Artikel erschienen im Journal für Mathematikdidaktik 29 (2008) 3/4 , S. 163-198.
Copyright: Teubner-Verlag / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden

Steffen Hahn & Susanne Prediger

Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis

Zusammenfassung

Die klassische Differentialrechnung mit ihrer Betonung einer automatisierten Kurvendiskussion gilt als Inbegriff des mechanischen Abarbeitens von Schemata ohne inhaltlichen Sinn. Gerade in der Didaktik der Analysis wird daher seit vielen Jahren die Forderung nach konsequenterer Vorstellungsorientierung erhoben. Aus konstruktivistischer Sicht ist sie zu ergänzen um die Forderung, beim Aufbau von (Grund-)Vorstellungen an den individuellen Vorstellungen der Lernenden anzusetzen. Dazu sind empirische Studien zur Erfassung der lernförderlichen Anknüpfungspunkte und lernhinderlichen Vorprägungen ebenso nötig wie die Suche nach Lernarrangements, die geeignete Übergänge schaffen. An zwei Beispielen zu „Bestand und Änderung" werden Ansätze zur Initiierung vertikaler und horizontaler Vorstellungsentwicklung gezeigt, die im Rahmen des Forschungsprogramms der Didaktischen Rekonstruktion ausgearbeitet wurden.

Abstract

Classical higher secondary calculus courses have often been blamed for their focus on procedures without meaning and understanding. From a constructivist perspective, focusing on meaning and conceptions is to be complemented by the demand to start from students' prior conceptions. By discussing two examples, the article introduces approaches for learning arrangements that affiliate horizontal and vertical conceptual change. Both were based on an interview study on grade 10 students' prior conceptions. The theoretical work, the empirical study and the design were conducted within the research program of "Educational Reconstruction".

1 Problemaufriss

An deutschen Gymnasien werden im schriftlichen Abitur nach wie vor gebrochenrationale Funktionen vierter Ordnung nach allen Regeln der Kunst diskutiert: Es werden Ableitungen, Nullstellen, Extrem- und Wendestellen, sowie Asymptoten u.v.m. bestimmt. Alljährlich beweisen deutsche Abiturientinnen und Abiturienten damit hohe technische Fertigkeiten in einem der anspruchsvollsten Gebiete der Schulmathematik, der Differentialrechnung. Gleichzeitig ist allerdings in der didaktischen Literatur vielfach darauf hingewiesen worden, dass den ausgefeilten technischen Fertigkeiten oft kein hinreichendes inhaltliches Verständnis gegenübersteht. So wurde z. B. die in Abb. 1 abgedruckte Aufgabe aus dem internationalen Vergleichstest TIMSS III (Baumert et al. 2000) nur von 35% der befragten deutschen Heranwachsenden mit Bildungsziel Hochschulreife gelöst (der internationale Vergleichswert aller beteiligten OECD-Staaten lag bei 45%).

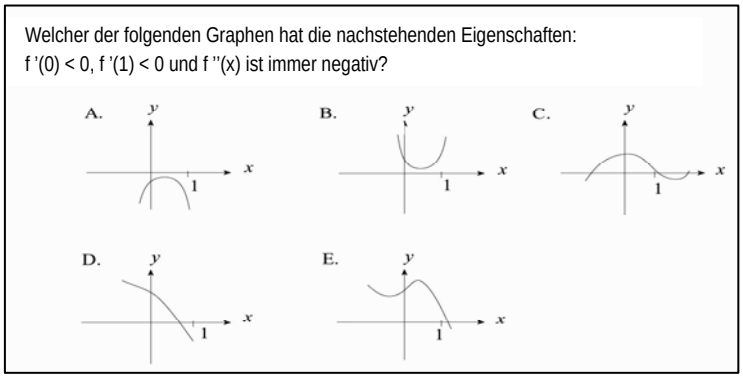


Abb. 1: Aufgabe aus TIMSS III zur Deutung formaler Bedingungen an Funktionsgraphen

Nur ein gutes Drittel der deutschen Oberstufen-Schülerinnen und -Schüler haben demnach ihre Kompetenz zeigen können, grundlegende Aussagen über Ableitungsfunktionen wie f'(1) = 0 geometrisch zu interpretieren und für gegebene Beispielgraphen zu prüfen.

Dass sich diese Schwierigkeiten im inhaltlichen Bereich weit in die gesellschaftlichen Diskurse fortsetzen, zeigt exemplarisch auch der in Abb. 2 abgedruckte Ausschnitt des Zeitungsartikels „Neuverschuldung soll sinken", in dem der Weser-Kurier die Bundeskanzlerin mit dem Satz zitiert „Bei einer Senkung [der Neuverschuldung] würden die Menschen in Form geringerer Zinszahlungen profitieren." Geringer als jetzt, oder nur geringer als bei noch höherem Anstieg? Um zu begreifen, dass der Rückgang der Neuverschuldung noch nicht wirklich zu geringeren Zinsen, sondern nur zu einem langsameren Anstieg derselben führt, muss man unterscheiden können zwischen einer Bestandsfunktion (wie der Schuldenfunktion) und ihrer Änderung (der Neuverschuldung), zwischen einem Hoch- und einem Wendepunkt des Verlaufs der Bestandsfunktion. Wir gehen davon aus, dass die Kanzlerin hier nicht richtig zitiert wird, andernfalls müsste man die promovierte Physikerin, die sich in ihrer Dissertation (Merkel 1986) selbst mit Zerfalls-

Neuverschuldung soll sinken

Regierung will Steuerplus für Sparkurs nutzen / Keine Kurskorrektur bei Reformen

Von unserem Korrespondenten
Dietrich Eickmeier

BERLIN. Die Bundesregierung will die derzeit kräftig sprudelnden Steuerquellen vor allem zum Schuldenabbau nutzen. Es müsse die erste Pflicht sein, die 2006 veranschlagte Neuverschuldung von 38,2 Milliarden Euro zu senken, sagten Kanzlerin Angela Merkel und Vizekanzler Franz Müntefering gestern nach einer Kabinettsklausur in Berlin.

Diese Summe sei eine der höchsten Neuverschuldungen in der Nachkriegsgeschichte, betonte Merkel. Bei einer Senkung würden die Menschen in Form geringerer Zinszahlungen profitieren. Auch Finanzminister Peer Steinbrück erteilte allen Forderungen nach zusätzlichen Ausgaben sowie dem Verzicht auf die geplante Mehrwertsteuererhöhung erneut eine Absage: „Die Situation ist nach wie vor sehr ernst, trotz der erfreulichen Entwicklung." Der Finanzminister begründete den Sparkurs da-

WESER KURIER
BREMER TAGESZEITUNG

Abb. 2: Zeitungsausschnitt vom 30.8.2006

geschwindigkeiten auseinandergesetzt hat, als ein Beispiel für das Phänomen anführen, dass viele Menschen die in der Analysis erworbenen und rechnerisch genutzten Konzepte in ihrem Alltagsdenken selten für inhaltliches Denken aktivieren.

Dreißig Jahre alt ist inzwischen die Einschätzung, dass an diesem Misserfolg mathematischer Bildung die einseitige Ausrichtung des Analysisunterrichts auf den Kalkül einen erheblichen Anteil hat und der Unterricht daher durch stärker verständnisorientierte Zugänge und einen konsequenteren Aufbau inhaltlicher Vorstellungen angereichert werden muss (stellvertretend für viele Blum/Kirsch 1979, Bender 1991, Danckwerts/Vogel 1992, Borneleit et al. 2001, Blum 2000). Ebenso wenig neu ist die aus konstruktivistischen Grundüberlegungen erwachsene Forderung, dass ein solcher Aufbau inhaltlicher Vorstellungen an den Konzepten der Lernenden ansetzen muss (vgl. Duit 1993).

Gleichwohl bedarf ihre durchgängige und schlüssige Umsetzung in schulischen Curricula weiterer Forschungs- und Entwicklungsarbeiten, zu denen wir hier einen Beitrag liefern wollen. Das Themengebiet der Analysis sehen wir dabei als einen wichtigen Beispielbereich für zwei allgemeinere Forschungsfragen (vgl. Prediger 2005):

- Wie gelingt der Aufbau von inhaltlichen Vorstellungen so, dass mathematische Konzepte als Verstärker des Alltagsdenkens einsetzbar werden?
- Wie kann das individuelle Repertoire an vorunterrichtlichen Vorstellungen durch fachliche Vorstellungen erweitert und die Lernenden dazu befähigt werden, sie jeweils situationsadäquat zu aktivieren? (wird in Abschnitt 2.2 entwickelt)

Die hinter diesem Ansatz stehende Grundposition soll im folgenden Abschnitt kurz expliziert werden. Der dritte Abschnitt präsentiert das Forschungsmodell der Didaktischen Rekonstruktion, in dessen Rahmen die Fragestellungen für zwei exemplarische Teilaspekte der Analysis bearbeitet wurden, die in den Abschnitten 4 und 5 erläutert werden.

2 Theoretischer Hintergrund: Mathematik lernen in vertikaler und horizontaler Perspektive

2.1 Was soll in der Differentialrechnung gelernt werden? Normative Hintergründe

Die Auswahl und Fokussierung von Lerninhalten eines Themengebietes erfolgt stets auf der Basis expliziter oder impliziter normativer Hintergründe, die hier nur knapp umrissen werden. Viele programmatische Arbeiten (wie z. B. Borneleit et al. 2001, Danckwerts/Vogel 2006) betonen die Bedeutung authentischer Begegnungen mit Mathematik und beziehen sich dazu auf drei Grunderfahrungen, die Heinrich Winter (1996) mit Anwendungsorientierung, Strukturorientierung und Problemorientierung überschrieben hat (Winter 1996, S. 35). Alle drei sind für Mathematik konstitutiv und sollen in einer „expliziten wechselseitigen Integration“ erlebbar werden (Danckwerts/Vogel 2006, S. 7). Dazu formulieren Danckwerts und Vogel eine zusammenfassende Handlungsaufforderung für die Entwicklung eines in diesem Sinne allgemeinbildenden Analysisunterrichts:

> „Halte Ausschau nach solchen Problemen der ‚Welt', die mit Hilfe der analytischen Grundbegriffe modellierbar sind, sich mit elementarer analytischer Theorie lösen lassen und zugleich Analysis-spezifische heuristische Strategien herausfordern." (Danckwerts/Vogel 2006, S. 12)

Als dazu kohärente Orientierung werden wir in diesem Artikel auf Freudenthals didaktische Phänomenologie zurückgreifen, in der mathematische Begriffe, Strukturen und Ideen als Werkzeuge verstanden werden, die die Phänomene der natürlichen, sozialen und geistigen Welt (inklusive der mathematischen selbst) zu ordnen:

> „Mathematical concepts, structures, and ideas serve to organise phenomena from the concrete world as well as from mathematics […]. By means of geometrical figures like triangle, parallelogram, rhombus, or square, one succeeds in organising the world of contour phenomena; numbers organise the phenomenon of quantity. On a higher level the phenomenon of geometrical figure is organised by geometrical constructions and proofs, the phenomenon 'number' is organised by means of the decimal system. So it goes in mathematics up to the highest levels: continuing abstraction brings similar looking mathematical phenomena under one concept – group field, topological space; deduction, induction, and so on." (Freudenthal 1983, S. 28)

Wir betonen mit dieser Orientierung die Grunderfahrung der Anwendungsorientierung, weil wir hier den größten Nachholbedarf sehen. Gleichzeitig sehen wir Verknüpfungen zwischen dem Verständnis der *mathematischen Begriffe, Strukturen und Ideen als Werkzeuge zur Ordnung von Welt* und Heymanns zentraler Forderung, Mathematik solle als „Verstärker des Alltagsdenkens" dienen (Heymann 1996, S. 206, vgl. dazu insbesondere Lengnink/Peschek 2001).

Für die Differentialrechnung lässt sich diese Forderung z. B. in das spezifische Ziel unsetzen, *Bestand und Änderung, Extrem- und Wendepunkte als mathematische Konzepte zur Erfassung und Beschreibung der charakteristischen Momente von Wachstums- und Veränderungsprozessen zu begreifen und aktivieren zu können*. Das sind nämlich genau die Stellen, an denen sich die Qualität des Wachstums ändert (vgl. Abschnitt 4.4). Es sollte demnach Bestandteil mathematischer Bildung sein, Aussagen wie „Nach dem jahrelangen jährlichen Anstieg der Neuverschuldung des Bundes ist die Neuverschuldung in diesem Jahr erstmalig gesunken" mit Hilfe mathematischer Konzepte in ihrer Bedeutung adäquat erfassen zu können.

Indem im Unterricht Konzepte der Analysis in diesem Sinne zur Bewältigung von Alltagssituationen genutzt und für diesen Zweck auch theoretisch entwickelt werden, soll Mathematik erlebbar werden als „spezifischer Modus des Weltverstehens" (Dressler 2007). Dabei sollen Lernende mit dem mathematischen Modus des Weltverstehens auch im Sinne der von Dressler (2007) beschriebenen Differenzkompetenz vertraut werden:

> „Die wissenschaftlichen, kognitiven und instrumentellen Beobachtungsperspektiven sind damit als *bestimmte* (in bestimmten Zusammenhängen notwendige und erfolgreiche) Möglichkeiten des Weltzugangs ausdrücklich nicht ausgeschlossen, ihnen wird aber das Monopol bestritten. Entscheidend für Bildungsprozesse ist die Möglichkeit des *Perspektivenwechsels* statt eines Perspektivenmonopols." (Dressler 2007, S. 250)

Während Dressler dabei vor allem an Perspektivwechsel zwischen wissenschaftlichen Disziplinen denkt, soll in Abschnitt 2.2.4 und Abschnitt 5 erläutert werden, wie Differenzkompetenz in Bezug auf das Alltagsdenken entwickelt werden kann.

Um diese Bildungsziele zu erreichen, müssen die Lernenden nicht nur zu Kalkülen, sondern auch zum inhaltlichen Denken in der Differentialrechnung befähigt werden - und zwar in quantitativen und qualitativen Zusammenhängen (vgl. Hahn/Prediger 2004).

Insbesondere setzt die Mathematisierung von Aussagen wie der obigen zur sinkenden Neuverschuldung den Aufbau geeigneter Grundvorstellungen voraus. Die Bedeutung von Grundvorstellungen als Vermittler zwischen Mathematik und Realität und als mentale Modelle für mathematische Begriffe (vom Hofe 1995) ist in der Didaktik der Analysis für den Ableitungs- und Integralbegriff immer wieder betont worden. Sie wird hier aufgegriffen und auf Konzepte wie Extrem- und Wendepunkt ausgeweitet (vgl. Abschnitt 4 sowie Hahn/Prediger 2004, Hahn 2008, S. 218).

Abschnitt 5 soll zeigen, wie die Auseinandersetzung mit dem spezifisch mathematischen Modus des Weltverstehens um Reflexionen hinsichtlich seiner Bedeutungen, Spezifität und Grenzen ergänzt werden kann. Dies ist Voraussetzung für die verständige Aktivierung mathematischer Vorstellungen, Begriffe, Ideen und Strategien für Sachzusammenhänge außerhalb des Unterrichts, aber auch Voraussetzung zum Aufbau von Differenzkompetenz.

2.2 Vorstellungsentwicklung in vertikaler und horizontaler Perspektive – Hintergründe aus der Lehr-Lernforschung

2.2.1 Zum Vorstellungsbegriff

Dem Aufbau tragfähiger fachlicher Vorstellungen wurde in der fachdidaktischen Lehr-Lernforschung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer in den letzten Jahren eine große Aufmerksamkeit gewidmet (z. B. Duit 1993, Vosniadou/Verschaffel 2004, Blum et al. 2004 u.v.m.). Dabei wird der Vorstellungsbegriff sehr unterschiedlich benutzt.

In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik wird der Vorstellungsbegriff vor allem im klar begrenzten Sinne des Konstrukts der Grundvorstellungen aktiviert (vgl. vom Hofe 1995, Blum et al. 2004 u.v.a.), also für Interpretationen mathematischer Begriffe, Sätze und Operationen. Das zunächst präskriptive Grundvorstellungskonzept wurde auch in der Didaktik der Analysis für deskriptive Fragen geöffnet, indem neben fachlich tragfähigen Grundvorstellungen auch tatsächlich von Lernenden entwickelte Vorstellungen empirisch untersucht wurden (z. B. vom Hofe 1998, Friedrich 2001 u.v.m.).

In den Naturwissenschaftsdidaktiken und in der internationalen mathematikdidaktischen Literatur spielt die empirische Analyse von individuellen Vorstellungen schon länger eine große Rolle (zur Analysis z. B. Sierpinska 1987). Dabei ist der Gebrauch des Vorstellungsbegriffs sehr viel breiter (vgl. Kaldrimidou/Tzekaki 2006 für einen Überblick zur internationalen Mathematikdidaktik). Wir folgen hier dem Begriffsverständnis von Kattmann/Gropengießer (1996), die unter ‚Vorstellungen' alle kognitiven Konstrukte verstehen, „die Schüler zur Deutung ihrer Erfahrungen anwenden" (Kattmann/Gropengießer 1996, S. 182). Diese Konstrukte finden sich auf unterschiedlichen Komplexitätsebenen, dazu gehören sowohl ‚Begriffe', ‚Konzepte' und ‚Denkfiguren', als auch (lokale) Theorien (Gropengießer 2001, S. 30 ff.). Für die vorliegende Arbeit ist die zentrale Komplexitätsebene die der *Konzepte*. Damit bezeichnen wir mathematische Begriffe mit ihren für sie geltenden Interpretationen, zentralen Gesetzmäßigkeiten und Verwendungszwecken im Sinne eines breiten und pragmatischen Begriffsverständnisses.

2.2.2 (Sozial-)Konstruktivismus als Grundlage

Seit Beginn der 1980er Jahre beschäftigt sich die mathematisch-naturwissenschaftsdidaktische Lehr-Lernforschung mit der Identifikation von Lernschwierigkeiten und ihrer Überwindung, weil viele empirische Studien gezeigt hatten, „dass der naturwissenschaftliche Unterricht es in der Regel nicht leistet, Schülerinnen und Schüler mit seinen Prinzipien und Grundbegriffen vertraut zu machen." (Duit/von Rhöneck 1996, S. 7). Insbesondere zeigte sich, dass ein Aufbau fachlicher Konzepte innerhalb des Unterrichts noch keine Gewähr für ihre Aktivierung in außerschulischen Zusammenhängen bietet. Diese Erfahrungen teilen Naturwissenschafts- und Mathematikdidaktik (in letzterer wird dies seit Lenné 1969 als Transferproblem thematisiert).

In der Erklärung möglicher Ursachen von Lernschwierigkeiten und in den konstruktiven Ansätzen zu ihrer Überwindung nehmen wir in dieser Arbeit eine sozialkonstruktivistische Grundposition ein (z. B. Ernest 1994). Demnach wird der Aufbau tragfähiger fachlicher Vorstellungen als ein Prozess aktiver, individueller Konstruktionen mentaler Strukturen begriffen (z. B. Gerstenmaier/Mandl 1995, Aufschnaiter et al. 1992). Vorstellungsentwicklung kann daher nicht als einfache Wirkungsbeziehung von Instruktion und Lerneffekt verstanden werden (Reinmann-Rothmeier/Mandl 2001, S. 615).

Gleichwohl impliziert eine konstruktivistische Position keinesfalls die völlige Zufälligkeit und Unbeeinflussbarkeit individueller Lernprozesse. Eine Initiierung und Steuerung von konstruktivistisch konzeptualisierten Lernprozessen ist über die Gestaltung geeigneter Lernumgebungen möglich. Die Anforderungen an solche Lernumgebungen formulieren Reinmann-Rothmeier/Mandl so:

> „Wenn Wissen stets eine individuelle Konstruktion und Lernen ein aktiver, konstruktiver Prozess in einem bestimmten Handlungskontext ist, muss die Lernumgebung den Lernenden Situationen anbieten, in denen eigene Konstruktionsleistungen möglich sind und kontextgebunden gelernt werden kann. Wir sprechen daher im Zusammenhang mit der konstruktivistisch geprägten Auffassung auch von situierten Lernumgebungen." (Reinmann-Rothmeier/ Mandl 2001, S. 615)

Dass selbst abstraktes mathematisches Wissen auch situierte Komponenten hat, ist ein wichtiger Erklärungsfaktor für das Transferproblem (Lenné 1969). Es ist in dem mathematikdidaktischen Konstrukt der Grundvorstellungen insofern zentral berücksichtigt, als durch *einen* mathematischen Inhalt *verschiedene* Situationen beschrieben werden können. Sind die Interpretationen strukturell gleich, so spricht man von derselben Grundvorstellung, etwa wenn Wachstums- und Bewegungsvorgänge beide auch durch die Ableitungsfunktion beschrieben werden, denn dann liegt beiden Beschreibungen die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderungsrate zugrunde. Wird die Ableitungsfunktion dagegen zur Lösung eines Tangentenproblems genutzt, so wird eine andere Grundvorstellung aktiviert (vgl. z. B. Blum/Törner 1983, S. 91-94). Zu den meisten mathematischen Inhalten gibt es mehrere wichtige Grundvorstellungen. Somit lässt sich in dieser Hinsicht die Situiertheit des Wissens auch durch die Stoffstrukturen begründen und nicht allein durch Ergebnisse der pädagogischen Psychologie.

Aufgrund der hohen Bedeutung tragfähiger Grundvorstellungen ist es notwendig, für jedes mathematische Wissensgebiet die zentralen Grundvorstellungen und inhaltlichen Deutungen der mathematischen Sätze und Theorieteile zu spezifizieren und bei der Konstruktion geeigneter Lernarrangements zu berücksichtigen; hier kann auf Arbeitsergeb-

nisse der Didaktik der Analysis zurück gegriffen werden (z. B. Blum/Törner 1983, Danckwerts/Vogel 2006).

2.2.3 Bedeutung vorunterrichtlicher Vorstellungen

Über die Gestaltungsmerkmale von Lernumgebungen hinaus hat die naturwissenschaftsdidaktische Lehr-Lernforschung vor allem auf die Bedeutung vorunterrichtlicher Vorstellungen als zentralen Einflussfaktor für Prozesse der Vorstellungsentwicklung hingewiesen. Denn die Hartnäckigkeit vorunterrichtlicher Vorstellungen ist eine empirisch oft nachgewiesene Ursache für einen unvollständigen Aufbau notwendiger fachlicher Vorstellungen:

> „Die vorunterrichtlichen Vorstellungen, die Schülerinnen und Schüler in den Unterricht mitbringen, haben sich [...] als der wichtigste Faktor erwiesen, von dem die Lernprozesse abhängig sind. Diese Vorstellungen bestimmen, wie vom Lehrer oder Lehrbuch dargebotene Inhalte interpretiert und folglich verstanden werden. Häufig stehen die vorunterrichtlichen Vorstellungen und die zu erlernenden Vorstellungen im Gegensatz zueinander. Viele Lernschwierigkeiten, die insgesamt zu einem eher bescheidenen Erfolg des naturwissenschaftlichen Unterrichts führen, finden damit eine Erklärung." (Duit/von Rhöneck 1996, S. 7)

Die Bedeutung vorunterrichtlicher Vorstellungen ist aus konstruktivistischer Sicht insofern gut erklärbar, als die individuelle, aktive Konstruktion mentaler Strukturen stets auf bereits vorhandenen mentalen Strukturen aufsetzt und aus diesen durch Anpassung an neu erlebte Phänomene hervorgeht (Gerstenmaier/Mandl 1995). Auf dieser Basis hat sich der Theorieansatz des Conceptual Change entwickelt (Posner et al. 1982), nach dem Lernen „in aller Regel ‚Umlernen' bedeutet, da vorunterrichtliche Vorstellungen und naturwissenschaftliche Vorstellungen zumindest in wesentlichen Aspekten einander konträr gegenüber stehen." (Duit/von Rhöneck 1996, S. 158).

Während die Bedeutung vorunterrichtlicher, meist *alltagsweltlicher Vorstellungen* für die Naturwissenschaften breit diskutiert wird, ist sie für Mathematik nur in wenigen Gebieten stark betont worden (für die Stochastik vgl. Fischbein 1987, Borovcnik 1992, Prediger 2005). Es scheinen genau diejenigen mathematischen Gebiete zu sein, in denen die mathematisch beschreibbaren Phänomene eine vergleichbare Bedeutung in der Alltagswelt haben wie in den Naturwissenschaften. Dagegen scheinen viele andere mathematische Objekte durch ihre Abstraktheit weniger direkt mit alltagsweltlichen Vorstellungen verbunden zu sein.

Die Bedeutung von *vorunterrichtlichen Vorstellungen aus vorangegangenem Mathematikunterricht* dagegen ist auch für Mathematik breit untersucht; so finden sich z. B. in dem Feld der Zahlbereichserweiterungen einige Untersuchungen zur Bedeutung inhaltlicher Vorstellungen über natürliche Zahlen bei der Vorstellugnsentwicklung von Vorstellungen zu Brüchen und Bruch-Operationen. Hier haben auch Conceptual-Change-Ansätze zur Erklärung von Schwierigkeiten bereits breite Anwendung gefunden (Lehtinen et al. 1997, Vosniadou/Verschaffel 2004, Prediger 2008). Unabhängig von der Lokalisierung des Ursprungs vorunterrichtlicher Vorstellungen im vorangegangenen Unterricht oder in alltagsweltlichen Erfahrungen lautet jeweils die zentrale Forschungsfrage im Conceptual-Change-Ansatz: *Wie gelingt der Übergang von individuellen vorunterrichtlichen Vorstellungen zu fachlich tragfähigen Vorstellungen nachhaltig?*

Zu ihrer Beantwortung für ein spezifisches Themengebiet (wie der Differentialrechnung) hat es sich bewährt, zunächst die vorunterrichtlichen Vorstellungen der Lernenden zu erheben und zu dem sorgfältig spezifizierten Katalog fachlich notwendiger Vorstellungen in Beziehung zu setzen. Aus ihrer Gegenüberstellung können dann konstruktive Leitideen für die Entwicklung einer Lernumgebung erwachsen, die den Übergang zwischen diesen beiden ermöglicht (Dies ist die Grundidee des in Abschnitt 3 vorzustellenden Forschungsmodells der Didaktischen Rekonstruktion).

Gerade für Mathematik sind die Übergänge nicht immer leicht zu finden, weil für einige mathematisch abstraktere Konzepte die vorunterrichtlichen Anknüpfungspunkte nicht auf der Hand liegen und zunächst in einem Prozess der Restrukturierung wieder herausgearbeitet werden müssen (vgl. Lengnink 2003). So ist etwa zu klären, zu welchen Phänomenen, aus denen sich die mathematischen Konzepte der Differentialrechnung entwickeln können, Jugendliche überhaupt vorunterrichtliche Vorstellungen besitzen (vgl. Abschnitt 4).

2.2.4 Vertikale und horizontale Perspektive

Solange der *Übergang* von vorunterrichtlichen Vorstellungen zu fachlich tragfähigen im Vordergrund steht, wird lerntheoretisch eine *vertikale Perspektive* eingenommen, die eine Entwicklung von einer singulären vorunterrichtlichen Basis hin zur regulären Mathematik betont. Die lange Tradition und die zentrale Bedeutung dieser Perspektive drückt sich aus in der Existenz von instruktiven, auf Eigentätigkeit setzenden Stufenmodellen wie dem zur Begriffsentwicklung von Winter (1983) und vielen empirischen Untersuchungen, die solcherart Lernwege nachweisen.

Im Gegensatz zu dem durch das Ziel der Vorstellungs*änderung* implizierten Anspruch, dass die vorunterrichtlichen Vorstellungen eigentlich ‚überwunden' werden sollen, wurde empirisch allerdings oft nachgewiesen, dass die im Fachunterricht erworbenen Vorstellungen in vielen Fällen die zuvor erworbenen Vorstellungen nicht ablösen. Sie bleiben statt dessen oft als *alternative Wissensstrukturen* neben den neuen bestehen und werden jeweils situationsspezifisch aktiviert (vgl. Duit 1993, Prediger 2005).

Dieses Phänomen haben z. B. Petri und Niedderer (2001) herausgearbeitet und durch ihr Modell der kognitiven Schichten theoretisch beschrieben. Sie betonen, dass „Schüler für eine gegebene Problemstellung signifikant unterschiedliche rivalisierende Erklärungsmuster, bzw. Vorstellungen aktivieren können, ohne dass dafür eine wesentliche Variation des Kontextes, bzw. der Situation erforderlich ist" (Petri/Niedderer 2001, S. 53). Das theoretische Konstrukt der kognitiven Schichtenstruktur ermöglicht eine Zuordnung der einzelnen Erklärungsmuster und Vorstellungen zu Schichten, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten in der Lernbiographie entstehen und inhaltlich wie strukturell aufeinander aufbauen können. In explorativen Fallstudien zeigen die Autoren, wie diese Schichten parallel nebeneinander existieren und sich hinsichtlich der relativen Stärke der fachlich intendierten Vorstellungen unterscheiden.

Diese deskriptiven Befunde werden von vielen Conceptual-Change-Vertretern bestätigt (etwa Schnotz 1998, S. 57) und finden eine Entsprechung auf der normativen Ebene: Als Zielsetzung für den Vorstellungsentwicklungsprozess steht in diesen Ansätzen nicht die Ablösung der vorunterrichtlichen Vorstellungen durch reguläre Vorstellungen im Vordergrund, sondern eine Verschiebung der Kontexte, in denen die jeweiligen vorun-

terrichtlichen und fachlichen Vorstellungen aktiviert werden (Duit/von Rhöneck 1996, S. 146).

> „Conceptual change does not imply that initial conceptions are ‚extinguished'. Initial conceptions, especially those that hold explanatory power in non-scientific contexts, may be held currently with new conceptions. Successful students learn to utilize different conceptions in appropriate contexts." (Tyson et al. 1997, S. 402)

In Prediger (2004) wurde diese Sicht als *horizontale Perspektive* beschrieben und durch Rückgriff auf die Theorie interkulturellen Lernens auf weiteren Ebenen ausführlich begründet. Hier soll die horizontale Perspektive auf den Gedanken fokussiert werden, Lernprozesse ausgehend von der *dauerhaften Koexistenz vorunterrichtlicher und fachlicher Vorstellungen* zu konzeptualisieren.

Diese dauerhafte Koexistenz zu akzeptieren, ist nicht nur der realistischere Anspruch, der aus Gründen der leichten Erreichbarkeit formuliert wird. Seine Angemessenheit lässt sich mit dem in Abschnitt 2.1 angedeuteten Bildungsziel der Differenzkompetenz auch bildungstheoretisch begründen, denn es basiert grundlegend auf der Anerkennung der Rolle der verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen, arbeitsteilig unterschiedliche Sichtweisen zur Erklärung und Gestaltung unserer Welt beizutragen. Hier müssen aus unserer Sicht die Verstehensmodi der Wissenschaftsdiziplinen um den Alltagsmodus ergänzt werden.

Die in horizontaler Perspektive formulierte Forschungsfrage in Bezug auf Vorstellungsaufbau lautet daher: Wie kann das individuelle Repertoire an vorunterrichtlichen Vorstellungen durch fachliche Vorstellungen erweitert und die Lernenden dazu befähigt werden, sie jeweils situationsadäquat zu aktivieren?

2.3 Ausblick

Gerade weil mit vertikaler und horizontaler Perspektive leicht verschobene normative Ansprüche verbunden sind, erweisen sich beide Perspektiven als komplementär und für unterschiedliche Bereiche jeweils angemessen aktivierbar. In diesem Artikel soll an zwei Beispielen diese Unterschiedlichkeit gezeigt werden:

- Vertikal: Am Beispiel der noch einzuführenden gegensinnigen Kovariation und ihrer Bedeutung für Extrem- und Wendepunkte soll ein Weg aufgezeigt werden, den vertikalen Ansatz des Conceptual Change konsequent zu verfolgen.
- Horizontal: Änderungen kann man auf verschiedene Weisen messen: Während sich z. B. in wirtschaftlichen Zusammenhängen eine prozentuale Angabe von Änderungen durchgesetzt hat, hat sich in anderen Bereichen eine Angabe der konkreten Änderung pro Zeiteinheit bewährt, die durch den Ableitungsbegriff für die Differentialrechnung ausgebaut wurde. Aufgrund der existierenden konkurrierenden Modelle ist hier eine horizontale Perspektive angemessener, die wir im Abschnitt 5 einnehmen werden.

In beiden Perspektiven spielt die Gegenüberstellung von individuellen vorunterrichtlichen und fachlichen Vorstellungen eine zentrale Rolle, um Lernarrangements konstruieren zu können, die in einem Fall zur Überwindung von Konzepten beitragen, im anderen Fall zur kompetenten, kontextadäquaten Auswahl zwischen Alternativen befähigen. Da-

zu ist eine genaue Erfassung der vorunterrichtlichen Vorstellungen ebenso notwendig wie eine solide Klärung der anzustrebenden fachlichen Vorstellungen.

Im Folgenden soll ein Forschungsmodell vorgestellt werden, das für beide Perspektiven einen instruktiven Rahmen bereitstellt und die verschiedenen Arbeitsbereiche einer solchen didaktische Forschungs- und Entwicklungsarbeit konsequent integriert.

3 Didaktische Rekonstruktion als Forschungsrahmen

3.1 Das Forschungsmodell der Didaktischen Rekonstruktion

Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion ist in den Naturwissenschaftsdidaktiken in Oldenburg und dem IPN in Kiel als theoretischer Rahmen für fachdidaktische Lehr- und Lern-Forschung zu der Frage entwickelt worden, „wie bestimmte Inhaltsbereiche sinnvoll und fruchtbar unterrichtet werden können“ (Kattmann/Gropengießer 1996, S. 182, auch Kattmann et al. 1997). Dabei gilt das besondere Interesse dem Aufbau adäquater fachlicher Vorstellungen.

Das Forschungsmodell basiert auf konstruktivistischen Lerntheorien in vertikaler und horizontaler Perspektive (vgl. Abschnitt 2.2) und versucht, für jeweils spezifische fachliche Inhalte unterschiedlicher Disziplinen Antworten auf die in Abschnitt 2.2 formulierten Forschungsfragen in vertikaler und horizontaler Sicht zu finden.

Das Forschungsmodell beruht auf der lerntheoretisch gestützten Arbeitshypothese, fachdidaktische Forschung und Entwicklung habe sich in diesem Zusammenhang auf das Herstellen von Bezügen zwischen Vorstellungen und Perspektiven der Lernenden einerseits und den fachlichen Perspektiven andererseits zu konzentrieren.

Die Ergebnisse dieser Gegenüberstellung sollen für die Konstruktion eines lernförderlichen Unterrichts genutzt werden. Didaktische Rekonstruktion ist also im Sinne der Fachdidaktik als Design Science (Wittmann 1992) auf die Didaktische Strukturierung von geeigneten Lernarrangements als Ziel ausgerichtet.

Um dabei sowohl der Sache, als auch den Menschen möglichst gerecht zu werden, werden die entsprechenden Entwicklungsarbeiten eng verknüpft mit der empirischen Erfassung von Lernendenperspektiven und der fachlichen Klärung der Inhaltsbereiche (vgl. Abb. 3, mit sprachlicher Adaption übernommen aus Kattmann et al. 1997, S. 4). In dieser Verknüpfung der drei Aufgabenbereiche (Fachliche Klärung, Erfassung von Lernendenperspektiven und Didaktische Strukturierung) liegt die Kernidee des Forschungsansatzes:

> „Mit der Didaktischen Rekonstruktion werden wesentliche Aufgaben fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsarbeiten in ihren wechselseitigen Bezügen, ihren Voraussetzungen und Abhängigkeiten modelliert. Aus fachdidaktischer Perspektive wird der wissenschaftliche Gegenstand in seinen bedeutsamen Bezügen wieder hergestellt, und es wird durch Rückbezug auf die verfügbaren Schülervorstellungen ein Unterrichtsgegenstand konstruiert.“ (Kattmann et al. 1997, S. 4)

Unter *Fachlicher Klärung* wird eine stoffdidaktische Arbeit im breiten Sinne verstanden, also die didaktische Analyse und die stoffliche Konstruktion in ihren weit gefassten Bedeutungsbezügen. Für den Forschungsansatz entscheidend ist die Ausgangsannahme,

dass die Gegenstände des Schulunterrichts nicht per se vom Wissenschaftsbereich vorgegeben sind, sondern erst in pädagogischer Zielsetzung hergestellt werden müssen, insbesondere weil wissenschaftliche Konzepte als Gegenstände des Unterrichts konsequenter in ihre lebensweltlichen Bezüge, ihre Entstehensbedingungen und Sinnzusammenhänge eingebettet werden müssen (Kattmann/Gropengießer 1996, S. 181).

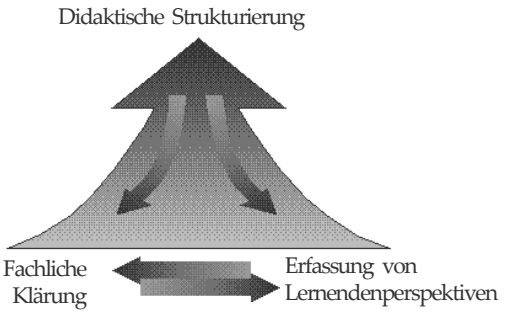


Abb. 3: Verknüpfung dreier Arbeitsgebiete im Forschungsmodell der Didaktischen Rekonstruktion

Die empirische *Erfassung von Lernendenperspektiven* mit ihren ganz unterschied-lichen Facetten ist für das auf konstruktivistischen Lerntheorien basierende Modell ein wichtiger Bereich, um die Voraussetzungen des Lernprozesses adäquat in die Überlegungen zur Didaktischen Strukturierung einbeziehen zu können.

Für die *Didaktische Strukturierung* werden die Ergebnisse der fachlichen Klärung mit denen der Erhebung von Lernendenperspektiven auf folgende Weise verknüpft:

> „Die verallgemeinerten Vorstellungen der Wissenschaftler werden mit denen der Schüler verglichen. Zwischen den Konzepten, Denkfiguren und Theorien beider Seiten werden systematisch und strukturiert Beziehungen hergestellt. Dabei sollen zum einen die Charakteristika beider Perspektiven deutlich werden und zum anderen die lernförderlichen Korrespondenzen und voraussehbaren Lernschwierigkeiten. Auf diese Weise wird die mit dem iterativen Vorgehen implizierte wechselseitige Interpretation zu einem Abschluss gebracht." (Kattmann et al. 1997, S. 12)

So werden die verschiedenen Aspekte fachdidaktischen Arbeitens aufeinander bezogen und Lernarrangements entwickelt, die es im Sinne einer konstruktivistischen Lerntheorie ermöglichen sollen, ausgehend von den Lernendenperspektiven hin zu den mit Hilfe der fachlichen Klärung konstruierten Lerngegenständen zu kommen.

Keine der drei Aufgaben für sich genommen ist neu, für die einzelnen Komponenten gibt es auch in der mathematikdidaktischen Forschungs- und Entwicklungslandschaft bereits viele interessante und wichtige Vorbilder. Gleichwohl kann der Kerngedanke des Forschungsansatzes der Didaktischen Rekonstruktion, diese Vorbilder noch stärker aufeinander zu beziehen, Ergebnisse gegenseitig nutzbar und in einem iterativen Forschungs- und Entwicklungsprozess in einem theoretisch gestützten Gesamtrahmen fruchtbar zu machen eine neue Qualität liefern, wie erste Ergebnisse zur Stochastik bereits gezeigt haben, vgl. Prediger 2005).

3.2 Vorgehensweise im Rahmen dieser Studie

Viele der hier vorgestellten konkreten Ergebnisse sind entstanden im Rahmen des Promotionsprojektes des Autors (Hahn 2008), das sich im Forschungsrahmen der Didaktischen Rekonstruktion mit der Differentialrechnung beschäftigte. Dabei wurde den bereits benannten Forschungsfragen in einem iterativen Prozess nachgegangen, der Analy-

sen in den verschiedenen Arbeitsbereichen umfasst. Eine Interviewstudie sowie eine Forschungsunterrichtsreihe bilden die *empirische* Basis der Untersuchung:

3.2.1 Interviewstudie zur Erfassung von Lernendenperspektiven

Durchgeführt wurden 30 klinische, halbstrukturierte Interviews (ermittelnde Interviews im Sinne Lamneks 2005, S. 346) mit leistungshomogenen Paaren von Lernenden aus 10. Klassen eines Bremer Gymnasiums, d. h. vor systematischer Einführung der Analysis. Eine der drei Interviewaufgaben wird in Abschnitt 4.3 beschrieben. Für die Teilstudie wurden speziellere Forschungsfragen formuliert:

1. Welche individuellen Vorstellungen haben Lernende vom Begriff der Steigung? Welche eigenen Ausdrücke nutzen sie dafür? Inwiefern setzen Lernende die Steigung als Mittel zur Strukturierung ein?
2. Welche Denkhürden, welche Schwierigkeiten treten für die Lernenden bei der Arbeit mit Änderungen auf? Worin könnten Ursachen liegen (z. B. Ebenen- und Aspektwechsel)?
3. Wie werden lokale Extrema und Wendepunkte beschrieben? Werden diese Konzepte von selbst oder durch Impulse entwickelt?

Die videografierten Interviews wurden in einem mehrschrittigen qualitativen Verfahren analysiert. Alle 30 Interviews wurden einer Überblicksanalyse mit einer teils kategoriengeleiteten, teils kategorienentwickelnden Interpretation unterzogen (Beck/Maier 1994). Ein Interview wurde vollständig transkribiert und sequentiell interpretiert. Von sieben weiteren Interviews wurden Episodenpläne angefertigt, Aufschluss versprechende Passagen transkribiert und ebenfalls sequentiell interpretiert. So konnten einerseits in den Detailanalysen exemplarisch sehr detailliert die individuelle Auseinandersetzung von Lernenden mit der mathematischen Beschreibung von Wachstumsvorgängen rekonstruiert und andererseits die individuellen Konzepte in größerer Breite und Verschiedenheit erfasst werden.

Kernstück der inhaltlichen Auswertung der Interviews war die Gegenüberstellung von fachlichen und individuellen Konzepten, die zum einen eine vertiefte Sicht auf Denkweisen der Lernenden mit sich brachte, zum anderen das Verständnis der Forschenden vom mathematischen Inhalt veränderte, d.h. eine Fachliche Klärung mit sich brachte (vgl. Abschnitte 4 und 5). Dabei wurden lernförderliche Anknüpfungspunkte und lernhinderliche Schwierigkeiten herauspräpariert.

3.2.2 Erste Didaktische Strukturierung in einer Unterrichtsreihe

Die empirischen Ergebnisse zu lernförderlichen Anknüpfungspunkten und lernhinderlichen Hürden sind ebenso wie die der Fachlichen Klärung eingegangen in die Entwicklung einer 49-stündigen Unterrichtsreihe zur Einführung in die Differentialrechnung, die vom Autor in einem Grundkurs des 11. Jahrgangs durchgeführt wurde. Der Themenkatalog orientierte sich am Lehrplan, wenn auch mit anderen Ausgangspunkten und Gewichtungen: Die Reihe startete mit einer Erstbegegnung mit Wachstumsprozessen und ihrer qualitativen Konzeptualisierung durch Bestands- und Änderungsfunktionen, sowie mit der tabellarischen Erfassung in diskreten Modellen. Anhand von Geschwindigkeits- und

Orts-Zeit-Zusammenhängen gelangten die Lernenden durch Grenzwertbildung zum formalen Ableitungsbegriff. Extrema und Wendepunkte wurden zunächst qualitativ, später auch mit Hilfe des Kalküls bestimmt. Zum Abschluss wurden Extremwertprobleme gelöst (genaueres im Rahmen der Beispiele in den Abschnitten 4 und 5).

3.2.3. Weitere Schritte im Rahmen des Forschungsprogramms

Zur nochmaligen Erfassung von Lernendenperspektiven wurden die Unterrichtsstunden videografiert und zeitnah zu ihrer Durchführung anhand des Videos in Form von Episodenplänen dokumentiert. Nach Beendigung der Unterrichtsreihe wurde anhand der vorliegenden Episodenpläne eine grobe übergreifende Analyse im Hinblick sowohl auf die Lernprozesse, als auch vor allem auf typische Verständnishürden angestellt, die jedoch aufgrund der enormen Datenmenge nicht vertieft werden konnte. Evaluativen Aufschluss gaben auch die Klassenarbeiten (s. Abschnitt 4.6).

Weitere Schritte im iterativen Wechsel der Arbeitsbereiche folgten nicht für alle interessanten Phänomene, sondern vorrangig in zwei im Prozess spezifizierten thematischen Strängen (vgl. Abschnitte 4 und 5).

Natürlich kann das Promotionsprojekt und seine Ergebnisse hier nicht vollständig vorgestellt werden (siehe dazu Hahn 2008). Statt dessen haben wir hier nur die zwei vertieft bearbeiteten Stränge exemplarisch herausgegriffen und ausgearbeitet, an denen die Stärke des Forschungsmodells besonders deutlich werden kann, weil die Rekonstruktion das Verständnis der mathematischen Inhalte nicht unverändert lässt. An diesen Strängen soll auch der iterative Forschungs*prozess* und das Ineinandergreifen der Arbeitsbereiche sichtbar gemacht werden, auch auf die Gefahr hin, dass die systematische Darstellung der Ergebnisse glatter sein könnte.

4 Vom schwierigen Phänomen der gegensinnigen Veränderung zu zentralen Konzepten der Analysis

Es war die wiederholte (wenn auch noch unsystematische) Erfahrung, wie schwer es Nichtmathematikern fällt, zwischen einer Änderung und einer Änderung der Änderung sprachlich und konzeptionell zu unterscheiden (wie etwa in dem Beispiel „Neuverschuldung gesunken“, s. Abb.2), die die Autorin dieses Aufsatzes zur Vergabe des Promotionsthemas angeregt hat. Insbesondere das Phänomen, dass ein Bestand weiter wachsen kann, obwohl seine Änderung sinkt, hat sich als empirisch nachweislich *schwer intuitiv begreifbar* und gerade deswegen als interessantes, nicht nur sprachliches Problem herausgestellt. Wir wollen hier zeigen, wie in der Didaktischen Rekonstruktion aus einem schwierigen Phänomen ein fruchtbarer Anlass für den Erwerb mathematischer Begriffe werden kann.

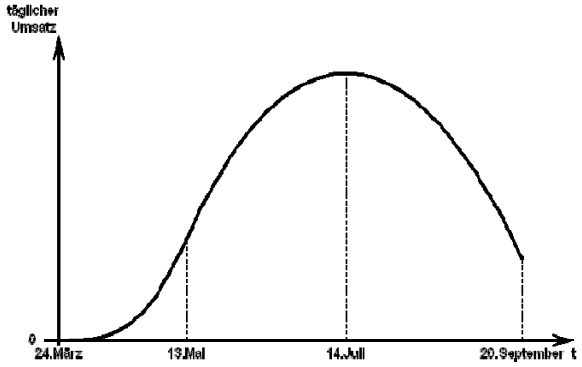
4.1 Erfassung von Lernendenperspektiven: Schwierigkeiten mit Ebenen-Unterscheidung

Die in dem Zeitungsartikel sich abzeichnenden Schwierigkeiten haben wir auch in einem Test mit Studienanfängerinnen und –anfängern für das Lehramt Mathematik an Grund-, Haupt- und Realschulen wieder finden können. In einem schriftlichen Einstufungstest vor Beginn des Wintersemesters 2004 haben wir an der Universität Bremen unter anderem die in Abb. 4 abgedruckte Aufgabe „Produktlebenszyklus – multiple choice“ gestellt.

Von den 204 Studienanfängerinnen und –anfängern konnten nur 47% die zweite Aussage als falsch entlarven, und nur 42% werteten die erste Aussage als richtig. Diese Ergebnisse sind zwar vielleicht auch auf den nicht vertrauten Kontext zurückzuführen, sie belegen dennoch gleichzeitig, wie schwer es auch zukünftigen Lehrerinnen und Lehrern fällt, ihre Analysis-Abiturkenntnisse für die inhaltliche Deutung von Aussagen über Bestände und Änderungen zu nutzen.

Aufgabe Produktlebenszyklus

Ein Produkt wird am 24.3. erstmalig auf den Markt gebracht und bis zum 20.9. verkauft. Ab dem 21.9. gibt es dieses Produkt nicht mehr zu kaufen. In der obigen Graphik ist der mit diesem Produkt erbrachte tägliche Umsatz in Abhängigkeit von der Zeit *t* dargestellt. Am 13.5. befindet sich ein so genannter Wendepunkt. Am 14.7. befindet sich ein Hochpunkt. Unter dem Gesamtumsatz zu einem bestimmten Tag wird im Folgenden die Summe aller täglichen Umsätze vom Verkaufsbeginn an bis zu diesem Tag (einschließlich) verstanden.



Geben Sie zu jeder der folgenden Aussagen an, ob sie ***Richtig*** oder ***Falsch*** ist.

Richtig	Falsch	
☐	☐	Die Zunahme des täglichen Umsatzes sinkt jeden Tag in der Woche vom 28. Juni bis zum 04. Juli.
☐	☐	Die maximale Zunahme des täglichen Umsatzes wird an einem Tag in der Woche vom 12. Juli bis zum 18. Juli erreicht.

Abb. 4: Testaufgabe „Produktlebenszyklus – multiple choice“

4.2 Fachliche Klärung: Genauere Lokalisierung der Probleme

4.2.1 Ebenen- und Aspektwechsel

Die zweite Aussage „Die maximale Zunahme des täglichen Umsatzes wird an einem Tag in der Woche vom 12. Juli bis zum 18. Juli erreicht.“ thematisiert die Existenz eines lokalen Extremums zum Zeitpunkt des 14. Juli. Allerdings wird dabei nicht die Ebene der Umsatzfunktion selbst, sondern ihre Änderung angesprochen. Diejenigen Studierenden, die die Aussage irrtümlich als richtig einschätzten, sind vermutlich einer Ebenenverschmelzung unterlegen, wie wir sie auch in den durchgeführten Interviews immer wieder beobachten konnten (s. Abschnitt 4.3). Gerade auch in den dort verlangten visuellen Umsetzungen wird deutlich, dass es sich nicht nur um ein sprachliches, sondern tatsächlich ein konzeptionelles Problem handelt. Auch die Verwechslung der Neuverschuldung mit der Schuldenfunktion (vgl. Abb. 2) kann Ausdruck einer solchen Ebenenverschmelzung sein. Weil hier also immer wieder Schwierigkeiten auftauchen, sehen wir in dem konzeptionellen und sprachlichen Auseinanderhalten der Ebenen Bestand – Änderung – Änderung der Änderung einen ersten zentralen Lerninhalt (vgl. Hahn/Prediger 2004).

Die Anforderung, mit notwendigen Ebenenwechseln ohne Ebenenverschmelzungen flexibel umzugehen, wird zusätzlich durch die notwendigen Aspektwechsel zwischen Zuordnungsaspekt, Kovariationsaspekt und Objektaspekt (vgl. Vollrath 1989, Malle 2000) innerhalb einer Ebene erschwert (vgl. das Modell zum Ebenen- und Aspektwechsel in Abb. 5). Vom Zuordnungsaspekt wird gesprochen, wenn bei Betrachtung einer Funktion (oder einer als funktional betrachteten Situation) der beschriebene oder gestiftete Zusammenhang an sich im Vordergrund steht, wenn eine Größe einer anderen zugeordnet wird. Im Kovariationsaspekt dagegen wird erfasst, wie sich die beiden Größen miteinander verändern. Der Objektaspekt wird schließlich aktiviert, wenn das spezifische Muster des funktionalen Zusammenhangs als Gesamtphänomen erfasst wird.

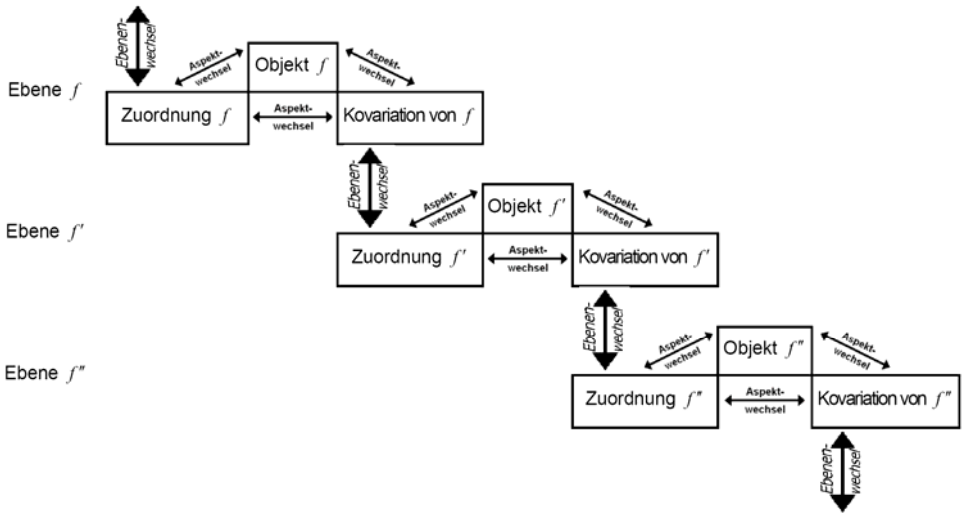


Abb. 5: Ebenen- und Aspektwechsel als Herausforderungen der Analysis

In Bezug auf den Produktlebenszyklus zum Beispiel betrachtet man bei Fokussierung auf den Zuordnungsaspekt den täglichen Umsatz zu bestimmten Zeitpunkten, bei Fokussierung auf den Kovariationsaspekt die Änderung des Umsatzes im Laufe der Zeit und bei Fokussierung auf den Objektaspekt den gesamten Verlauf als ein typisches Muster, bei dem dann z. B. die Frage nach dem Maximum gestellt wird. Fasst man die Änderung des Umsatzes zu einem Zeitpunkt selbst wieder als eine eigene Zuordnung auf, so wird die Ebene gewechselt hin zur Änderung des Umsatzes als eigenem funktionalen Zusammenhang (Zuordnungsaspekt für f'), für den sich wiederum auch Kovariationsaspekt und Objektaspekt aktivieren lassen.

Ebenenwechsel wie der von der Kovariation von f zur Zuordnung f' können zwischen allen benachbarten Ableitungsebenen stattfinden. Für das Beispiel des Produktlebenszyklus öffnet etwa die Frage nach dem Gesamtumsatz das Feld nach oben; der tägliche Umsatz wird dann betrachtet als Änderung des Gesamtumsatzes, der sich wiederum als Gesamteffekt des täglichen Umsatzes rekonstruieren lässt. Bestand und Änderung sind somit auch für die Integralrechnung wichtige Kategorien.

4.2.2 Änderungsverhalten und gegensinnige Kovariation

Wie lässt sich die Schwierigkeit mit der ersten Aussage der Aufgabe „Produktlebenszyklus – multiple choice" aus Abb. 4 erklären? Der Satz „Die Zunahme des täglichen Umsatzes sinkt jeden Tag in der Woche vom 28. Juni bis zum 04. Juli." aus Abb. 4 macht Aussagen zur Kovariation der Änderung des täglichen Umsatzes. Die Schwierigkeit in der Beurteilung der Aufgabe liegt darin, dass zwar der tägliche Umsatz im genannten Intervall noch zunimmt, seine Änderung jedoch abnimmt. Zur Klärung dieser rein klassifikatorischen und nicht näher quantifizierten Phänomene hat sich eine Reduzierung der Kovariationsbetrachtungen auf das so genannte Änderungsverhalten bewährt: Als *Änderungsverhalten* einer Funktion in einem Intervall bezeichnen wir die Information, ob die Funktion in diesem Intervall zu- oder abnimmt (oder gleich bleibt, allerdings haben wir diesen Fall der Konstanz in den anschaulichen Begründungen (nicht in den formalen Definitionen) zugunsten der technischen Einfachheit ausgeklammert und betrachten nur stückweise strenge Monotonie).

Bestand und Änderung eines Bestands hängen ohne Frage eng miteinander zusammen. Das sehen wohl auch Lernende sofort ein. Umso erstaunlicher ist deshalb für viele die Tatsache, dass die Änderungsverhalten von Bestand und Änderung voneinander unabhängig sind. Es scheint dem Alltagsdenken fern zu liegen, dass sich das Änderungsverhalten der Ableitung ändern kann, ohne dass sich das Änderungsverhalten der Funktion selbst verändert, dass also zum Beispiel die Neuverschuldung sinken kann, die Verschuldung selbst aber weiter steigt. Dieses Phänomen nennen wir eine *gegensinnige Kovariation*.

Es zeigt sich also, dass für eine inhaltlich angemessene Einordnung des Wachstums einer Funktion eine Betrachtung des Änderungsverhaltens auf einer einzigen Ableitungsebene nicht ausreicht. Erst das synchrone Betrachten der Änderungsverhalten der benachbarten Ableitungsebenen f und f', bzw. f' und f'', das wir mit dem Begriff der Qualität des Wachstums fassen, erlaubt die charakterisierende Unterscheidung eines lokalen Extrempunkts von einem Wendepunkt (s. Abschnitt 4.4).

4.3 Erfassung von Lernendenperspektiven in Interviews: Gegensinnige Kovariation als produktive Herausforderung

Die Schwierigkeiten mit dem Phänomen der gegensinnigen Kovariation zeigten sich auch in den Interviews mit Lernenden der zehnten Klasse, also vor einer unterrichtlichen Beschäftigung mit Analysis. Wir zeigen dies anhand der Interviewaufgabe „Produktlebenszyklus – offen“, die 24 der 30 Paare bearbeitet haben. Sie bestand darin, einen Graphen des täglichen Umsatzes im Produktlebenszyklus eines Produkts (vgl. Abb. 6 oben) zu interpretieren und in inhaltlich bedeutsame Phasen einzuteilen. 17 der 24 Paare mit dieser Aufgabe wurden schließlich explizit gebeten, den Umsatzänderungsgraphen zu zeichnen (wobei dieser in den Interviews durch von den Lernenden vorgegebene Ausdrücke benannt wurde, z. B. „Umsatzsteigerungsgraph“, „Zunahmegraph“, etc.). Diese Aufforderung zum graphischen Differenzieren einer nur qualitativ gegebenen Funktion fokussiert auf das Änderungsverhalten, weil konkrete Werte nicht zur Verfügung stehen.

In den videografierten Interviews machten 7 von 17 Interview-Paaren einen Vorschlag, der dem in Abb. 6 in der Mitte gezeigten ersten Versuch des Änderungsgraphen von Klaus ähnelt (aus Interview 23 mit Klaus und Anja in Hahn 2008).

Es hat uns beeindruckt, dass viele Lernende schon vor Beginn ihres Analysisunterrichts in der Lage waren, das Änderungsverhalten des Produktlebenszyklus weitgehend adäquat zu erfassen und fast den gesamten Umsatzänderungsgraphen richtig zu skizzieren, weil sie ihn sich in einem Sachzusammenhang richtig erschließen konnten. Der Vergleich mit der von Klaus später korrigierten, richtigen Variante (Abb. 6 unten) zeigt: Richtig ist schon beim ersten Versuch der anfängliche Anstieg der Ände-

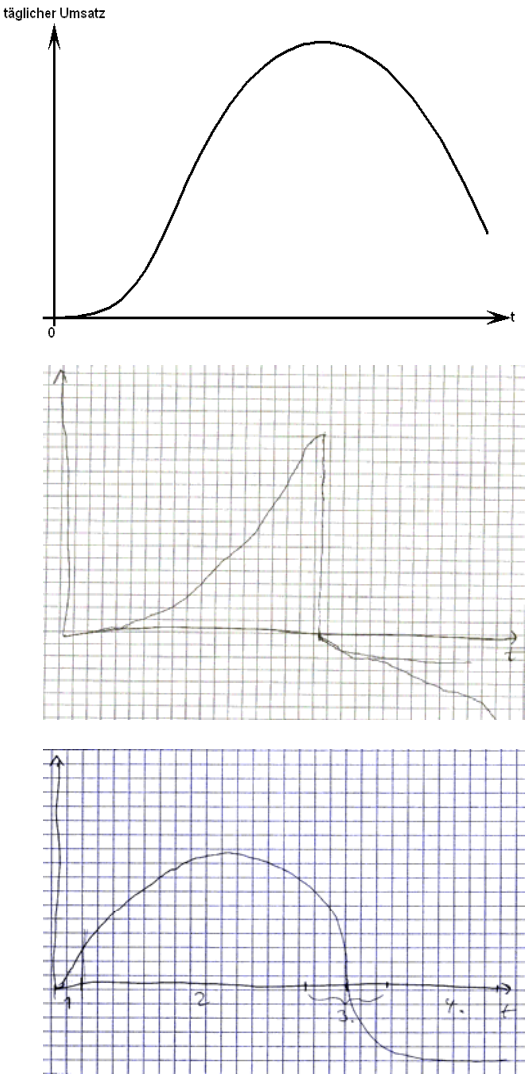


Abb. 6: Täglicher Umsatz und Umsatzsteigerungsgraphen 1 und 2 von Klaus

rung, dann das Erkennen einer verschwindenden Änderung am Hochpunkt im Graphen des täglichen Umsatzes und schließlich der Gebrauch der negativen Zahlen für den Zeitraum, in dem der tägliche Umsatz sinkt. Angesichts der noch fehlenden Erfahrung mit Differentialrechnung ist diese Leistung bemerkenswert. Auch die Diskretheit der Situation verursachte kaum Schwierigkeiten, die Lernenden begriffen den Ausgangsgraph (implizit) als in hinreichend kleinen Intervallen stückweise linear.

Nur der Zeitraum vom Wendepunkt bis zum Hochpunkt im Graphen des Produktlebenszyklus ist im ersten Versuch noch nicht richtig wiedergegeben. Auf diesem Zeitintervall nimmt der tägliche Umsatz zwar noch zu, aber die tägliche Änderung des täglichen Umsatzes selbst nimmt bereits ab. Klaus dagegen war (mit vielen anderen) zunächst der Meinung, dass im fraglichen Zeitintervall auch noch die tägliche Änderung des täglichen Umsatzes zunimmt. Dies formuliert er auch, während er den Verlauf des Umsatzänderungsgraphen zwischen Wendepunkt und Hochpunkt zeichnet:

108. K: Ich male das jetzt so mal freihand (*zeichnet den steigenden Teil aus Abb. 6 Mitte*).
Da kommt ja immer was dazu. .. So. Da (*zeichnet den Hochpunkt in Abb. 6 Mitte*)

…

126. K: Nee. Nee. .. Also ich weiß es nicht.

127. I: Was stört dich denn an deinem Graphen, den du jetzt gezeichnet hast?

128. K: Ja, dass es da so senkrecht runtergeht. .. Ja irgendwie/ Ich habe das noch nicht so ganz gepeilt. ...

(Anja und Klaus, Interview 23, Hahn 2008)

Für einen kleinen Ausschnitt des Definitionsbereichs unterläuft ihm also eine Ebenenverwechslung (Z. 108: „Da kommt ja immer was dazu“), und zwar genau in dem Bereich, in dem eine gegensinnige Kovariation vorliegt. Diese Schwierigkeit hat sich in vielen Varianten in den Interviews und auch im nachfolgenden Unterricht reproduziert.

Klaus ist selbst unzufrieden über den dadurch bedingten plötzlichen Abfall vor dem Hochpunkt (Z. 126-128) und denkt deswegen weiter nach. Dann entwickelt er beim Gespräch über die Interpretation der Nullstelle im Änderungsgraphen (Z. 129) spontan eine weitere Idee, nachdem der Interviewer (ab Z. 131) eine Erkenntnis von vorher rephrasiert.

129. I: Also wo findet sich denn hier drüben (*zeigt auf den Umsatz-Zeit-Graphen in Abb. 6 oben*) der Punkt wieder, wo hier (*zeigt auf Änderungsgraph in Abb. 6 Mitte*) dein Graph die t-Achse schneidet? Also, wo die tägliche Zunahme Null ist. Wo findet sich der Punkt hier (*zeigt auf Umsatz-Zeit-Graph oben*) wieder? ...

130. K: Na, der tägliche Umsatz ist ja nicht gleich Null. ..

131. I: Nee, aber die Zunahme.

132. K: Ja, die Zunahme (*kurzes Zögern*) ist genau hier (*zeigt den Hochpunkt im Umsatz-Zeit-Graphen*).

133. I: Hm.

134. K: Also da, wo die Kurve [des Umsatz-Zeit-Graphen] nicht mehr nach oben geht.

135. I: Ja.

136. K: Da schneidet der (*zeigt auf seinen Änderungsgraph in Abb.6 Mitte*) das (*zeigt auf Rechtsachse*).

137. I: Ja. Okay. Gut. .. Wenn das (*zeigt auf den Änderungsgraph in Abb .6 Mitte*) die Zunahme des täglichen Umsatzes ist, dann (*Klaus greift sich an den Kopf*) wäre also, kurz bevor dieser (*zeigt auf den Hochpunkt im Umsatz-Zeit-Graphen*)/

138. K: (*unterbricht*) Ich habe jetzt spontan eine Idee. (*zeichnet los, endet mit Abb.6 unten*)

Ohne dies verbalisieren zu können, hat Klaus die richtige Idee, dass die Zunahme im Wendepunkt zu sinken beginnt und zeichnet dies erfolgreich in einen angemessenen Umsatzänderungsgraphen (siehe Abb. 6 unten). Noch ist die Erkenntnis fragil, die beiden Jugendlichen revidieren ihn wieder (Z. 140-200) und kommen später darauf zurück:

204. A: Der sinkt nicht wirklich. Der nimmt auch nicht viel zu. ..

205. I: Ja, was sinkt denn dort? (*zeigt auf den Umsatz-Zeit-Graphen kurz vor dem Hochpunkt in Abb. 6 oben*) Da. Was sinkt denn dort, obwohl der Umsatz ja steigt? (*5 sec Pause*)

206. K: Ja, (*lacht*) das ist eine gute Frage, Mensch.

207. A: (*lacht*) ..

208. K: Ja. ...

209. A: (*unverständliche Äußerung*) (*6 sec Pause*)

210. K: Dann stimmte das ja doch, was wir da (*in Abb. 6 unten*) gehabt haben.

….

Das restliche Interview ringen die beiden mit der Versprachlichung des Phänomens, weil ihnen geeignete Konzepte wie das der Änderung fehlen. Selbst der gezielte Impuls des Interviewers hilft nur begrenzt:

300. I. Jetzt habe ich in einigen Interviews erlebt, dass äh Schüler, Schülerinnen gesagt haben, hier (*zeigt einen Abschnitt des Graphen zwischen Wende- und Hochpunkt*) fällt etwas, und hier (*zeigt einen Abschnitt des Graphen vor dem Wendepunkt*) steigt etwas. Was könnten die mit dem „Etwas" gemeint haben?

301. A,K: (*überlegen*) (*5 sec Pause*)

302. I: Hier (*zeigt auf den Abschnitt vor dem Wendepunkt*) steigt es, und hier (*zeigt zwischen Wende- und Hochpunkt*) fällt es. (*7 sec Pause*)

303. K: Ja. (überlegt) (*8 sec Pause*)

304. A: Hier, (*zeigt auf den Abschnitt vor dem Wendepunkt*) hier fällt es?

305. K: Nein, da steigt es.

306. I: Hier (*zeigt zwischen Wende- und Hochpunkt*) fällt es, hier [*zeigt vor den Wendepunkt*] steigt es. Hier (*zeigt zwischen Wende- und Hochpunkt*) fällt es.

307. K: Also hier (*zeigt vor den Wendepunkt*) ist es ja sozusagen mehr nach oben geöffnet und da (*zeigt zwischen Wende- und Hochpunkt*) mehr so nach unten, ne. Ja. (*7 sec Pause*)

308. A: Ja. (*6 sec Pause*)

309. K: Hier steigt (*zeigt vor den Wendepunkt*) die Einnahme pro Zeit, würde ich sagen.

310. I: Hm.

311. A: Ja genau. Würde ich auch sagen/

312. K: Also hier (*zeigt vor den Wendepunkt*) äh hat man in weniger Zeit eine höhere Einnahme. ..

313. I: Hm.

314. K: Und hier (zeigt *zwischen Wende- und Hochpunkt*) wird das wieder ein bisschen weniger, und hier (*zeigt auf Graphenabschnitt um den Wendepunkt herum*) ist das ungefähr konstant. ..

(Anja und Klaus, Interview 23, Hahn 2008)

Wie viel Mühe die beiden damit haben, einen Begriff für die Änderung des täglichen Umsatzes zu entwickeln, zeigen die langen Pausen zwischen Z. 301 und Z. 309. Der von Klaus in Z. 309 präsentierte Begriff der „Einnahme pro Zeit" versucht, eine Rate zu entwickeln. Er trifft die Änderung aber auch nur begrenzt, weil er nicht die richtigen Größen in Relation setzt. In Z. 314 benutzt er wieder nur ein undefiniertes „das".

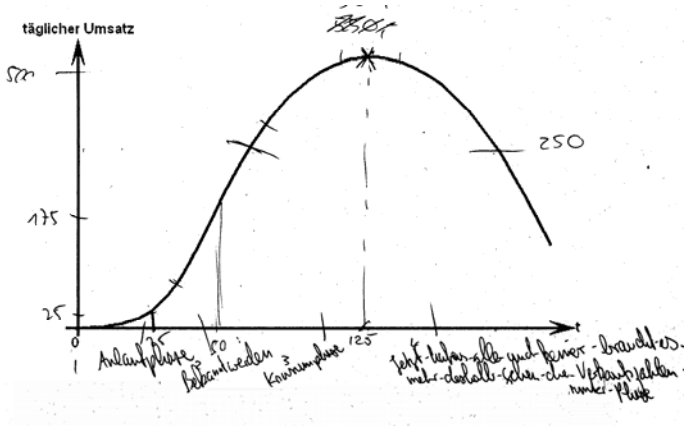


Abb. 7: Wendepunkt und Extrempunkt selbst erfunden – Einteilung des Produktlebenszyklus in charakteristische Phasen von Martina und Henner
(Transkription der handschriftlichen Legende: Anlaufphase – Bekanntwerden – Konsumphase – Jetzt-habens-alle-und-keiner-braucht-es-mehr-deshalb-gehen-die-Verkaufszahlen-runter-Phase)

Klaus und Anjas Ringen zeugt von einer interessanten Grenze des Alltagsdenkens, an die viele Lernende in den Interviews stießen. Fast alle Interviewten entwickelten in der Bearbeitung der Interview-Aufgabe „Produktlebenszyklus – offen" Begriffe zur Unterscheidung der Bestands- und der Änderungsfunktion, auch wenn es ihnen nicht immer auf Anhieb gelang, diese auch mit stabilen Bedeutungen konsistent und in Einklang mit den fachlich tragfähigen Konzepten zu nutzen (vgl. nächstes Kapitel).

So zeigt sich in den Interviews die qualitative Betrachtung von Beständen und Änderungen und insbesondere das Phänomen gegensinniger Kovariation als ein sehr geeigneter Ausgangspunkt, um einen Bedarf für zentrale Begriffe der Differentialrechnung zu entwickeln. Gerade das Phänomen der gegensinnigen Kovariation zwingt zur begrifflichen Unterscheidung, die produktive Lernprozesse mit sich bringen kann.

Gleichzeitig legt die Arbeitsumgebung bei den Lernenden lernförderliche Anknüpfungspunkte für die Differentialrechnung frei. So wählten z. B. bei dem vor der graphischen Differenzierung gegebenen Auftrag, den Produktlebenszyklus in Phasen einzuteilen, 12 Interviewpaare intuitiv ihre Phasen-Enden genau an den Extrem- und Wendestellen der Funktion (vgl. etwa Abb. 7), weitere Interviewpaare betrachteten ein Wendeintervall, z. B. als den Bereich der stärksten Steigung. Hier zeigen sich sehr viele Anknüpfungspunkte im individuellen Denken für die Entwicklung der regulären Begriffe der Analysis.

Insgesamt legen die in den Interviews gezeigten Phänomene die Entscheidung nahe, solcherart qualitative Analysen von Beständen und Änderungen in Sachzusammenhängen wie dem Produktlebenszyklus für die eigentätige Entwicklung zentraler Begriffe der Differentialrechnung zu nutzen (vgl. Abschnitt 4.5). Begriffe wie Bestand und Änderung, Extrem- und Wendestellen erscheinen dann insofern als Verstärker des Alltagsdenkens, als sie das präzise Denken und Kommunizieren über schwer greifbare Phänomene wie dem der gegensinnigen Kovariation unterstützen.

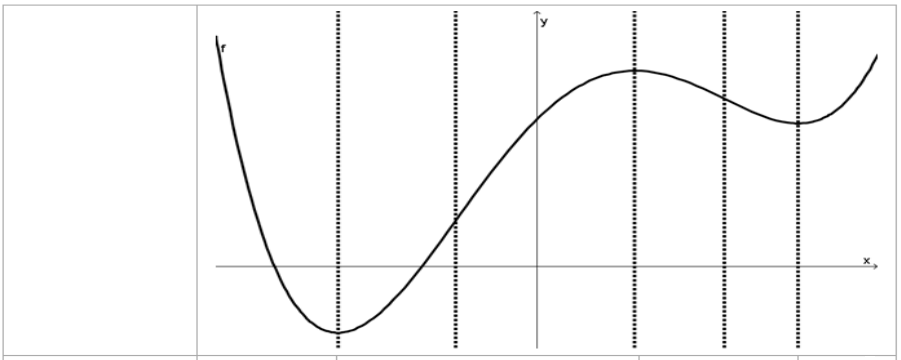
4.4 Fachliche Klärung: Zusammenhang der Qualität des Wachstums mit Extrem- und Wendestellen

Wenn also in der Didaktischen Strukturierung die Extrem- und Wendestellen in unmittelbaren Zusammenhang mit dem Änderungsverhalten einer Funktion gebracht werden sollen, so muss zunächst dieser Zusammenhang aus fachlicher Sicht genau geklärt werden.

Warum betrachtet man überhaupt lokale Extrem- und Wendepunkte? Lokale Extrem- und Wendepunkte können natürlich zum Lösen von Optimierungsproblemen interessant sein (zu einer zentralen Problemklasse in der angewandten Mathematik, vgl. Schupp 1992). Sie können aber auch als mathematische Konzepte zur Erfassung und Beschreibung derjenigen Zeitpunkte in einem Wachstumsprozess begriffen werden, in denen sich die Qualität des Wachstums ändert.

Betrachten wir an dem Beispiel aus Abb. 8 den Verlauf der Qualität des Wachstums einer Funktion, so zeigt sich der enge Zusammenhang zwischen lokalen Extrem- und Wendepunkten mit der Änderung der Qualität des Wachstums, also dem Wechsel von gegensinniger zu gleichsinniger Orientierung der Kovariationen auf benachbarten Ableitungsebenen bzw. von gleichsinniger zu gegensinniger

Unter der Qualität des Wachstums einer Bestands-Zeit-Funktion wird dabei das Änderungsverhalten („nimmt zu“ oder „nimmt ab“) des Bestands in Kombination mit dem Änderungsverhalten der Änderung des Bestands pro Zeiteinheit verstanden. Eine *Änderung der Qualität des Wachstums* liegt z.B. an einer Stelle vor, an der eines der beiden Änderungsverhalten wechselt. Wichtig ist also das synchrone Betrachten beider Ebenen.



Änderungsverhalten des Bestands	nimmt ab		nimmt zu		nimmt ab	nimmt zu
Änderungsverhalten der Änderung des Bestands	nimmt zu		nimmt ab		nimmt zu	
Qualität des Wachstums	gegensinnig	gleichsinnig	gegensinnig	gleich-sinnig	gegen-sinnig	gleich-sinnig

Abb. 8: Qualität des Wachstums ändert sich an den Extrem- und Wendestellen

Was anschaulich durch das Beispiel in Abb. 8 unmittelbar deutlich wird, ist im Einzelnen durchaus aufwändig zu beweisen. So konnte (in Hahn 2008, Satz 7.25) eine einheitliche Charakterisierung von Extrem- und Wendestellen gegeben werden, die hier verkürzt wiedergegeben wird:

Satz: Für differenzierbare Funktionen f: $D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit überschaubarem Monotonieverhalten von f und f' im gesamten Definitionsbereich sind an jeder Stelle x_0 folgende Aussagen äquivalent:

- Die Qualität des Wachstums von f ändert sich in x_0, d.h. das Änderungsverhalten von f oder f' ändert sich in x_0.
- Die Funktion f hat in x_0 eine lokale Extrem- oder Wendestelle.

Die Voraussetzung des überschaubaren Monotonieverhaltens[1] muss eingefügt werden, um „pathologische" Ausnahmen wie Funktionen mit dem Baustein f mit $f(x)= x^2 \sin(1/x)$ auszuschließen. Für alle in der Schulmathematik relevanten Funktionen hat man mit dem Satz jedoch einen einfachen fachlich tragfähigen Zugang, der genau die Qualität des Wachstums ins Zentrum stellt und eine Charakterisierung der Extrem- und Wendestellen als „Wachstumsqualitätswechselstellen" liefert.

Weiterhin gültig bleiben natürlich die anderen wichtigen Grundvorstellungen zu Extremstellen (als Maximal- bzw. Minimalwert, als Wechselstelle für das Änderungsver-

[1] Verkürzte Definition: Eine Funktion f hat in x_0 ein *überschaubares Monotonieverhalten*, wenn es eine offene Umgebung um $x_0$herum gibt, sodass f links von x_0 streng monoton oder konstant ist und f rechts von $x_0$ebenfalls streng monoton oder konstant ist (vgl. Hahn 2008, S. 183).

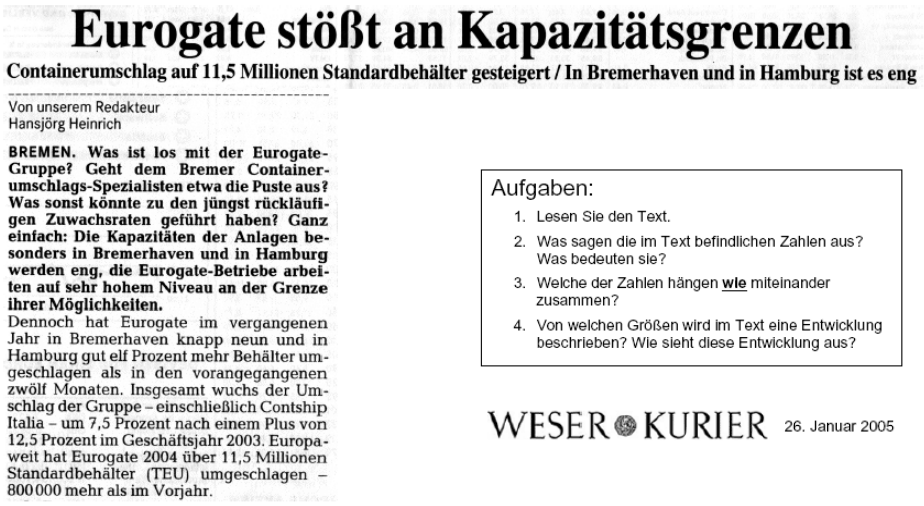
halten des Bestands und als Umgebung, in der sich der Bestand wenig ändert) und zu Wendestellen (als Extremstelle der Änderungsfunktion, als Wechselstelle für das Änderungsverhalten der Änderung und geometrisch als Krümmungsrichtungswechselpunkt).

4.5 Didaktische Strukturierung

Die in Abschnitt 4.2 und 4.4 dargestellte fachliche Perspektive geht aus von dem aus Lernendenperspektive schwierigen Phänomen der gegensinnigen Kovariation und bildet die Grundlage für die Didaktische Strukturierung eines Lernarrangements, dessen Vorläufer als Unterrichtsreihe im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprozesses erprobt wurde.

Dazu wurde ausgegangen von realitätsbezogenen Beispielen, in denen das Phänomen der gegensinnigen Kovariation auftaucht. Die ersten Beispiele sind bewusst rein qualitativ, um die kalkülmäßige Behandlung zu verzögern, bis adäquate Grundvorstellungen aufgebaut sind.

Konkret begann der Unterricht mit Zeitungsausschnitten wie „Neuverschuldung gesunken“ (ähnlich zu Abb. 2) und „Eurogate stößt an Kapazitätsgrenzen“ (vgl. Abb. 9), an dem die Lernenden sich erarbeiten konnten, dass es Wachstumsprozesse mit gegensinnig orientierter Kovariation überhaupt gibt. Um das Erstaunen hervorrufende Phänomen adäquat beschreiben zu können, entwickelten sie – unter Moderation des Lehrers - die gemeinsame Unterscheidung zwischen Bestand und seiner Änderung. Diese Begriffe erschienen hier – wie die nachfolgenden - im besten Freudenthal’schen Sinne als „Werkzeuge, um die Phänomene der natürlichen, sozialen und geistigen Welt zu ordnen“ (Freudenthal 1983, S. 28, hier übersetzt); konkret dienen sie zur Vermeidung von Ebenenverwechslungen.



Eurogate stößt an Kapazitätsgrenzen

Containerumschlag auf 11,5 Millionen Standardbehälter gesteigert / In Bremerhaven und in Hamburg ist es eng

Von unserem Redakteur
Hansjörg Heinrich

BREMEN. Was ist los mit der Eurogate-Gruppe? Geht dem Bremer Containerumschlags-Spezialisten etwa die Puste aus? Was sonst könnte zu den jüngst rückläufigen Zuwachsraten geführt haben? Ganz einfach: Die Kapazitäten der Anlagen besonders in Bremerhaven und in Hamburg werden eng, die Eurogate-Betriebe arbeiten auf sehr hohem Niveau an der Grenze ihrer Möglichkeiten.

Dennoch hat Eurogate im vergangenen Jahr in Bremerhaven knapp neun und in Hamburg gut elf Prozent mehr Behälter umgeschlagen als in den vorangegangenen zwölf Monaten. Insgesamt wuchs der Umschlag der Gruppe – einschließlich Contship Italia – um 7,5 Prozent nach einem Plus von 12,5 Prozent im Geschäftsjahr 2003. Europaweit hat Eurogate 2004 über 11,5 Millionen Standardbehälter (TEU) umgeschlagen – 800 000 mehr als im Vorjahr.

Aufgaben:

1. Lesen Sie den Text.
2. Was sagen die im Text befindlichen Zahlen aus? Was bedeuten sie?
3. Welche der Zahlen hängen **wie** miteinander zusammen?
4. Von welchen Größen wird im Text eine Entwicklung beschrieben? Wie sieht diese Entwicklung aus?

WESER KURIER 26. Januar 2005

Abb. 9: Eurogate stößt an Kapazitätsgrenzen – Zeitungsausschnitt mit Aufgabe

Mit dem rein auf das Vorzeichen konzentrierten Konzept des Änderungsverhaltens von Bestand und Änderung und der Qualität des Wachstums als Begriff zur simultanen Erfassung der Änderungsverhalten von Bestand und Änderung wurde die Mathematik als Verstärker des Alltagsdenkens erlebbar (vgl. Abschnitt 2.1).

Eine weitere Untersuchung der noch immer rein qualitativ gegebenen Graphen galt den markanten Punkten im Wachstumsprozess, an denen die Qualitäten des Wachstums sich ändern: Die Begriffe „lokaler Extrempunkt“ und „Wendepunkt“ zeigen sich als hilfreich für die Analyse und Beschreibung von Wachstumsprozessen, lange bevor ihre kalkülhafte Beschreibung unter Optimierungsgesichtspunkten ins Blickfeld rücken kann.

Erst nach dieser rein qualitativen Behandlung der Konzepte wurden Quantifizierungen und Exaktifizierungen vorgenommen, dazu wurden die Funktionen auf die durch Terme beschreibbaren Funktionenklassen eingeschränkt und das numerisch gegebene Funktionenrepertoire von diskreten auf stetige Prozesse erweitert. Die nachgelagerte Verstetigung und Formalisierung eröffnet dann auch Möglichkeiten zur rechnerischen Bestimmung von Extrem- und Wendestellen für durch Terme gegebene Funktionen. (Zur Weiterführung der Unterrichtreihe siehe auch Abschnitt 5.)

4.6 Erfassung von Lernendenperspektiven: Effekte der Unterrichtsreihe

Dass die Unterrichtsreihe bzgl. der Erfassung des Phänomens der gegensinnigen Orientierung einen gewissen Erfolg verbuchen kann, zeigen die Lösungshäufigkeiten der Schülerinnen und Schüler des Kurses zu der in Abb. 4 abgedruckten Aufgabe „Produktlebenszyklus – multiple choice“: Während von den 204 Studienanfängerinnen und –anfängern nur 42% die erste Aussage als richtig einstufen konnten, waren es unter den 23 Teilnehmern der Unterrichtsreihe 83%. Etwas enttäuschender ist dagegen die Lösungshäufigkeit von 70% für die zweite Aussage (aber immer noch deutlich über den 47% unter den Studienanfängern). Sie zeigt, dass die Behandlung der gegensinnigen Kovariation keine automatische Gewähr für ein umfassendes Verständnis des Gebiets gibt, einfache Ebenenverwechslungen also dennoch vorkommen können.

Aufgabe Vergiftetes Bakterienwachstum

Im Folgenden sehen Sie einen Graphen, der qualitativ die Anzahl y an Bakterien zum Zeitpunkt x in Tagen angibt. Es handelt sich dabei um ein sog. „vergiftetes Wachstum“. Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem qualitativ einen Graphen, der die momentane Zunahme der Bakterienzahl pro Tag zu jedem Zeitpunkt angibt.

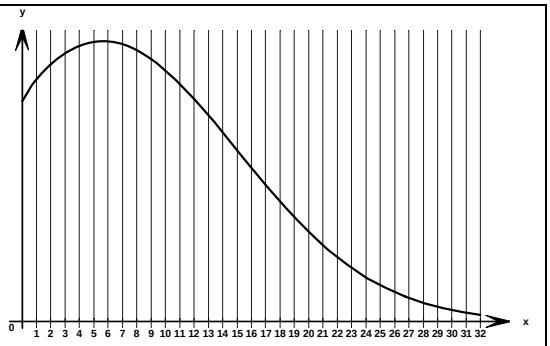


Abb. 10: Klausuraufgabe Vergiftetes Wachstum

Intervalltyp, gekennzeichnet durch Änderungsverhalten	Intervalltyp I: Bestand sinkt, Änderung steigt	Intervalltyp II: Bestand steigt, Änderung sinkt	Intervalltyp III: Bestand sinkt, Änderung sinkt	Intervalltyp IV: Bestand steigt, Änderung steigt
Qualität des Wachstums	gegensinnige Kovariation		gleichsinnige Kovariation	
Zahl der Lernenden, die das Änderungsverhalten des Bestands richtig erfasst haben	20	18	10	7
Anteil derjenigen davon, die das Änderungsverhalten der Änderung richtig erfasst haben	60 %	61 %	80 %	100 %

Abb. 11: Lösungshäufigkeiten beim graphischen Differenzieren des „Vergifteten Wachstums“

Die Klausur zeigte außerdem, dass es noch immer ein Gefälle zwischen gegensinniger und gleichsinniger Kovariation gab: In der Klausuraufgabe „Vergiftetes Bakterienwachstum“ wurde wiederum ein Graph qualitativ gegeben (vgl. Abb. 10, die zweite Gruppe erhielt den horizontal gespiegelten Graphen, ebenfalls im ersten Quadranten) und zum graphischen Differenzieren im Kontext des Bakterienwachstums aufgefordert. Für die drei wichtigen Zeitintervalle, die jeweils von den Extrem- und Wendestellen begrenzt sind, müssen zum Zeichnen jeweils das Änderungsverhalten von f und das Änderungsverhalten der Zunahme der Bakterienzahl, also das Änderungsverhalten von f', erfasst werden.

In der Tabelle in Abb. 11 sind die Lösungshäufigkeiten beider Schülergruppen (mit diesem und dem gespiegelten Graphen) für die dann vier unterscheidbaren Intervalle zusammengefasst. Sie zeigen interessante Tendenzen: Trotz des bewussten Aufgreifens und Einbindens von Problemen mit gegensinniger Kovariation bleibt Gegensinnigkeit für Lernende schwieriger (relative Lösungshäufigkeiten um 60%) als Gleichsinnigkeit (relative Lösungshäufigkeit um 88%).

Die Konzepte von Extrem- und Wendestelle dagegen haben fast alle Lernenden stabil erworben, was sich etwa in dieser Aufgabe daran zeigt, dass sie fast alle eine angemessene Phaseneinteilung und die Wachstumsqualitätswechselpunkte berücksichtigen.

4.7 Zwischenfazit

Insgesamt zeigt sich an diesem Beispiel, wie die Gegenüberstellung von individuellen und fachlichen Vorstellungen helfen kann, Lernarrangements zu entwickeln, die dem Ziel einer vertikalen Vorstellungsentwicklung dienen, also den Übergang von individuellen vorunterrichtlichen Vorstellungen zu fachlich tragfähigen Vorstellungen nachhaltig anstoßen. Dass dies gleichwohl keine Garantie für den idealen Lernerfolg aller Schülerinnen und Schüler liefern kann, entspricht den Erfahrungen der Conceptual-Change-Forschung. Im Folgenden soll ein etwas anders gelagertes Beispiel für eine Vorstellungsentwicklung im horizontalen Sinne angeführt werden.

5 Wieso misst man Änderungen gerade so?

5.1 Erfassung von Lernendenperspektiven: Vielfalt individueller Vorstellungen zur Änderung

Haben Lernende überhaupt vor der unterrichtlichen Einführung Vorstellungen zum Ableitungsbegriff? Natürlich nicht, wenn man nach dem abstrakten Ableitungsbegriff fragt. Gleichwohl haben die bisherigen Ausführungen bereits gezeigt, dass es fruchtbare Anknüpfungspunkte gibt, wenn man die lebensweltlichen Bezugspunkte des Ableitungskonzeptes wieder freilegt und Vorstellungen nicht zum abstrakten Begriff, sondern zu den durch ihn beschriebenen Phänomenen erfasst (wir folgen damit dem von Lengnink 2003 für das Funktionskonzept vorgeschlagenen Vorgehen). Daher wurden Vorstellungen der Lernenden zur Änderung anhand von Wachstumsprozessen aufgenommen, etwa zu „Neuverschuldung gesunken“ (ähnlich zu Abb. 2) oder zum Produktlebenszyklus (Abb. 4 und 6). Dieser Entscheidung liegt das Grundverständnis zugrunde, dass die lokale Änderungsrate die zentrale Grundvorstellung für das Ableitungskonzept bildet (z. B. Blum 2000, Danckwerts/Vogel 2006).

Eine typische erste Forschungsfrage der Vorstellungsforschung (etwa Gropengießer 2001) zielt auf die Begrifflichkeiten, die Lernende für die Beschreibung des Phänomens wählen. So lassen sich aus den 30 Interviews vielfältige individuelle Ausdrücke zur Beschreibung der Änderung extrahieren:

„Winkel“	„Faktor“
„Steilheit“	„tägliche Zunahme des täglichen Umsatzes“
„Unterschied“ (2x)	„Beschleunigung“
„Differenz“ (2x)	„die Art, in der der Umsatz zunimmt“
„Steigungsfaktor“ (2x)	„Zunahme pro Zeit“
„das, was mehr wird“	„Einnahme pro Zeit“
„das, was hinzukommt“	„Faktor Umsatz mal Zeit“
„Steig(er)ung“ (4x)	„Ab- und Zunahme des Graphen“

Entscheidender als diese unterschiedlichen *Vokabeln* sind jedoch die unterschiedlichen dahinterliegenden *Konzepte*, die aus den Interviews in Detailanalysen teilweise rekonstruiert werden können, wenn auch nicht flächendeckend. So lassen sich allein im Interview 30 (Martina und Henner) die folgenden vier Vorstellungen rekonstruieren, zwischen denen beide immer wieder wechseln vgl. Hahn 2008, Abschnitt 5.2.3):

- Umsatzänderungsgraph als derjenige Graph, der an jeder Stelle dieselbe Steigung hat wie der Umsatz-Zeit-Graph,
- totale Änderung des Bestands vom Anfangswert bis zum Zeitpunkt x, formal ausgedrückt $f(x) - f(0)$,
- durchschnittliche Änderung vom Anfangswert bis zum Zeitpunkt x, formal ausgedrückt $(f(x) - f(0)) / x$,
- konkrete Änderung im Zeitraum [x, x+1], formal $f(x+1) - f(x)$, oder für [x−1, x] analog $f(x) - f(x-1)$.

Dabei ist nur die letztgenannte Vorstellung die fachlich intendierte.

5.2 Fachliche Klärung: Komplexität des Ableitungskonzepts

Die Vielfalt der individuellen Vorstellungen macht deutlich, wie viele Entscheidungen im fachlich üblichen Ableitungskonzept als *momentane konkrete Änderung eines Bestands pro Zeiteinheit in einem Zeitpunkt* zusammenkommen. Die Übersicht in Abb. 12 (aus Hahn 2008, S.39, in Anlehnung an Danckwerts/Vogel 2006, wenn auch mit anderen Vokabeln) zeigt den Weg hin zu diesem Konzept in seinen vielschichtigen Aspekten und sie ermöglicht, einige der individuellen Konzepte dazu in Bezug zu setzen. (Anmerkung: Der Ausdruck „konkret" wurde erst auf Annika Willes mündliche Anregung hin eingeführt, in Hahn (2008) und den Materialien der Unterrichtsreihe wurde das Wort „absolut" benutzt.)

Während mit dem individuellen Konzept f(x) - f(0) die totale Änderung des Bestands im Zeitraum [0, x] betrachtet wird, erhält man mit f(x+1) – f(x) oder $f(x_0+h) - f(x_0)$ die *konkrete Änderung* eines Bestands in dem Zeitraum [x, x+1] beziehungsweise $[x_0, x_0+h]$. Für diese Vorstellung ist die Entscheidung notwendig, sich auf einen *Zeitraum* zu beziehen.

Die im individuellen Konzept (f(x) – f(0)) / x angelegte *Ratenbildung* ist auch für die Analysis zentral, um eine durchschnittliche Änderung im Zeitraum [0, x] zu erhalten (nach Übergang von der ersten zur zweiten Spalte zu $(f(x_0+h) - f(x_0)) / h$).

Dagegen kam der zur technischen Vereinfachung in der Analysis vollzogene *Grenzübergang* von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate (Übergang von der zweiten zur dritten Spalte) in den Interviews nicht vor, denn das Gedankenexperiment der Messung zu einem *Zeitpunkt* wurde in den Interviews aufgrund der Diskretheit der gemessenen Größen in den behandelten Sachkontexten nicht nahegelegt (andere Interviewaufgaben führen zu anderen Resultaten, vgl. Friedrich 2001).

Absolute Änderung im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	Durchschnittliche Änderung pro Zeiteinheit im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	Momentane Änderung pro Zeiteinheit zum Zeitpunkt x_0
$f(x_0 + h) - f(x_0)$	$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
konkrete Änderung des Bestands im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	durchschnittliche konkrete Änderung des Bestands pro Zeiteinheit im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	Momentane konkrete Änderung des Bestands pro Zeiteinheit zum Zeitpunkt x_0
	Ratenbildung	Grenzwertbildung

Abb. 12: Schritte hin zum gängigen Ableitungskonzept

Auch wenn die Lernenden im Rahmen des Interviews also noch nicht vollständig beim üblichen Ableitungskonzept angekommen sind, zeigen sich die in den vorhandenen Vorstellungen ausgedrückten Teilaspekte durchaus als Ressource, an die sich anzuknüpfen lohnt. Das Schwanken zwischen den Konzepten kann als Anlass für die Einleitung eines *Exaktifizierungsprozesses* genommen werden, der die vertikale Vorstellungsentwicklung zur *Ausdifferenzierung von Bestand und Änderung* begleitet.

Dieser Prozessschritt hat sich als entscheidend herausgestellt, bevor dann durch Grenzwertbildung auch die momentane Änderung eingeführt werden kann, um das theoretische Konzept der Ableitung auf der Basis der im diskreten Fall gewonnenen Intuitionen zu konsolidieren. Während diesem letzten Prozessschritt in der Literatur bereits viel Aufmerksamkeit gewidmet worden ist (Sierpinska 1987, vom Hofe 1998, Friedrich 2001, u.v.a.), ist die schlichte Unterscheidung zwischen Bestand und Änderung bisher zu wenig in den Blick genommen worden.

5.3 Erfassung alternativer Lernendenperspektiven: Prozentuale Messung von Änderungen

Neben diesen weiterentwicklungsfähigen Anknüpfungspunkten in den vorunterrichtlichen Vorstellungen der Lernenden haben die Interviews auch zur Rekonstruktion alternativer Sichtweisen beigetragen, insbesondere bzgl. der Frage, wie Änderungen *gemessen* werden. Besonders überrascht haben uns die Lernenden im Interview nämlich mit Konzeptualisierungen von Änderung in der folgenden Art:

365. M: Das heißt, wir haben meinetwegen hier (*tippt in die Nähe des Wendepunkts im Umsatz-Zeit-Graphen des Produktlebenszyklus, Abb. 6 oben*) sechzig Prozent Steigung und da (*kurz vor dem Hochpunkt im Umsatz-Zeit-Graphen*) haben wir auf einmal nur noch fünf. .. Oder zehn

(Martina aus Interview 30)

328. B: Und da (*zeigt auf den Beginn des Umsatz-Zeitgraphen des Produktlebenszyklus, Abb. 6 oben*) ist die Steigerung dann immer gleich, weil da ist ja immer/ Ja. Sieht exponentiell aus. Weil es verändert sich nicht. Es ist immer der gleiche Prozent der Steigerung.

(Bernd aus Interview 27, Hahn 2008)

Martina und Bernd aktivieren hier beide eine prozentuale Beschreibung der Änderung, ein zunächst erstaunliches Phänomen, erscheint doch aus der Rückschauperspektive die Messung in konkreten Zahlen bei der Ableitungsfunktion recht selbstverständlich. Bernd bezieht sich dabei auf seine unterrichtlichen Erfahrungen mit exponentiellem Wachstum und erkennt Ähnlichkeiten des Beginns der Kurve im Produktlebenszyklus mit der Exponentialfunktion. Von exponentiellem Wachstum weiß er, dass es durch eine gleichmäßige prozentuale Änderung charakterisiert ist, und formuliert deswegen: „es verändert sich nicht".

Martina dagegen aktiviert ihre lebensweltliche Erfahrung mit Straßen-Steigungen, die auf Verkehrsschildern prozentual angeben werden (wenn auch nicht mit 60%). Dieses alternative Konzept ist insofern weniger weitreichend als Bernds, als dabei die Prozente lediglich zur Beschreibung eines Verhältnisses konkreter Zahlen genutzt werden.

Gerade die von Bernd gewählte prozentuale Messung im Zusammenhang mit exponentiellem Wachstum wiederholte sich in vielen Interviews: In 14 von 24 Interviews

zum Produktlebenszyklus taucht bei mindestens einem Interviewten eine prozentuale Angabe über die Bestandsänderung auf, davon bei zehn mit explizitem Bezug zu exponentiellem Wachstum.

Es scheint also, als wäre die Quantifizierung der Änderungen von Beständen durch konkrete Zahlen in der Vorschauperspektive weniger selbstverständlich als in der Rückschau für diejenigen, die sich an das Ableitungskonzept der Analysis gewöhnt haben. Könnte hier eine mögliche Ursache dafür liegen, dass Lernende Änderungen in außerunterrichtlichen Situationen (wie etwa in dem Zeitungsartikel zur Neuverschuldung) zu wenig mit dem unterrichtlich erworbenen Ableitungskonzept in Verbindung bringen? Eine solche These hat zumindest durch analoge Forschungsergebnisse zu nicht erfolgreichen Conceptual-Change-Prozessen in anderen Gegenstandsbereichen eine gewisse Plausibilität (siehe Abschnitte 2.2.3 und 2.2.4). Uns erschien es daher lohnend, den Diskrepanzen weiter nachzugehen.

Ein möglicher erklärender Faktor für das wiederholte Auftauchen des divergierenden Konzepts zur Messung von Änderungen kann in der zeitlichen Nähe der Interviews zur unterrichtlichen Behandlung von Exponentialfunktionen liegen. Der Bedeutung dieser alternativen Sichtweise wird man jedoch nur gerecht, wenn auch weitere Gründe einbezogen werden.

5.4 Fachliche Klärung: Wieso nicht prozentual messen?

Auch wenn *im Kontext der Analysis* die prozentuale Messung von Änderungen in der Rückschau wenig naheliegend ist, so zeigt sie sich doch als durchaus geläufig *im wirtschaftlichen Kontext*, aus dem die Produktlebenszyklus-Aufgabe stammt: Zinssätze für Vermögensentwicklung, Inflationsraten, Lohnzuwächse, Umsatzsteigerung; In all diesen wirtschaftlichen Zusammenhängen werden Änderungen in einem Zeitraum nicht als Änderungsrate im Sinne der Ableitung angegeben, sondern durch eine prozentuale Angabe, also einem Quotienten $f(x_0+h)/f(x_0)$, abzüglich 1 (vgl. Abb. 13), mit dem erfasst wird, um welchen Anteil sich ein Bestand geändert hat.

Dadurch kann Wachstum in Relation zum bestehenden Bestand beschrieben werden, so dass z.B. das Wachstum des Bruttoinlandsprodukts zweier unterschiedlich wirtschaftsstarker Länder besser vergleichbar wird. Für die Geschwindigkeit dagegen wäre eine solche Messung der Änderung in Relation zu dem bereits zurück gelegten Weg unzweckmäßig. Es handelt sich zwar in beiden Fällen um Raten, die jedoch sorgfältig konzeptionell auseinander gehalten werden müssen (dass dies nicht nur Schülerinnen und Schülern schwer fällt, zeigt etwa die fälschliche Erwähnung der Inflationsrate als Beispiel für Ableitung bzw. Differenzenquotient selbst in so soliden Fachdidaktik-Büchern wie Blum/Törner 1983, S. 92 oder Tietze et al. 1997, S. 210).

	Absolute Änderung im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	Durchschnittliche Änderung pro Zeiteinheit im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	Momentane Änderung pro Zeiteinheit zum Zeitpunkt x_0
Konkrete Messung durch Ableitung	$f(x_0 + h) - f(x_0)$	$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
	konkrete Änderung des Bestands im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	durchschnittliche **konkrete** Änderung des Bestands pro Zeiteinheit im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	Momentane **konkrete** Änderung des Bestands pro Zeiteinheit zum Zeitpunkt x_0
Prozentuale Messung durch p-Ableitung	$\frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} - 1$	$\left(\frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)}\right)^{\frac{1}{h}} - 1$	$p_f(x_0) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)}\right)^{\frac{1}{h}} - 1$
	prozentuale Änderung des Bestands im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	durchschnittliche **prozentuale** Änderung des Bestands pro Zeiteinheit im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	Momentane **prozentuale** Änderung des Bestands pro Zeiteinheit zum Zeitpunkt x_0

Abb. 13: Konkrete und prozentuale Änderungen – Gegenüberstellung und Weg zur p-Ableitung

In einigen Kontexten tauchen beide Arten der Änderungsmessung gleichzeitig auf; so wird z.B. in dem Eurogate-Artikel in Abb. 9 neben den prozentualen Änderungsangaben (11%, 7,5%, 12 %) auch eine konkrete Änderungszahl angegeben („800 000 Standardbehälter“). Warum also gibt es keine Differentialrechnung der prozentualen Ableitung?

Um dieser Frage nachzugehen, wurde in Hahn (2008) die in Fischer (1976, S. 188) nur kurz angerissene Idee der prozentualen Ableitung formalisiert und eine Definition der sogenannten p-Ableitung parallel zum Formalismus der klassischen Ableitung entwickelt (angedeutet in Abb. 13).

Man kann beweisen, dass diese p-Ableitung (in Analogie zur Steigung der linear approximierenden Geraden als Deutung für die klassische Ableitung) gerade die Steigung der approximierenden Exponentialfunktion bestimmt.

Damit erhält man, angeregt durch die Gegenüberstellung von fachlich üblichen und divergierenden Schülerkonzepten, eine mögliche konkurrierende Theorie der Ableitungen, die die Kontingenz der klassischen Theoriebildung erst richtig bewusst macht (vgl. Kitcher 1984, Prediger 2004): Die klassische Ableitung ist *eine unter mehreren Möglichkeiten*, das qualitative Konzept der Änderung exakt zu fassen; andere wären auch möglich und sind auch bis zu einem gewissen Grad sogar etabliert.

Diese Neuformulierung der Perspektive auf Ableitungen ist ein Beispiel für die Bedeutung des von Gropengießer formulierten Anspruchs der Didaktischen Rekonstruktion bzgl. Rückwirkungen auf das Fachverständnis (vgl. dazu auch Prediger 2005):

> „Die fachdidaktische Arbeit betrifft also sowohl den wissenschaftlichen als auch den unterrichtlichen Gegenstand. Die Frage, wann und inwiefern die erhobenen Schülervorstellungen für das Lernen fachwissenschaftlicher Inhalte förderlich oder hinderlich sein können, soll nicht durch einen einseitig normativen Vergleich mit wissenschaftlichen Konzepten, sondern in wechselseitiger Betrachtung beantwortet werden, *die beide Bereiche nicht unverändert bestehen lässt*." (Gropengießer 2001, S. 15, Hervorhebung eingefügt)

Doch auch wenn die Entwicklung einer Theorie der p-Ableitung möglich ist und somit ein Beispiel für die *Kontingenz* der klassischen Begriffsbildung liefert, war die mathematische Begriffsbildung *nicht beliebig*, da sich letztlich die klassische Ableitung als überlegen erweist. Denn zum einen ist die Theorie der p-Ableitungen technisch komplizierter als die klassische Theorie der Differentialrechnung und auch nicht so glatt ins Mehrdimensionale verallgemeinerbar, zum anderen vermag die p-Ableitung drei für die Entwicklungsgeschichte der Analysis zentrale Problemkontexte nicht adäquat zu fassen, nämlich die Mechanik, das Tangentenproblem und die Gesamteffekte (vgl. Hahn 2008).

5.5 Didaktische Strukturierung: Alternativen sichtbar machen

Ausgehend von der in Abschnitt 5.2 formulierten These, dass die Divergenz zwischen individuellen und fachlichen Konzepten zur Messung von Änderungen *eine* mögliche Erklärung für den begrenzten Transfer der im Unterricht erworbenen Vorstellungen auf außerunterrichtliche Beispiele liefert, führt uns die im vorigen Abschnitt skizzierte Auslotung der Alternativen im Rahmen der Fachlichen Klärung für die Didaktische Strukturierung zu dem Ansatz, diese auch im Lernprozess sichtbar zu machen.

Wir sehen dies als lernförderliche Bedingung für eine Vorstellungsentwicklung im horizontalen Sinne: Sollen Lernende nicht nur ihr Repertoire an individuellen Vorstellungen erweitern, sondern auch befähigt werden, situationsangemessen die richtigen Konzepte zu aktivieren, dann sollte der Unterricht das breite Repertoire individueller Ansätze aufgreifen und gezielt Änderungen im konkreten und im prozentualen Sinn vergleichend thematisieren.

Einführend wurden dazu im Unterricht etwa die Angaben zu „Bestand zu einem Zeitpunkt", „konkrete Änderung des Bestands" und „prozentuale Änderung des Bestands" aus Zeitungsartikeln wie dem Eurogate-Artikel aus Abb. 9 rekonstruiert: Welche Zahlen finden wir hier, welche können wir erschließen (vgl. Abb. 14)?

Jahr		2002	2003	2004
Anzahl umgeschlagener Container		9 511 111	10 700 000	11 500 000
Zunahme der Anzahl umgeschlagener Container	Prozentual		+ 12,5 %	+ 7,5%
	Konkret		+ 1 188 889	+ 800 000

Abb. 14: Rekonstruktion der Daten zum Eurogate-Artikel aus Abb. 9 (schwarz gegeben, grau rekonstruiert)

Ein solches Beispiel liefert nicht nur eine umwelterschließende Gelegenheit zur Wiederholung der Prozentrechnung, sondern schafft durch die parallele Arbeit mit prozentualen und konkreten Beschreibungen eine wichtige Erfahrungsbasis. Darauf aufbauend können dann Gemeinsamkeiten und Unterschiede ebenso herausgearbeitet werden wie Beispiele von Situationen, in denen jeweils eine der beiden Beschreibungen günstiger ist. Es kann reflektiert werden, aus welchen Gründen sich die eine oder andere Art gewohnheitsmäßig eingebürgert haben könnte. Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler, dass prozentuale Angaben an den Stellen angemessener sind, wo die Änderung in Bezug zum Bestand gesetzt werden soll, und konkrete Abgaben da, wo es um die konkreten Zahlen unabhängig vom Bestand geht. „Das ist ja wie bei absoluten und relativen Häufigkeiten - je nachdem, ob man die Anteile wissen will oder richtige Zahlen", sagte ein Schüler und drückte damit ein grundlegendes Verständnis zur Situationsbezogenheit der spezifischen Konzepte aus.

So haben die Lernenden die Möglichkeit, die konkrete Änderungsmessung durch die Ableitung als *eine* bewährte Möglichkeit unter mehreren kennenzulernen. Während bis hin zur durchschnittlichen Änderungsmessung sowohl die konkrete also auch die prozentuale Beschreibungsweise im Unterricht thematisiert werden kann (und vom Autor in seiner Unterrichtsreihe auch thematisiert wurde), ist der Übergang von den durchschnittlichen zu den momentanen Änderungen dann der geeignete Moment für eine konsequente Fokussierung auf die konkrete Beschreibungsweise, denn die Alternative der p-Ableitung wäre für die Schule nicht angemessen. Die vorherige Einbettung der Ableitung als momentane konkrete Änderung eines Bestands pro Zeiteinheit in ihre „Nachbarkonzepte" ermöglicht die Ausschärfung des Begriffsverständnisses, sensibilisiert für die spezifischen Charakteristiken des Begriffs und reduziert die Wahrscheinlichkeit für mögliche Verwechslungen mit Nachbarkonzepten, die selbst ausgewiesenen Fachleuten unterlaufen können (s.o.). Will man den inhaltlichen Kern des Ableitungskonzepts im Unterricht herausarbeiten, ist dazu die Kontrastierung mit anderen Änderungsmessungen ein hilfreiches Mittel, um die spezifischen Aspekte der Ableitung deutlich zu machen. So vertieft die Auseinandersetzung mit kontrastierenden Beispielen das Verständnis über die Ableitung – nicht nur bei den Autoren des Artikels.

Insgesamt besteht die durch analoge Erfahrungen in anderen Themengebieten (z.B. Prediger 2005, 2008) begründete Hoffnung, durch diese Einbettung des Ableitungskonzepts in mögliche Alternativen anderer Änderungsmessungen eine bessere Anbindung an das Denken der Lernenden und damit auch bessere spätere Transfermöglichkeiten zu schaffen. Dass mathematische Begriffsbildung dabei als *kontingent, aber nicht beliebig* erfahrbar wird, ist ein interessanter Nebeneffekt des auf horizontale Vorstellungsentwicklung angelegten Unterrichts, der auch Raum lässt für die Entwicklung von Differenzkompetenz (vgl. Abschnitt 2.1). Heike hat sie im Unterrichtsversuch klar zum Ausdruck gebracht in ihrem Urteil: „Ich finde prozentuale Angaben über Zunahmen besser als absolute (*meint hier konkrete Angaben*), weil die prozentualen Angaben sind irgendwie allgemeiner."

6 Zusammenfassung

In diesem Artikel wurde das Forschungsprogramm der Didaktischen Rekonstruktion genutzt zur Analyse zentraler Aspekte der Differentialrechnung. Ausgehend von der normativen Orientierung auf Mathematik als Verstärker des Alltagsdenkens unter Berücksichtigung von Differenzkompetenz wurden vertikale und horizontale Vorstellungsentwicklung als die lerntheoretische Basis der Rekonstruktion vorgestellt und dabei auf Ansätze zum Conceptual Change zurückgegriffen.

Mathematikdidaktik wird in diesem Ansatz als *empirisch und fachlich gestützte Design Science* verstanden, die auf konstruktivistischer Basis vorstellungsorientierte Lernarrangements zu entwickeln und zu erforschen hat. Die Spezifizierung von lernförderlichen Anknüpfungspunkten und lernhinderlichen Schwierigkeiten aus der Gegenüberstellung von fachlichen und individuellen Perspektiven erweist sich als gute empirische Basis, die eine tiefgehende fachliche Klärung ermöglicht, in der sich das Verständnis des Lerngegenstands weiter entwickelt. Dieses Vorgehen hat sich bereits in drei verschiedenen mathematischen Themengebieten bewährt (Hahn 2008 und dieser Artikel für die Analysis, Prediger 2005 für die Einführung in die Wahrscheinlichkeit und Prediger 2008 und Prediger 2003 für die Multiplikation von Brüchen).

Konkret wurden aus dem umfassenden Gebiet der Einführung in die Differentialrechnung zwei exemplarische Stränge herausgegriffen: die gegensinnige Kovariation als ein Beispiel für vertikale Vorstellungsentwicklung und die Frage der Änderungsmessung als ein Beispiel für horizontale Vorstellungsentwicklung, in der es weniger um die Überwindung individueller Konzepte, als um ihre Ergänzung durch und Gegenüberstellung zu fachlichen Konzepten und die situationsangemessene Aktivierung der passenden Schichten geht. Die ersten Unterrichtsversuche geben Anlass zu der Hoffnung, dass Lernschwierigkeiten im vertikalen und im horizontalen Sinne besser überwinden kann, wer Diskrepanzen zwischen individuellen und fachlichen Konzepten ernst nimmt und unterrichtlich als Lerngelegenheiten fruchtbar macht.

Gleichwohl sei an dieser Stelle auch betont, dass die zeitweise Zurückdrängung des Kalküls zugunsten der inhaltlichen Vorstellungen in der Analysis für Lernende wie für Lehrende insofern eine große Herausforderung darstellt, als die Analysis als eines der jüngsten Gebiete der Schulmathematik voller nicht leicht nachvollziehbarer Ideen und Konzepte ist, über die ein rein kalkülorientierter Unterricht einfach hinweggehen kann. Auch dies ist ein Plädoyer für eine stärkere Gewichtung der qualitativen Anfänge gegenüber den fachlich präzisierten formalisierten Tiefen der Theoriebildung, deren Berechtigung für Grundkurse durchaus weiter diskutiert werden sollte, gerade wenn wir ihre vorstellungsorientierte Basis ernst nehmen wollen. Auch für Leistungskurse sollte eine neue Balance zwischen kalkülhaften und inhaltlichen Anteilen gefunden werden, ohne allerdings den Kalkül als mächtiges Werkzeug aufzugeben.

Dass die hier vorgelegten Fallstudien zur Didaktischen Rekonstruktion der Differentialrechnung im Untertitel des Artikels bewusst als Beiträge zur Analysis insgesamt bezeichnet werden, soll schließlich damit begründet werden, dass die herausgearbeitete zentrale Bedeutung der Kategorien Bestand und Änderung auch für einen vorstellungsorientierten Zugang zur *Integralrechnung* die gleiche Relevanz besitzen. Hier ergeben sich weitere naheliegende Forschungs- und Entwicklungsperspektiven.

7 Literatur

Aufschnaiter, Stefan von / Fischer, Hans E. / Schwedes, Hannelore (1992): Kinder konstruieren Welten. Perspektiven einer konstruktivistischen Physikdidaktik, in: Schmidt, Siegfried J. (Hrsg.): Kognition und Gesellschaft, Suhrkamp, Frankfurt.

Baumert, Jürgen / Bos, Wilfried / Lehmann, Rainer (Hrsg.) (2000). Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie - Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn, Leske + Budrich, Leverkusen.

Beck, Christian / Maier, Hermann (1994): Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung, in: Maier, Hermann / Voigt, Jörg (Hrsg.): Verstehen und Verständigung, Aulis Verlag, Köln, S. 43-76.

Bender, Peter (1991): Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen der Sekundarstufen, in: Postel, Helmut / Kirsch, Arnold / Blum, Werner (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel, Schroedel Verlag, Hannover, S. 48-60.

Blum, Werner (2000): Perspektiven für den Analysisunterricht, in: Der Mathematikunterricht 46 (4-5), S. 5-17.

Blum, Werner / Kirsch, Arnold (1979): Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen, in: Der Mathematikunterricht 25(3), S. 6-24.

Blum, Werner / Törner, Günter (1983): Didaktik der Analysis, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Blum, Werner / vom Hofe, Rudolf / Jordan, Alexander / Kleine, Michael (2004): Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA, in: Neubrand, Michael (Hrsg.): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland, VS Verlag für Sozialwissenschaften, Wiesbaden, S. 145-157.

Borneleit, Peter / Danckwerts, Rainer / Henn, Hans-Wolfgang / Weigand, Hans-Georg (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe, in: Journal für Mathematikdidaktik 22 (1), S.73-90.

Borovcnik, Manfred (1992): Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik, BI Wissenschaftsverlag Mannheim.

Danckwerts, Rainer / Vogel, Dankwart (1992): Quo vadis, Analysisunterricht?, in: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 45(6), S. 370-374.

Danckwerts, Rainer / Vogel, Dankwart (2006): Analysis verständlich unterrichten, Spektrum, Heidelberg.

Dressler, Bernhard (2007): Modi der Weltbegegnung als Gegenstand fachdidaktischer Analysen, in: JMD 3/4, S. 249-262.

Duit, Reinders (1993): Research on students' conceptions - developments and trends, in: Novak, Joseph (Hrsg.): Proceedings of the Third International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, Cornell University Press, Ithaca.

Duit, Reinders / von Rhöneck, Christoph (1996) (Hrsg.): Lernen in den Naturwissenschaften, Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.

Ernest, Paul (1994): Constructivism: which form provides the most adequate theory of mathematics learning?, in: Journal für Mathematikdidaktik 15 (3-4), S. 327-342.

Fischbein, Efraim (1987): Intuition in science and mathematics: An educational approach. Reidel, Dordrecht.

Fischer, Roland (1976): Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen, in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (4). S. 185-192.

Freudenthal, Hans (1983): Didactical Phenomenology of mathematical structures, Kluwer, Dordrecht.

Friedrich, Hauke (2001): Eine Kategorie zur Beschreibung möglicher Ursachen für Probleme mit dem Grenzwertbegriff, in: Journal für Mathematikdidaktik 3/4, S. 207-230.

Gerstenmaier, Jochen / Mandl, Heinz (1995). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive, in: Zeitschrift für Pädagogik, 33, S. 867-888.
Gropengießer, Harald (2001): Didaktische Rekonstruktion des Sehens. Wissenschaftliche Theorien und die Sicht der Schüler in der Perspektive der Vermittlung, DIZ Oldenburg.
Hahn, Steffen (2008): Bestand und Änderung – Grundlegung einer vorstellungsorientierten Differentialrechnung, Beiträge zur Didaktischen Rekonstruktion, Bd. 21, DIZ Oldenburg.
Hahn, Steffen / Prediger, Susanne (2004): Vorstellungsorientierte Kurvendiskussion – Ein Plädoyer für das Qualitative, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 217-220.
Heymann, Hans Werner (1996): Allgemeinbildung und Mathematik, Beltz Verlag, Weinheim.
Kaldrimidou, Maria / Tzekaki, Marianna (2006): Theoretical issues in research of mathematics education: some considerations, in: Bosch, Marianna (Hrsg.): Proceedings of the 4th Conference on Research in Mathematics Education, Sant Feliu 2004.
Kattmann, Ulrich / Duit, Reinders / Gropengießer, Harald / Komorek, Michael (1997): Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung, in: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften 3 (3), S.3-18.
Kattmann, Ulrich / Gropengießer, Harald (1996): Modellierung der didaktischen Rekonstruktion, in: Duit, Reinders / von Rhöneck, Christoph (Hrsg.): Lernen in den Naturwissenschaften, IPN Kiel, S. 180-204.
Kitcher, Philip (1984): The nature of mathematical knowledge, Oxford University Press, New York.
Lamnek, Siegfried (2005): Qualitative Sozialforschung. Lehrbuch, Beltz, Weinheim / Basel.
Lehtinen, Erno / Merenluoto, Kaarina / Kasanen, Eero (1997): Conceptual change in mathematics: From rational to (un)real numbers, in: European Journal of Psychology of Education, 12 (2), S. 31-145.
Lengnink, Katja (2003): Situative Vorstellungswelten von Lernenden und mathematische Grundvorstellungen: Auf dem Weg zu mathematischer Mündigkeit., Preprint 2291, Fachbereich Mathematik, TU Darmstadt.
Lengnink, Katja / Peschek, Werner (2001): Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung, in: Lengnink, Katja / Prediger, Susanne / Siebel, Franziska (Hrsg.): Mathematik und Mensch. Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik, Verlag Allgemeine Wissenschaft, Mühltal, S. 65-81.
Lenné, Helge (1969): Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Klett Verlag, Stuttgart.
Malle, Günther (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation, in: Mathematik lehren 103, S. 8-11.
Merkel, Angela (1986): Untersuchung des Mechanismus von Zerfallsreaktionen mit einfachem Bindungsbruch und Berechnung ihrer Geschwindigkeitskonstanten auf der Grundlage quantenchemischer und statistischer Methoden, Dissertation, Akad. d. Wiss., Berlin.
Petri, Jürgen / Niedderer, Hans (2001): Kognitive Schichtenstrukturen nach einer UE Atomphysik (SII), in: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften 7, S. 53-68.
Posner, George / Strike, Kenneth / Hewson, Peter W. / Gertzog, William A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change, in: Science Education, 66 (2), 211-227.
Prediger, Susanne (2003): Brüche bei den Brüchen – Bildungschancen nutzen durch Auseinandersetzung mit epistemologischen Denkhürden, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker, Hildesheim, S. 509-513.
Prediger, Susanne (2004): Mathematiklernen in interkultureller Perspektive. Mathematikphilosophische, deskriptive und präskriptive Betrachtungen, Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Bd. 6, Profil Verlag, München/Wien.
Prediger, Susanne (2005): „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen.“ Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik, in: mathematica didactica 28 (2), S. 23-47.

Prediger, Susanne (2008): The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions, in: Learning and Instruction, 18 (1), S. 3-17.
Reinmann-Rothmeier, Gabi / Mandl, Heinz (2001): Unterrichten und Lernumgebungen gestalten, in: Krapp, Andreas / Weidenmann, Bernd (Hrsg.): Pädagogische Psychologie, Psychologie Verlags Union, Weinheim, S. 603-648.
Schnotz, Wolfgang (1998): Conceptual Change, in: Rost, Detlef H. (Hrsg.): Handwörterbuch Pädagogische Psychologie, Psychologie Verlags Union, Weinheim, S. 53-57.
Schupp, Hans (1992): Optimieren, BI-Verlag , Mannheim.
Sierpinska, Anna (1987): Humanities students and epistemological obstacles related to limits, in: Educational Studies in Mathematics, 18, 371-397.
Tietze, Uwe-Peter / Klika, Manfred / Wolpers, Hans (1997) (Hrsg.): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1, Vieweg, Braunschweig.
Tyson, Louise M. / Venville, Grady J. / Harrison, Allan G. / Treagust, David F. (1997): A multidimensional framework for interpreting conceptual change in the classroom, in: Science Education 81(4), 387-404.
Vollrath, Hans-Joachim (1989): Funktionales Denken, in: JMD 10, S. 3-37.
vom Hofe, Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte, Spektrum, Heidelberg.
vom Hofe, Rudolf (1998): Probleme mit dem Grenzwert – Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse, in: Journal für Mathematikdidaktik, 19 (4), S. 257-291.
Vosniadou, Stella / Verschaffel, Lieven (2004) (Hrsg.): The Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching, in: Learning and instruction 14(5), pp. 445-548.
Winter, Heinrich (1983): Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht, in: Journal für Mathematikdidaktik 4 (3), S. 175-204.
Winter, Heinrich (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, in: Mitteilungen der DMV 2 , S. 35-41.
Wittmann, Erich C. (1992): Mathematikdidaktik als „design science“, in: JMD 13 (1), S. 55-70.

Adresse der Autoren

Dr. Steffen Hahn
Fachbereich Mathematik, Universität Bremen
shahn@math.uni-bremen.de

Prof. Dr. Susanne Prediger
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts
TU Dortmund
prediger@math.uni-dortmund.de