dann wär’ es doch auch okay, dann wären die Ecken runder!“

Eine Zuspitzung erhält das Argument der Eckigkeit bei Betrachtung von Tetraedern, Würfeln und anderen Körpern aus Drei- und Vierecken.

Der leistungsstarke Max geht derweil noch einer weiterführenden Frage nach: Welche Körper lassen sich aus jeweils nur einer Plattenart bauen? Er findet einige, unter anderem die Doppelpyramide mit dreieckiger Grundfläche, die die Lehrerin zur weiteren Präzisierung der Fragestellung veranlasst: Welche Körper lassen sich aus jeweils nur einer Plattenart bauen, wenn sie an jeder Ecke gleich aussehen sollen? Nach ca. 15 min hat Max alle platonischen Körper auf dem Papier stehen und kann durch die Handlungserfahrung auch eine klare Begründung liefern. Der altersgerechte Impuls zur Begründung der Vollständigkeit war die Frage: „Wie kannst Du sicher sein, dass Du alle regelmäßigen Körper gefunden hast?“ Eine Begründung aufzuschreiben, fällt ihm schwerer. Das Resultat ist in *Abb. 6* abgebildet und nur durch mündliche Erläuterungen gut verständlich: Zunächst hat Max die Dreiecke als Baumaterial genommen: er findet einen regelmäßigen Körper mit insgesamt vier Dreiecken (da stoßen jeweils drei Dreiecke aneinander), einen mit 8 (vier



## Der Ball ist gar nicht rund!!

Du brauchst:

- einen Fußball
- Klickies oder Polydrons
- Schere und Kleber
- Stift und Heft oder Forschungsheft



- a)** Schau Dir den Fußball genau an:  
Aus welchen Flächen ist er zusammengesetzt?  
Wie viele davon?  
Schreibe auf, wie du beim Zählen vorgegangen bist.

Wenn Du das Zählen nicht schaffst, ohne durcheinander zu kommen, mache zunächst weiter mit b)

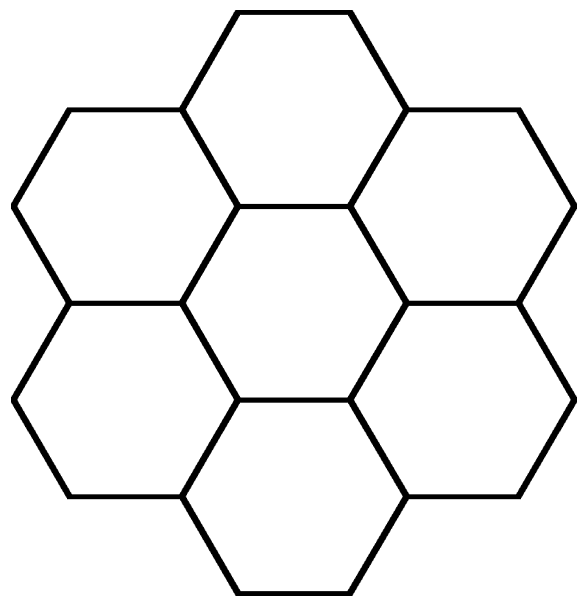
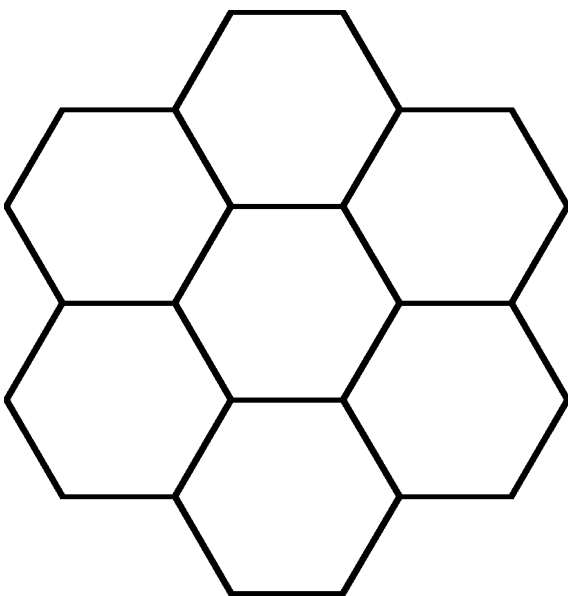
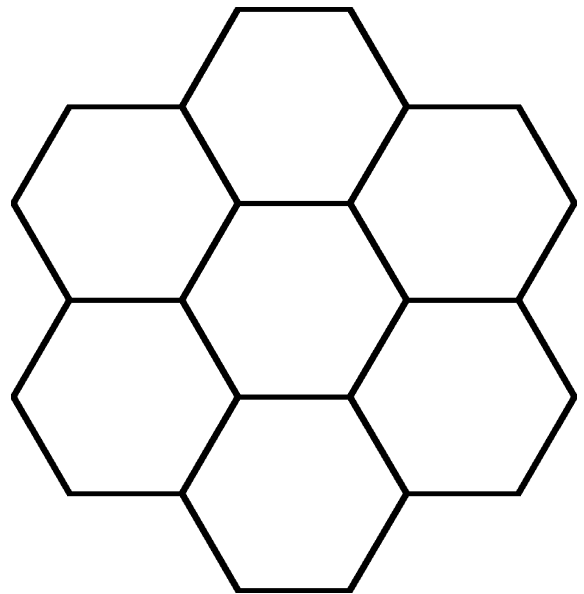
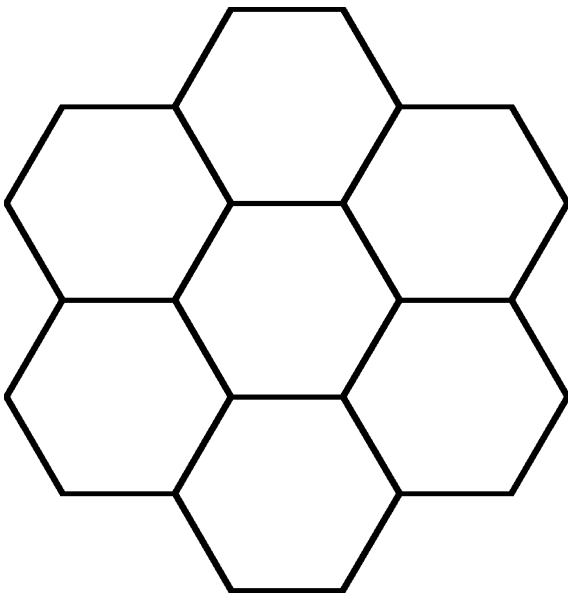
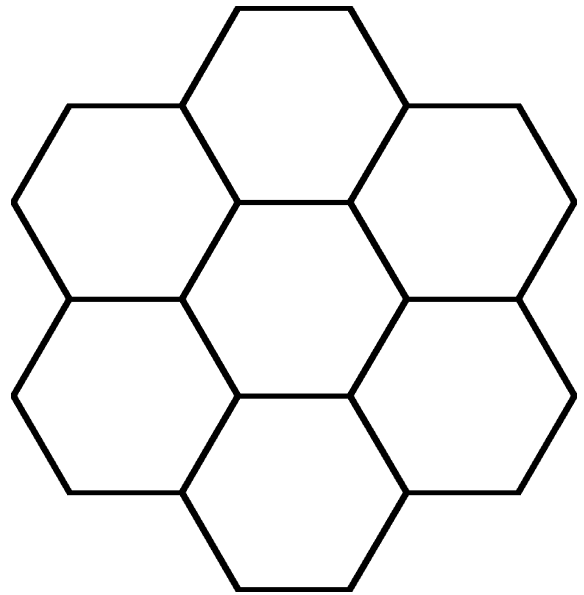
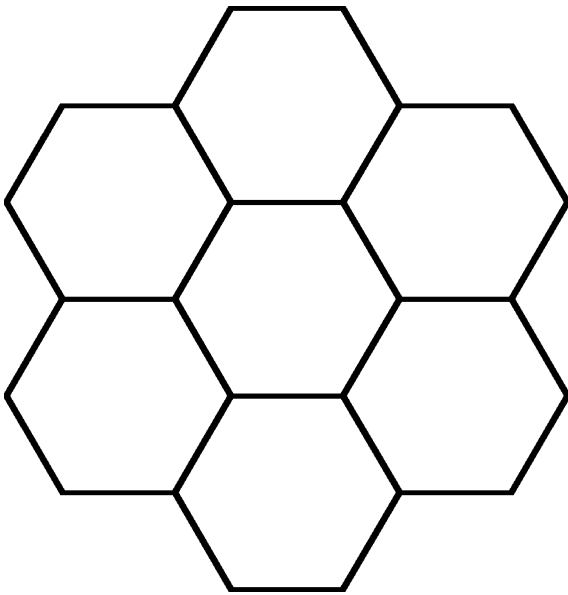
- b)** Baue einen Fußball mit Klickies nach!  
Kannst Du nun die verschiedenen Flächen zählen?  
Fällt Dir ein zweiter Weg ein, die Flächen zu zählen? Schreibe ihn auf!

- c)** Lies nach, wie Ben gezählt hat.  
Erkläre, was er sich überlegt hat.  
Was sagst Du dazu?  
Fällt Dir nun noch eine Möglichkeit ein?

*Ich halte das schwarze Fünfeck nach oben, dann sehe ich zwei Gürtel von Fünfecken, und zwar jeweils fünf Stück. Ein Fünfeck ist unten, also insgesamt 12 Fünfecke.  
An jedes Fünfeck grenzen fünf Sechsecke. Somit sind es 60 Sechsecke.*

- d)** Zum Tüfteln:  
Überlege, wie Du aus Pappe möglichst einfach einen Fußball bauen kannst.  
Wie kannst Du dazu das Sechseck-Rosetten-Papier benutzen?



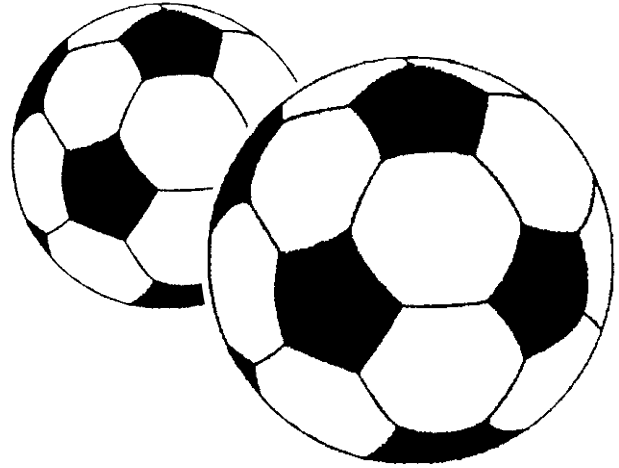




## Der Ball ist gar nicht rund!!

Du brauchst:

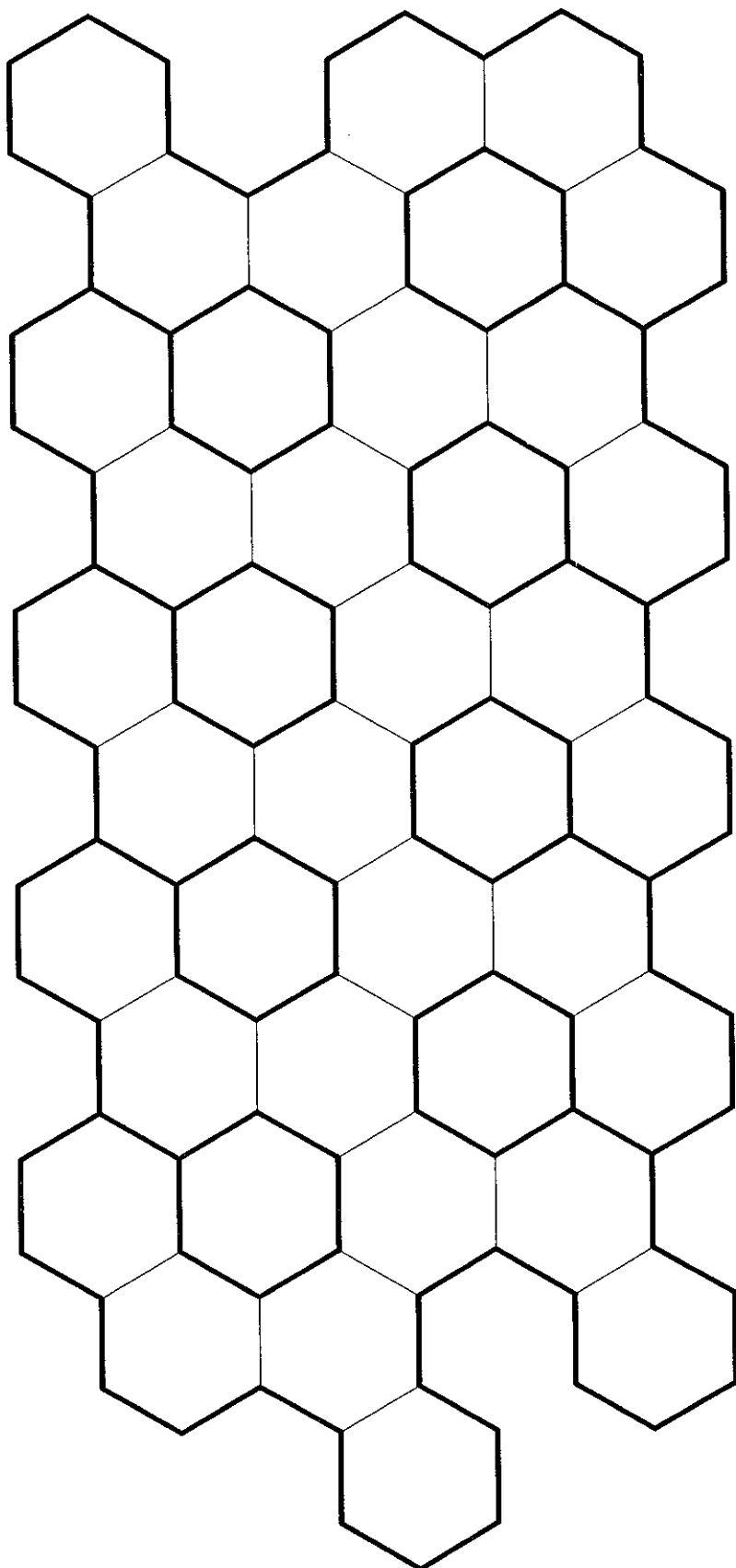
- einen Fußball
- Klickies oder Polydrons
- Schere und Kleber
- Stift und Heft bzw. Forschungsheft



1. Schau Dir den Fußball genau an:  
Aus welchen Flächen ist er zusammengesetzt?  
Schreibe dies genau auf.
2. Baue einen Fußball mit Klickies nach!
3. Wieso wird der Fußball nicht nur aus Sechsecken gebaut?  
Schreibe die Begründung so auf, dass Deine Mitschüler sie verstehen können.
4. Könnte man auch nur aus Fünfecken so etwas wie einen Fußball bauen?  
Probier es aus! Was hältst Du von diesem „Fußball“?
5. Könnte man auch aus Dreiecken und Vierecken so etwas ähnliches wie einen Fußball bauen?  
Probier es aus!  
Baue dabei möglichst regelmäßig und beschreibe genau Dein Bauprinzip.
6. Was ist das Problem mit diesem „Fußball“?
7. Hole Dir einen Bastelbogen und baue daraus einen Fußball.



## Fußball-Bastelbogen



Schneide die Figur entlang der dicken Linien aus und falte sie entlang der dünnen Linien.

Wieso ergibt sich so ein Fußball, wo kommen die Fünfecke her?

Quelle: A Beutelspacher (1996). „In Mathe war ich immer schlecht ...“, Vieweg, Braunschweig, S. 73

Am besten auf farbige Pappe kopieren!

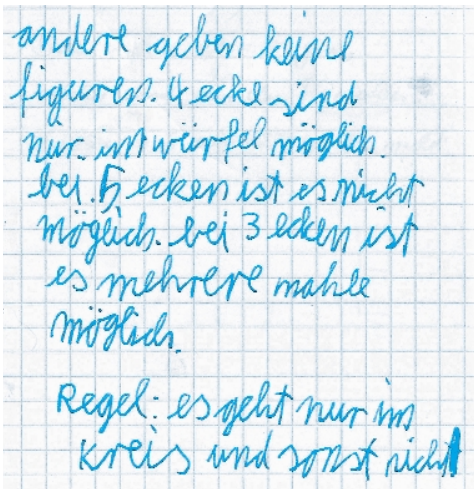


Abb. 6: Maxs Begründung, wieso es nur fünf platonische Körper gibt

Dreiecke an einer Ecke) und einen mit 20 Dreiecken (je fünf). Mehr kann es nicht geben, denn „es geht nur im Kreis, sonst nicht“. Ebenso überlegt er für Vier- und Fünfecke: „Andere geben keine Figuren.“, denn sonst haben die Figuren Dellen (wie Max an einer nicht konvexen Figur mit je vier Fünfecken an jeder Ecke zeigt). Hier zeigt sich, dass dieses Thema Herausforderungen auf jeder Ebene bietet. Überlegungen zu den Eckenkonstellationen dagegen können alle Kinder der Klasse anstellen: Wieso spielen wir nicht mit einem Würfel Fußball? Was ist das Problem, wenn die Körper „zu eckig“ sind? Und wieso wird ein Körper mit jeweils fünf Dreiecken an jeder Ecke (also der Ikosaeder) „weniger eckig“ als einer mit jeweils vier Dreiecken (der Oktaeder) oder der Tetraeder? Auch hier sind die Erfahrungen mit konkretem Material eine wichtige Basis, um Überlegungen zu den Innenwinkelsummen zu explizieren.

**Fazit**

Insgesamt hat sich der Fußball wieder einmal als toller Anlass für handlungsorientiertes und gleichzeitig potentiell anspruchsvolles Arbeiten herausgestellt (ähnlich für Klasse 8 bei Gerecke 1984). Die Vielzahl möglicher Untersuchungsfragen und Herangehensweisen an ihre Beantwortung ermöglicht eine breite Differenzierung, die zumindest die hier beschriebene Klasse in eindrucksvoller Weise ausgeschöpft hat. Mit zwei Doppelstunden inklusive abschließendem Stuhlkreis zur zusammenfassenden Reflexion hat man so einen Ex-

kurs gemacht, der wunderbar zur Weltmeisterschaft passt und gleichzeitig viele zentrale mathematische Tätigkeiten anregt: Modellieren, Konstruieren, Analysieren, Strukturieren, Systematisieren, Vermutungen aufstellen und Begründen, und vieles mehr.

Wer die Ergebnisse noch konsequenter sichern will, könnte z. B. eine Plakatausstellung „Untersuchungen zum Fußball“ anschließen, in der jede Zweiergruppe ihre interessantesten Entdeckungen um den Fußball darstellt.

**Viele weitere Fragen**

Erschöpfend haben wir den Fußball natürlich noch nicht untersucht. Viele weitere spannende Fragen können gestellt werden, insbesondere in älteren Klassen. Einige Beispiele:

- Wie sehen andere (archimedische) Körper aus, die sich aus nur zwei regelmäßigen Seitenflächen bauen lassen? Wie viele davon gibt es eigentlich?
- Welche der anderen archimedischen Körper könnte man auch mit Papp-Loch-Konstruktionen bauen?
- Gibt es Gesetzmäßigkeiten über die Anzahl der Ecken, Flächen Kanten? (Böttinger 2004 zeigt schon für Grundschulkindern einen Weg zum dahinterliegenden Eulerschen Polyedersatz.)
- Wussten Sie dass man eine noch bessere Belegung der Kugeloberfläche mit Fünf- und Sechsecken erhalten würde durch 12 Fünfecke und 60 unregelmäßige Sechsecke (Kämmerling/Jansen 1993)?
- Haben Sie von der Entdeckung des Nobelpreisträgers der organischen Chemie gehört, dass auch Kohlenstoff in Fußball-Struktur auftaucht, nämlich bei den sogenannten C60-Fulleren? (s. u. den Internet-Link)
- Und haben Sie – zu guter Letzt – auch schon bemerkt, dass die FIFA für die WM 2006 einen Ball mit ganz anderer Geometrie entwickelt hat (vgl. Abb. 7), der sich der Modellierung durch archimedische Körper entzieht? Für den Mathematikunterricht ein echter Verlust ...

Hassan, ein Fußballliebhaber aus der beschriebenen Klasse 6, der der Mathematik eher fern steht, sagte am Ende der Sequenz über den klassischen Fußball jedenfalls fasziniert: „Wenn ich das ge-



Abb. 7: Der offizielle WM-Fußball ist leider kein archimedischer Körper mehr! (Foto: Adidas)

wusst hätte, dass da so viel Mathematik im Fußball ist ...“

**Anmerkungen:**

Die Namen der Kinder sind selbstverständlich alle verändert. Für *Klickies* und *Polydrons* gibt es unterschiedliche kommerzielle Anbieter, u. a. den Online-Shop des Mathematikums, Gießen. Alle Arbeitsblätter finden sich auch in den Online-Ergänzungen der Zeitschrift.

**Literatur:**

Beutelspacher, Albrecht (1996): „In Mathematik war ich immer schlecht ...“, Vieweg, Braunschweig.  
 Böttinger, Claudia (2004): Fußball – ein Thema mit Ecken und Kanten, in: Praxis Grundschule 27(2), S. 28-30.  
 Dankwerts, Rainer / Vogel, Dankwart (1985): Abzählen rund um den Fußball, in: PM 27(3), S. 151-152.  
 Gerecke, W. (1984): Fußball-Geometrie. Unterrichtsbeispiel aus dem 8. Schuljahr, in: Mathematik lehren 4, S. 58-61.  
 Kämmerling, H / Jansen, P. (1993): Fußball, Euroball und andere Polyeder, Bericht, Jülich.

Link zu Fulleren: <http://www.uni-protokolle.de/nachrichten/id/41909/>

---

Prof. Dr. Susanne Prediger,  
 Universität Bremen /  
 Gesamtschule Mitte Bremen,  
 prediger@math.uni-bremen.de

Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher,  
 Universität Gießen,  
 albrecht.beutelspacher@math.uni-giessen.de

---