Mit der Vielfalt rechnen – Aufgaben, Methoden und Strukturen für den Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht

Susanne Prediger

Erscheint in: Hußmann, Stephan / Liegmann, Anke / Nyssen, Elke / Racherbäumer, Kathrin / Walzebug, Conny (Hrsg.): Indive - Individualisieren, Differenzieren, Vernetzen, Franzbecker, Hildesheim 20008, S. 129-139.

Zusammenfassung: Für Differenzierung gibt es keinen allumfassenden isolierten Königsweg. Ebenso vielfältig wie unsere Lerngruppen sollten die Strategien sein, mit der Heterogenität der Lernenden umzugehen. Im Beitrag werden verschiedene Strategien für unterschiedliche Lernsituationen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I vorgestellt.

Mit der Vielfalt der Lernenden muss im Unterricht in vielerlei Hinsicht gerechnet werden: Schülerinnen und Schüler unterscheiden sich nicht nur hinsichtlich ihrer Kompetenzen und Kenntnisse, sondern auch im Arbeitstempo, Vorerfahrungen, Persönlichkeiten, Motivation, Arbeitshaltungen u.v.m. Einen konstruktiven Umgang mit dieser Heterogenität der Lernenden im Unterricht zu finden bedeutet daher, Unterricht realistisch an die vorfindbaren Bedingungen anzupassen und dazu insbesondere das *Lernen im Gleichschritt aufzulösen* (vgl. Hußmann/Prediger 2007, vgl. auch Ahlring 2002).

Für die konkrete Ausgestaltung dieser Auflösung des Lernens im Gleichschritt gibt es *keine einzelne allumfassende Differenzierungsstrategie*, mit der alles erledigt ist, denn jede einzelne Differenzierungsstrategie hat ihre spezifischen Stärken und Grenzen (Paradies/Linser 2001).

Dies beginnt bereits bei den zwei grundlegend unterschiedlichen Herangehensweisen an Differenzierung (vgl. Heymann 1991, auch Hußmann in diesem Band): Während *geschlossene Differenzierung* (etwa durch feste Zuteilung von Aufgaben durch die Lehrkraft) den Vorteil der klaren Erwartungshorizonte, aber auch die Schwierigkeit der Diagnosesicherheit und des hohen Arbeitsaufwandes für die Lehrkraft mit sich bringt, sind *selbstdifferenzierende* Ansätze zwar arbeitsökonomischer und ermöglichen auch qualitativ unterschiedliche Zugänge (s.u.); gleichwohl fällt es schwer, einen verbindlichen (Mindest-)Anforderungshorizont ausschließlich über selbstdifferenzierende Aufgaben zu erreichen, da nicht alle Lernenden automatisch auf ihrem Niveau arbeiten und somit ihr Potential ideal ausschöpfen.

Da *eine* Differenzierungsstrategie *allein* also nicht alle Forderungen erfüllen kann, wird eine Vielfalt an *Aufgaben*, *Methoden und Strukturen* benötigt, die je nach Rahmenbedingungen und spezifischer Lernsituation eingesetzt werden können. Im Workshop wurden für *zentrale Lernsituationen* Beispiele von Materialien, Methoden und unterrichtlichen Strukturen vorgestellt bzw. erlebbar gemacht, um dies zu erreichen. Ausführlicher erläutert werden sie in den Artikeln Prediger (2007) und Hußmann/Prediger (2007), viele Ideen stammen aus dem in Prediger u.a. (2006) beschriebenen Projekt zum Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht.

Aufgaben für Differenzierung

Aufgaben sind die didaktisch kleinste Einheit auf der Materialebene, mit der die Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler angeregt werden. Deswegen gehören zu Recht Wahlaufgaben oder im Niveau gestufte Aufgabenfelder zu den Standard-Differenzierungsstrategien vieler Lehrkräfte.

Für eine geschlossene Differenzierung durch Aufgaben hat es sich als wichtig herausgestellt, die Aufgaben nicht nur hinsichtlich der technischen Kompliziertheit auszuschöpfen (also z. B. durch größere Zahlen oder kompliziertere Terme o.ä.), sondern durch alle zur Verfügung stehenden schwierigkeitsgenerierenden Merkmale (vgl. Abb. 1). Aufgaben hinsichtlich der verschiedenen schwierigkeitsgenerierenden Merkmale systematisch zu variieren, ist eine interessante Übungsaufgabe für (erfahrene und angehende) Lehrkräfte, um aufgabenanalytische Sensibilität zu gewinnen. Starten Sie einfach mit einer beliebigen Schulbuchaufgabe und versuchen Sie mal, sie hinsichtlich jedes Merkmals leichter oder schwerer zu machen!

Für die Unterrichtspraxis sind neben solchen durch die Lehrkraft differenzierten

Dimensionen der (geschlossenen) Differenzierung von Aufgaben:
Schwierigkeitsgenerierende Merkmale

- *Art der kognitiven Aktivitäten*
  z.B. Explorieren, Muster und Zusammenhänge entdecken, formulieren, verallgemeinern, begründen, argumentieren
- *technische Kompliziertheit der Ausführung des Lösungsplanes:*
  Wie groß und technisch kompliziert ist der Rechenaufwand? (z.B. Größe der Nenner)
- *Komplexitätsgrad:*
  Wie übersichtlich ist die Situation und wie vielschrittig der Lösungsweg?
- *Sprachliche Komplexität der Aufgabenstellung:*
  Welche Hürden im Textverständnis müssen überwunden werden?
- *Grad der Formalisierung der Aufgabenstellung + geforderten Lösung:*
  Erfordert die Aufgabe formale Schreibweisen? Wie vertraut sind die?
- *Vorstrukturiertheit der Lösung <-> Offenheit*
  Inwieweit ist durch die Enge der Aufgabenstellung bereits alle Vorstrukturierungsarbeit geleistet?
- *Bekanntheitsgrad der Mittel*
  abhängig von Positionierung im Lernprozess
- ....

Abb. 1: Schwierigkeitsgenerierende Merkmale ausschöpfen!

Aufgaben auch selbstdifferenzierende Aufgaben für eine offene Differenzierung instruktiv, denn sie ermöglichen, dass Lernende an demselben Thema, aber jeweils auf ihrem Niveau arbeiten. Gerade für *Lernsituationen des Einstiegs* ist dies entscheidend, weil jedes Kind an seine eigenen Vorkenntnisse und Vorerfahrungen anknüpfen können sollte. Dazu sind beziehungshaltige, aber leicht zugängliche Erkundungsaufgaben wichtig.

Beispiel Lernumgebung Wasserstand

Einen beziehungshaltigen Einstieg in das Thema funktionale Abhängigkeiten liefert zum Beispiel das Mathbuch mit dem Zugang, Wasserstände in Glaszylindern in Abhängigkeit von der eingefüllten Wassermenge zu messen und die Abhängigkeit graphisch zu erfassen (Affolter 2005). Selbstdifferenzierend ist der Einstieg durch unterschiedlich komplexe Formen von Glaszylindern und die Möglichkeit, unterschiedlich schnell vom messenden Erfassen zur rein theoretischen Lösung über zu gehen.

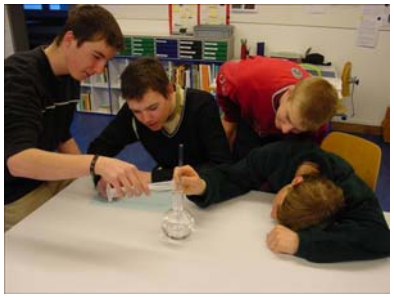
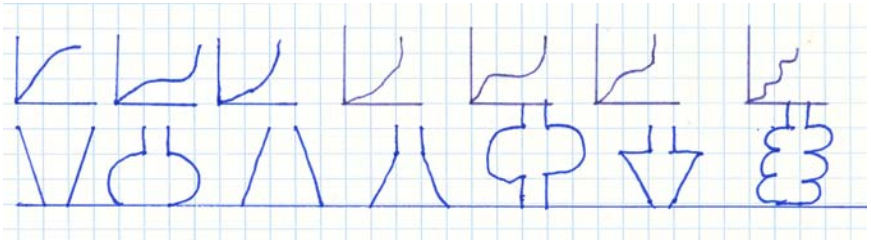


Abb. 2 und 3: Wie verändert sich der Wasserstand? Experimenteller Einstieg



Beispiel Cubus-Spiel

Hußmann (2003) schlägt ein herausforderndes Spiel vor, das sich als selbstdifferenzierender Einstieg in die Stochastik sowohl in Klasse 6 als auch in Klasse 13 nutzen lässt. Bei der Suche nach geeigneten Strategien können Lernende unterschiedliche Wahrscheinlichkeitskonzepte entwickeln.

Abb. 4:Cubus-Spiel

Methoden

Die Auflösung des Lernens im Gleichschritt kann nur gelingen, wenn die Lernenden zunehmend Eigenverantwortung für ihr Lernen übernehmen (vgl. Prediger u.a. 2006). Dazu haben sich unterschiedliche Methoden bewährt, die die Eigenaktivität der Lernenden auf jeweils andere Weise unterstützen. Im Workshop wurden dazu einige Beispiele vorgestellt oder erlebbar gemacht (zur Erläuterung vgl. z. B. Gugel 1998):

- Stationenlernen (mit handlungsorientierten differenzierenden Erkundungen)
- Kartenabfragen (zur Erhebung individueller Vorkenntnisse)
- Arbeitsplan (als Strategie längerfristiger Individualisierung)
- langfristige Hausarbeit (als Strategie längerfristiger Individualisierung)
- Strategiekonferenzen (als Methode, um auch bei Auflösung des gleichschrittigen Arbeitstempos die Kommunikation unter den Lernenden anzuregen, vgl. Hußmann/Prediger 2007)

Viele weitere instruktive Methoden wurden durch die am Workshop teilnehmenden Lehrkräfte gleich zu Beginn in einer Kartenabfrage genannt, z. B.

- Helfersysteme (in dem die Stärkeren institutionalisiert in die Rolle der Helfer gesetzt werden)
- Lerntempoduett (als Methode, um den Austausch unter etwa gleich schnellen Lernenden in individualisierten Phasen zu organisieren)
- Lerntagebücher (als Möglichkeit für stark individualisiertes Arbeiten)

Ausführlicher beschrieben werden kann hier exemplarisch nur eine Methode, und zwar das im Rahmen eines Schulbegleitforschungsprojekts an der Bremer Gesamtschule Mitte (Prediger u.a. 2006) ausgearbeitete Beispiel einer *selbstdifferenzierenden langfristigen Hausaufgabe* in Klasse 6 zum Thema „Mein Traumzimmer“, bei dem Fähigkeiten zur Flächenberechnung in einem sinnstiftenden Kontext angewandt und vertieft werden können. Lernende sollen dabei ihr Traumzimmer samt Einrichtung entwerfen, Grundrisszeichnungen anfertigen und den Renovierungsbedarf für Wände, Decken, Fuß- und Zierleisten berechnen (vgl. Arbeitsblatt in Anhang 1).

Die Kinder nutzen den kreativen Spielraum auf ganz unterschiedliche Weise zur offenen Differenzierung: Sonja baut ihr Zimmer nach, denn „Das ist halt eh das schönste!“, Theo dagegen entwickelt einen 100 m² Raum mit drei Computerspielecken, Schwimmbad und umlaufender Terrasse. Sie bearbeiten den Auftrag mit unterschiedlichen Kompliziertheitsgraden: Es gibt rechteckige und verwinkelte Zimmer, Maja (Abb. 4) arbeitet möglichst nur mit ganzzahligen Maßen, Max schreckt auch vor zwei Nachkommastellen nicht zurück. Auch dokumen-

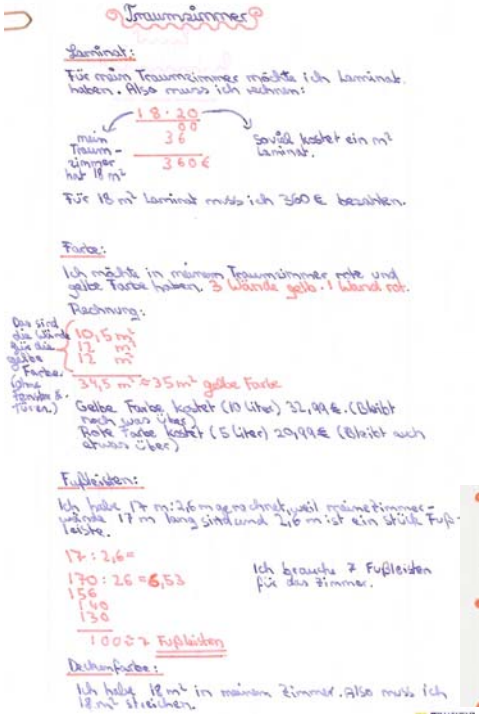
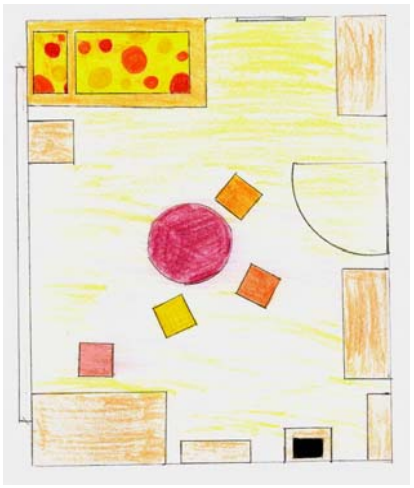


Abb. 5: Maja erklärt ihre Berechnungen



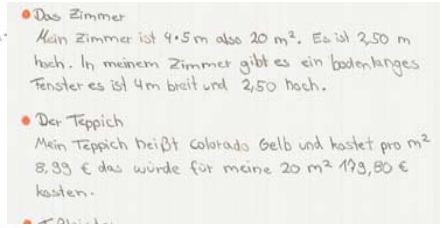


Abb. 6: Tinas Entwurf und Rechnung

tieren sie in unterschiedlicher Ausführlichkeit: Maja erklärt ihre Rechnungen genau, während Tina (Abb. 6) nur ihre Ergebnisse in Sätze kleidet.

Differenziert wird in dieser Arbeit nicht nur nach Tempo, Arbeitsumfang, Kompliziertheit und Komplexität, sondern gerade auch durch die Möglichkeit, andere Kompetenzen (wie die des Zeichnens) und eigene gestalterische Ideen einzubringen.

Strukturen

Gerade in eigenverantwortlichen Lernsituationen wie denen des Traumzimmers brauchen Lernende unterschiedliche Unterstützung für die Erfüllung der inhaltlichen, formalen und zeitlichen Vorgaben. Die Schaffung von Freiräumen für eigenverantwortliches Lernen allein bietet noch keine Gewähr dafür, dass Lernende die übertragene Eigenverantwortung auch *zuverlässig übernehmen können*. Deswegen müssen im Unterricht stets Orientierung gebende Strukturen etabliert werden.

Klare Strukturen geben Orientierung

Eigenverantwortlich Lernende brauchen klare Strukturen und Transparenz über

- angestrebte Lernziele: Was kann ich in dieser Einheit lernen?
  → *z.B. durch Checkliste mit explizierten Lernzielen*
- erwartetes Arbeitsergebnis: Was muss ich dazu erstellen / zeigen?
  → *z.B. durch Checks oder definiertes Endprodukt*
- Arbeitsprozess: Was muss ich wann tun, um dorthin zu gelangen?
  → *klare längerfristige Arbeitsanweisungen mit festen Zwischenstationen z.B. auf Arbeitsplan*
- verfügbare Arbeitsmittel: Wo finde ich das, was ich zum Arbeiten brauche?
  → *gut zugängliche Materialien (Bücher, Arbeitsblätter, Nachschlagewerke, Plakatpapier, Lösungen zur Selbstkontrolle etc.)*
- Rückmeldung: Was kann ich schon, was noch nicht?
  → *z.B. durch Lernberichte, verbale Rückmeldungen über Arbeitsprozess und -ergebnis*

Abb. 7: Übersicht über Orientierung gebende Strukturen (aus Prediger 2007)

Beispiel Terminstrukturen

So werden in der dreiwöchigen Einheit zum Traumzimmer zwei Termine zum Vorzeigen von Zwischenprodukten angesetzt. Wer (wie die meisten Sechstklässler) die lange Arbeitsphase noch nicht selbstverantwortlich einteilen kann, bekommt so einen strukturellen Halt, andere verschaffen sich dabei inhaltliche Sicherheit oder suchen Hilfe im definitiven Verständnis des Arbeitsauftrags.

Beispiel Checklisten

Über den Umgang mit Zeiteinteilung hinaus brauchen Lernende auch in anderen Bereichen klare Strukturen und Transparenz (vgl. Abb. 7), vor allem über die angestrebten Lernziele. Dazu haben sich Checks und Checklisten als Elemente der Selbstdiagnose und Strukturierung der eigenständigen Arbeit (vgl. Anlage 2 und Fernholz/Prediger 2007) bewährt. In Checklisten werden die zu erwerbenden Kompetenzen explizit niedergeschrieben, damit Lehrkräfte und Lernende sich etwa in *Lernsituationen des Trainierens* nicht nur am „Abarbeiten von Aufgaben“ orientieren müssen, sondern tatsächlich an den *Zielen* der Lernprozesse. Schülerinnen und Schüler können durch die Auseinandersetzung mit der Checkliste eine explizitere Bewusstheit dafür erlangen, was sie eigentlich in der Einheit lernen sollen und überprüfen, ob sie die Anforderungen bereits erfüllen oder noch weiteren Übungsbedarf haben. Die nicht immer einfache Selbsteinschätzung kann durch die Konkretisierung in kleinen Selbstdiagnosetests unterstützt werden, sogenannten Checks.

Checklisten und Checks als Strukturelemente eines individualisierten Unterrichts sind gerade auch beim Arbeiten mit Aufgabenpools und Wahlaufgaben wichtig. Denn der Arbeitsauftrag „Bearbeite so viele Aufgaben wie du brauchst, um sicher Dezimalzahlen der Größe nach ordnen zu können.“, ist ohne eine solche Orientierungshilfe für einige Lernende nur schwer erfüllbar. Anna z.B. rechnet zur Sicherheit alle angebotenen Aufgaben, obwohl sie sie längst beherrscht, Niklas dagegen springt immer sehr schnell zum Check und sieht erst dort, dass er sich intensiver mit den Aufgaben beschäftigen müsste. Gerade für Niklas sind schnelle Rückmeldungen wichtig, Anna dagegen wird von der Lehrkraft rechtzeitig zum Check geschickt.

Die Mischung macht’s

Mit einer Differenzierungsstrategie allein wird man der Komplexität des Unterrichts nicht gerecht, ich plädiere daher für eine jeweils neu zu bestimmende Mischung unterschiedlicher Strategien. Geeignete Aufgaben sind die wichtige Basis, die aber durch aktivierende und kommunikationsfördernde Methoden ergänzt werden sollten. Je mehr Individualisierung der Unterricht anstrebt, desto wichtiger werden dann auch Orientierung gebende Unterrichtstrukturen (Prediger 2007).

Literatur

Affolter, W. (2005). Vom Experiment zur Interpretation von Graphen. Ein Unterrichtsbeispiel zum aktiv-entdeckenden Lernen in der Sekundarstufe I. In: PM 47(2), 8-12.

Ahlring, I. (2002). Vielfalt als Chance. In: dies. (Hrsg.). Differenzieren und individualisieren, Praxis Schule 5-10 Extra, Braunschweig: Westermann, 8-12.

Fernholz, J. / Prediger, S. (2007). „… weil meist nur ich weiß, was ich kann!“ Selbstdiagnose als Beitrag zum eigenverantwortlichen Lernen. In: PM 49(15), S. 14.18.

Gugel, G. (1998). Methoden-Manual II: "Neues Lernen". Tausend Praxisvorschläge für Schule und Lehrerbildung, Beltz, Weinheim und Basel.

Heymann, H. W. (1991). Innere Differenzierung im Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren 49, 63-66.

Hußmann, S. (2003). Mathematik entdecken und erforschen - Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II, Cornelsen: Berlin.

Hußmann, S. / Prediger, S. (2007) (Hrsg.). Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren. Praxis der Mathematik in der Schule 49(17).

Paradies, L. / Linser, H. J. (2001). Differenzieren im Unterricht, Berlin: Cornelsen Scriptor.

Prediger, S. (2007): Die Mischung macht’s… Unterrichtsstrukturen für individualisiertes Lernen, erscheint in Praxis der Mathematik in der Schule 49(17).

Prediger, S. / Bialek, S. / Fernholz, J. / Heckmann, L. / Kraatz-Röper, A. / Vernay, R. (2006). Eigenverantwortliches Lernen auf vielfältigen Wegen - Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht, Endbericht des Schulbegleitforschungsprojekts 165, Bremen: Landesinstitut für Schule.

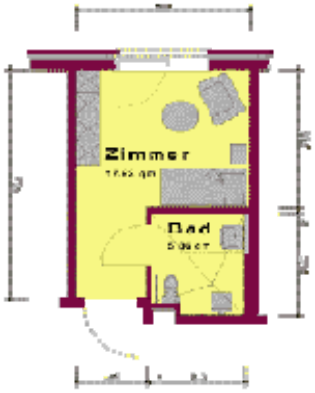
Anhang 1

Facharbeit „Mein Traumzimmer“

Für diese Hausaufgabe hast du länger Zeit als sonst. Du sollst sie aber auch besonders ordentlich und rechnerisch nachvollziehbar gestalten, und sie gilt als Ersatz für eine Klassenarbeit.

Bei dieser Hausaufgabe sollst du dir überlegen, wie das Zimmer aussähe, in dem du dich am wohlsten fühlen würdest: Dein Traumzimmer! Der Fantasie sind keine Grenzen gesetzt. Es soll nur ein Zimmer in einem Haus, mit Fußboden, Wänden und Decke sein.

Dein Zimmer sollst Du zeichnen, es einrichten und kannst es farbig anmalen. Du kannst es auch basteln, mit Wänden und allem, was dazu gehört. Die Rechnungen notierst du auf einem karierten Papier, ebenso ordentlich wie deine Zeichnung.



1.) Zeichne dein Traumzimmer mit Bleistift und Geodreieck oder Lineal auf ein weißes Blatt Papier! Wähle dazu einen geeigneten Maßstab.
Trage auf dem Grundriss die Längenangaben in Metern ein.
Gestalte und richte es ein, wie du möchtest.

2.) Überlege Dir, welchen Bodenbelag (Teppich, Teppichfliesen, Laminat, Fliesen,...) du in deinem Zimmer verlegen möchtest.

   a) Berechne, wie viel du von dem jeweiligen Belag brauchst.

   b) Erkundige dich in einem Geschäft oder Prospekt nach dem m²-Preis für den Belag. Wenn möglich, klebe einen entsprechenden Prospektausschnitt zu deiner Rechnung.
   Berechne nun, was du für deinen Bodenbelag insgesamt bezahlen müsstest.

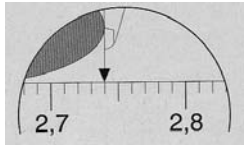
3.) Bringe in deinem Zimmer auch Zierleisten an der Decke und Fußleisten an.
Wieviel Meter wirst du jeweils brauchen?

4.) Üblicher Weise werden die Zimmerdecken mit Farbe gestrichen. Berechne, für wieviel Quadratmeter du Farbe einkaufen musst. Erkundige dich auch hier nach den Preisen im Handel und füge einen Prospektausschnitt bei. Berechne die Kosten für die gesamte Farbe.

5.) Welche Farbe oder Tapete sollen die Zimmerwände bekommen? Und was kostet die pro m²? Bevor du berechnest, wieviel Farbe oder Tapete du kaufen musst und was dich das kosten wird, überleg dir, wie du rechnen musst! (Vorsicht, werden Fenster und Türen auch angestrichen oder tapeziert?)

(Erstellt von Rüdiger Vernay)

Anhang 2a



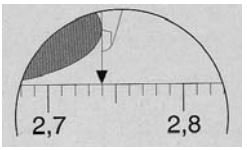
Checkliste Dezimalzahlen

Name:

	Da bin ich mir sicher. Das hat schon gut geklappt.	Da bin ich unsicher. Das werde ich weiter üben.	Das kann ich nicht. Hier brauche ich Hilfe.	Mit diesen Aufgaben (im Arbeitsheft) kannst Du üben:
Ich kann eine ganze Elle zum Messen in kleinere Abschnitte unterteilen – in Halbe, Viertel und Achtel und auch in Zehntel und Hundertstel.	☐	☐	☐	Schneide vom DIN A4-Blatt einen Streifen ab und unterteile ihn in Achtel / Zehntel / Hundertstel.
Ich kann Dinge nennen, die so lang / dick/ hoch sind wie 1m; 0,1 m; 0,01 m; 0,001 m.	☐	☐	☐	Miss fünf kleine Dinge aus und schreibe die Längen in cm auf.
Ich kann Dezimalzahlen beim Lesen richtig aussprechen.	☐	☐	☐	in der Tischgruppe Dezimalzahlen vorlesen
Ich kann bei einer Dezimalzahl sagen, an welcher Stelle nach dem Komma die Zehntel, die Hundertstel, die Tausendstel usw. stehen.	☐	☐	☐	Nr. 21, ,41,43, 24 Spiel NIM (mit Taschen-rechner)
Ich kann eine Angabe wie z.B. 8 Einer, 3 Hundertstel als Dezimalzahl schreiben.	☐	☐	☐	Nr. 36, 40, 42, Karteikarten vorn
Ich kann Dezimalzahlen auf Skalen ablesen, auch wenn sie keine Zehntelunterteilung haben.	☐	☐	☐	• Nr. 27 • Karteikarten vorn
Ich kann Zahlen am Zahlenstrahl eintragen.	☐	☐	☐	Karteikarten vorn
Ich kann Fehler bei Eintragungen am Zahlen-strahl erkennen und den Fehler erklären und berichtigen.	☐	☐	☐	Nr. 23, 25, 27, 31, 34 Nr. 36 bis 30, 32,33 Spiel „1, 2, 3, 4 - Pech“
Ich kann Dezimalzahlen der Größe nach ordnen.	☐	☐	☐	Karteikarten vorn
Ich kann einfache Brüche (z. B. 1/2, 1/5, 2/5 o.ä.) am Zahlenstrahl eintragen.	☐	☐	☐	Nr. 46, 47, 39, 44, 45 Spiel „Komma Poker“
Ich kann Dezimalzahlen addieren und subtrahieren.	☐	☐	☐	Nr. 24,44,45,46,47 Denke dir Aufgaben aus und zeige sie der Lehrerin.
Ich kann mir Aufgaben ausdenken, in denen Dezimalzahlen im Alltag vorkommen.	☐	☐	☐	

Verfasser: Gesamtschule Mitte, hier Regina Puscher, Lars Heckmann und Susanne Prediger

Anhang 2b



Checkliste Dezimalzahlen und Selbstständiges Arbeiten

Name:

	Das kann ich. Das hat meistens gut geklappt.	Das klappt oft, aber nicht immer. Daran werde ich weiter arbeiten.	Da kann ich nicht gut. Ich brauche klare Vorgaben bzw. Kontrolle / Druck.
Ich kann mir meine Arbeit selbstständig einteilen.	☐	☐	☐
Ich kann aus einem Angebot von Aufgaben sinnvoll auswählen.	☐	☐	☐
Ich achte darauf, dass ich die Aufgaben nicht nur abarbeite, sondern meine Lösungen auch richtig sind.	☐	☐	☐
Ich kann meine Lösungen selbstständig kontrollieren und schummle dabei nicht.	☐	☐	☐
Ich hole mir Hilfe, wenn ich nicht mehr weiter weiß.	☐	☐	☐
Ich hole mir erst von der Lehrerin Hilfe, wenn ich es allein versucht habe und auch am Tisch gefragt habe.	☐	☐	☐
Ich kann gezielt Dinge üben, die ich noch nicht kann.	☐	☐	☐
Ich kann anderen bei ihren Fragen helfen und meine Lösungen erklären.	☐	☐	☐
Ich kann anderen bei ihren Erklärungen zuhören und auch nachfragen, wenn ich etwas nicht verstanden habe.	☐	☐	☐

Verfasser: Gesamtschule Mitte, hier Regina Puscher, Lars Heckmann und Susanne Prediger