Vorfassung des Einführungsartikels von
PM Heft 20: Nachgedacht – Sinn gemacht

Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht

Werner Peschek, Susanne Prediger & Edith Schneider

Reflektieren ist für mathematische Bildung zentral, darüber herrscht großer Konsens. Doch wie genau, über was, und wieso eigentlich? Der Artikel stellt eine bildungstheoretische Orientierung vor, die zur Begründung und Spezifizierung von Reflexionswissen hilfreich sein kann. An Beispielen wird gezeigt, wie für unterschiedliche Reflexionsarten geeignete Reflexionsanlässe auftreten bzw. geschaffen werden können.

Pia: *Wieso ist $\sqrt{-1}$ eine Zahl, obwohl ihr gar kein Punkt auf dem Zahlenstrahl entspricht?*

Fabian: *Wenn ich ausrechne, dass die 629 Kinder der Schule mit 12,33 Bussen alle transportiert werden könnten, kann ich auf 12 abrunden. Was bedeutet das für die Situation der Kinder?*

Lennart: *Ich glaube nicht, dass zwei Bagger für einen Graben doppelt so lange brauchen wie vier Bagger!*

Victoria: *Wieso sind so viele Kanaldeckel rund?*

Julian: *Wenn uns morgen der Atomreaktor um die Ohren fliegt, nützt es mir gar nichts, dass die Wahrscheinlichkeit dafür nur eins zu einer Million beträgt. Was sagt uns überhaupt die Wahrscheinlichkeit?*

Sabeth: *Glaubt eigentlich irgend jemand in unserem Land, dass man mit dem Notenschnitt 1,1 besser für das Medizinstudium geeignet ist als mit dem Notenschnitt 1,2? Wieso wird er dann trotzdem genutzt?*

Robert: *Da hat man eine komplizierte Zinseszinsformel, aber wenn es darauf ankommt, dann feilscht man endlos um den Zinssatz und die Bearbeitungsgebühren. Warum verzichtet man nicht auf die komplizierte Formel und feilscht gleich?*

Lilly: *Ich gebe schon zu, dass Mathe wichtig ist. Aber das gilt für die Medizin ebenso. Warum also müssen wir Mathe lernen, nicht aber Medizin?*

Tim: *Ich bestreite ja nicht, dass Mathematik in der Technik und in der Wirtschaft wichtig ist. Aber ich will weder Techniker werden noch Wirtschaftler – warum muss ich trotzdem Mathe lernen?*

„Alle Kinder treten als Fragezeichen in die Schule ein und verlassen sie als Punkt." (Postman 1995, S. 97)

Schülerinnen und Schüler haben Fragen und Meinungen. Manchmal stellen sie diese Fragen sogar, äußern ihre Meinungen. Nicht immer sind diese Fragen und Meinungen besonders überlegt und tiefgehend. Nicht immer finden Lehrkräfte im Unterricht Zeit, sich auf solche Meinungen oder Fragen ernsthaft einzulassen. Aber wer keine ernsthaften Rückmeldungen zu seinen Meinungen und Fragen bekommt, könnte aufhören, Fragen zu stellen, Meinungen zu äußern. Könnte aufhören, sich für solche Fragen und Meinungen zu interessieren – außer sie kommen zur Klassenarbeit.

Mathematik lernt man, indem man Mathematik betreibt?

Auf den ersten Blick könnte man diese Frage eindeutig mit „ja" beantworten. Aber was genau meint eigentlich „Mathematik betreiben"? Meint es bloß Rechnen, oder meint es nicht doch sehr wesentlich auch, über die verwendeten mathematischen Begriffe, Verfahren und Konzepte genauer nachzudenken, über die Situation, in der man sie verwendet und darüber, warum und wozu man sie in dieser Situation verwendet? Meint Mathematik betreiben nicht auch darüber nachzudenken, welche Bedeutung Mathematik für unsere Gesellschaft und insbesondere auch für einen selbst hat bzw. haben kann?

Für die Mathematikdidaktik scheint die Antwort ziemlich klar: Mathematisches Tun beschränkt sich nicht auf die korrekte Durchführung von Rechenoperationen, es umfasst sehr wesentlich auch vielfältige Reflexionen im Hinblick auf die Bedeutung mathematischer Begriffe, Konzepte, Darstellungsformen und Methoden. Seit langem wird die Vorherrschaft des kalkülhaften Operierens im Mathematikunterricht als „blinder Rechenaktionismus" kritisiert (Winter, zitiert nach Fischer/Malle 2004, S. 221) oder als „Dressur des Unverstandenen" (Wagenschein, zitiert nach Vollrath 1987, S. 376). Gefordert wird stattdessen mehr „Nachdenklichkeit" im Mathematikunterricht (als Tätigkeit, Fähigkeit, vor allem aber auch als Grundhaltung, vgl. etwa Prediger 2005).

So kann es kaum verwundern, dass Reflexionen auch bei PISA und in Bildungsstandards eine bedeutsame Rolle spielen: in PISA 2003 als einer der drei „competency clusters" (OECD 2003, S. 46ff), in den deutschen Bildungsstandards als „Anforderungsbereich III" (KMK, S. 13ff) und in den österreichischen Bildungsstandards als eine Ausprägung der Kompetenzdimension „Komplexitätsbereich" (ÖKZ-M 2007, S. 14).

Selbstverständlich beinhaltet jeder Lernprozess auch reflektierende Denktätigkeiten, ein Lernen ohne Reflexion ist kaum vorstellbar. Die didaktische Forderung nach mehr Reflexion im Unterricht kann also nur bedeuten, dass das Reflektieren im Unterrichtsgeschehen verstärkt angeregt und Reflexionen explizit zum Inhalt des Unterrichts gemacht werden sollten. Dem muss im Unterricht entsprechend Raum und vor allem Bedeutung (auch in der Leistungsbeurteilung!) eingeräumt werden.

Während darüber in dieser Allgemeinheit ein gewisser Konsens herrscht, wird bei genauerem Hinsehen unter Reflektieren im einzelnen doch sehr Unterschiedliches verstanden.

Was ist mit Reflexion gemeint?

Reflexion und Reflexionswissen – Prozess und Produkt

Reflexion ist aus unserer Sicht eine Denktätigkeit, also ein *Prozess* (vgl. Peschek 2005, S. 59f). Das Anliegen ist, sowohl entsprechende kognitive *Fähigkeiten* zur Reflexion mathematischer Sachverhalte weiter zu entwickeln als auch entsprechende *Einstellungen und Haltungen* (etwas genauer wissen und verstehen zu wollen, sich selbst ein Bild zu machen, Zusammenhänge zu erkennen oder sich ein Urteil bilden zu wollen …, vgl. auch Prediger 2005).

Reflexion als Prozess kann aber nicht Selbstzweck sein. Mit der Forderung nach mehr Reflexion im Mathematikunterricht ist selbstverständlich auch die Erwartung verbunden, dass dann die Lernenden auch über entsprechendes Wissen über Zusammenhänge, Beziehungen, Einschätzungen, Bewertungen etc. (kurz: *Reflexionswissen*) verfügen. Wir kommen darauf unten zurück.

Unterschiedliche Perspektiven

In seiner Vielfältigkeit, Vielschichtigkeit und Komplexität entzieht sich der Begriff der Reflexion (als Prozess) einer einfachen und präzisen Definition. Sehr allgemein kann man folgende Arbeitsdefinition geben:

> Reflexion meint das Nachdenken über Zusammenhänge, die nicht unmittelbar (objektsprachlich) gegeben sind.

Eine solch allgemeine Arbeitsdefinition wird je nach Perspektive ganz unterschiedlich ausgefüllt (vgl. dazu auch Neubrand 1990):

- Aus *lernpsychologischer* Perspektive zielt dies auf jedes Wechseln von der objektsprachlichen Ebene im engeren Sinne (etwa der mathematischen Formelsprache) zu einer Meta-Ebene, etwa die Ebene der inhaltlichen Vorstellungen zu mathematischen Begriffen und Verfahren. Dies wird z. B. angeregt durch Verbalisierungsaufträge, Ringen um Bedeutungen mathematischer Begriffe, Rechengeschichten u. ä. (vgl. dazu die in Kuntze/Prediger 2005 vorgestellten Schreibanlässe).
  Julian: Wenn uns morgen der Atomreaktor um die Ohren fliegt, nützt es mir gar nichts, dass die Wahrscheinlichkeit dafür nur eins zu einer Million beträgt. Was sagt uns überhaupt die Wahrscheinlichkeit?
  Viele empirische Studien haben inzwischen gezeigt, dass solcherart Reflexionen für einen verständnisorientierten und nachhaltigen Mathematikunterricht konstitutiv sind. Diese wichtige Perspektive wird daher in einem PM-Heft des nächsten Jahrgangs wieder aufgegriffen.

- Aus *metakognitiver Perspektive* wird auf das Reflektieren des eigenen Denkens fokussiert, wie etwa bei Aufträgen, den Hintergrund eines typischen Fehlers zu suchen (vgl. z. B. Kaune 2006). Der Ausdruck „Objektsprache" der obigen Arbeitsdefinition bezieht sich hier also auf die Mathematik selbst, die Meta-Ebene auf das Nachdenken und Reden über das eigene Denken und Handeln.
  Fabian: Wenn ich ausrechne dass die 629 Kinder der Schule mit 12,33 Bussen alle transportiert werden könnten, kann ich auf 12 abrunden. Aber ist mein Vorgehen sinnvoll? Wie kann ich mich kontrollieren, ob ich etwas für die Situation sinnvolles berechne?
  Auch bzgl. dieser spezielleren Form der Reflexion gibt es viele Belege für ihre lernpsychologische Bedeutung, denn durch Metakognition können die für mathematisches Denken so wichtigen Kontrollstrategien wie die gezielten Fragen in der fiktiven Weiterführung von Fabians Reflexion ausgebildet werden (vgl. Sjuts 2001 u.v.a.).
- Aus *bildungstheoretischer Perspektive* geht es bei der Reflexion von Mathematik vor allem darum, über die Rolle und Bedeutung der Mathematik für jedes aktive Mitglied unserer Gesellschaft und für die Gesellschaft insgesamt nachzudenken (Fischer 2001, 2003). In diese Gruppe zählen wir auch Reflexionskonzepte, die sich gesellschaftskritischen Forderungen nach Emanzipation, Mündigkeit und Demokratiebewusstsein verpflichtet fühlen (etwa Lengnink 2005, Lengnink/Prediger 2001, Skovsmose 1998). (Für Konkretisierungen s.u.)

Selbstverständlich liefert jede dieser Perspektiven didaktisch und unterrichtspraktisch wichtige Aspekte und Anregungen. In diesem PM-Heft werden wir aber vorrangig die Reflexion im Mathematikunterricht *aus bildungstheoretischer Perspektive* beleuchten. Dazu soll zunächst die von Roland Fischer (2001, 2003) entwickelte bildungsphilosophische Orientierung vorgestellt werden, die den meisten Autorinnen und Autoren dieses Heftes als Basis dient.

Kommunikationsfähigkeit als Orientierungsprinzip

Ausgangspunkte

Welche Art Bildung soll Mathematikunterricht eigentlich ermöglichen? Welches Gesellschaftsbild legen wir zugrunde? Roland Fischer geht in seinem Konzept von der Beobachtung aus, dass es in einer (arbeitsteilig organisierten, demokratischen) Gesellschaft wie der unseren für mündige Bürgerinnen und Bürger zunehmend wichtig geworden ist, mit Expertinnen und Experten zu kommunizieren, d. h., die richtigen Fragen zu stellen und die Antworten der Experten verstehen und bewerten zu können. Eine entsprechende *Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen und Experten* sollte daher zum wesentlichsten Orientierungsprinzip für die Auswahl von Inhalten eines allgemeinbildenden Unterrichts werden.

Was damit konkret gemeint ist, macht Fischer am Beispiel der Kompetenzen eines Richters klar: Ein Richter muss zur Urteilsfindung oft Sachverständige bestellen und dann trotz nur begrenzter eigener Sachkenntnis abwägen, was er von Experten im jeweiligen Gebiet erwarten kann, welche Relevanz die jeweilige Sachverständigenposition wirklich für die Sache hat und wie die Expertisen im Hinblick auf das Urteil wirklich einzuschätzen sind. Fischer sieht die mündigen Bürgerinnen und Bürger oft in einer ähnlichen Rolle wie den Richter:

> „Schon bei … gesunder Lebensgestaltung, Hausbau oder Jobsuche stellen sich Fragen, zu denen zwar aus jeweils spezifischer Perspektive Expertenmeinungen vorliegen, die einem aber die eigene Positionierung nicht ersparen. Man wird sich in der Regel .. [auf] die fachliche Richtigkeit der Expertise […verlassen]. In der Frage der Wichtigkeit, d.h.

für wie bedeutsam man ein bestimmtes Expertenurteil hält, wie man es gewichtet, da ist man auf das eigene Urteil angewiesen.“ (Fischer 2001, S. 153)

Sollen gebildete Laien ähnlich wie der Richter mit mathematikhaltigen Expertisen umgehen können, so müssen sie also

- die passenden Expertinnen oder Experten auswählen können (also z. B. erkennen, wann mathematische Expertise gefragt ist),
- gute, zielgerichtete Fragen an die Experten stellen,
- die Antworten der Expertinnen und Experten verstehen können,
- sie interpretieren und beurteilen, und zwar nicht vorrangig auf innerfachliche Richtigkeit, sondern vor allem auf Bedeutung für das eigene Problemfeld,
- eine Synthese verschiedener, evtl. auch sich widersprechender Expertenurteile anstellen können.

Bedeutung von Reflexion für Kommunikationsfähigkeit

Was müssen Expertinnen und Laien können, um solche Kommunikation zu führen? Fischer identifiziert drei fachbezogene Kompetenzbereiche:

- Grundwissen (Begriffe, Konzepte, Vorstellungen, Darstellungsformen)
- Operatives Wissen und Können (Handlungswissen und -können zur Problemlösung und zur Generierung neuen Wissens)
- Reflexion(swissen)
  (Möglichkeiten, Grenzen und Bedeutung von Begriffen, Konzepten und Methoden)

Kasten 1 konkretisiert die unterschiedlichen Kompetenzbereiche am Beispiel des arithmetischen Mittels.

Kompetenzbereich	**Beispiel „arithmetisches Mittel“**
Grundwissen	• Den Begriff (Definition) des arithmetischen Mittels als Modellierung von „Durchschnitt“ kennen. • Wichtige Eigenschaften (wie metrische Daten, Ausreißerempfindlichkeit u. Ä.) und Anwendungsgebiete des arithmetischen Mittels kennen.
Operatives Wissen und Können	• Das arithmetische Mittel aus einer Liste von Daten (auch Häufigkeitstabellen) berechnen können.
Reflexion(swissen)	• Nachdenken darüber, warum man eine ganze Liste von Daten durch eine Kennzahl (z. B. arithmetisches Mittel) repräsentieren will. • Nachdenken darüber, ob das arithmetische Mittel ein geeignetes Durchschnittsmaß für die Körpergröße von Schülerinnen und Schülern sein kann. • Wissen, warum das arithmetische Mittel zur Mittelung von Noten kaum geeignet ist.

Kasten 1: *Konkretisierung der Kompetenzbereiche am Beispiel des arithmetischen Mittels*

Auch wenn die Unterscheidung der drei Kompetenzbereiche nicht immer ganz trennscharf ist (vgl. Kröpfl 2006, S. 57ff), ergeben sich für Laiinnen und Laien doch andere Kompetenzprofile als für Expertinnen und Experten (vgl. Abb. 1):

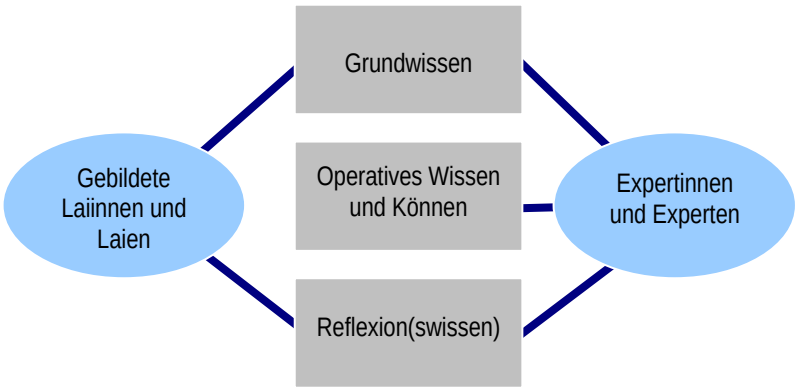

Abb. 1: *Differenzierte Kompetenzprofile*

Während Expertinnen und Experten in allen drei Bereichen kompetent sein müssen, erscheinen für die allgemeingebildete Laiin bzw. den allgemeingebildeten Laien Grundwissen und Reflexion(swissen) im Hinblick auf die Kommunikationsfähigkeit besonders bedeutsam. Denn, so Fischer, „ersteres ist Voraussetzung für die Verständigung mit Experten, das Dritte ist notwendig für die Beurteilung der Expertisen.“ (Fischer 2001, S. 155).

Für einen auf mathematische Allgemeinbildung abzielenden Unterricht ergeben sich daraus gegenüber dem traditionellen Mathematikunterricht zwei Forderungen (vgl. Fischer 2001, S. 155/156):

- Reduktion der Ansprüche im Bezug auf Operieren können als Bildungsziel
- Erhöhung der Ansprüche im Bezug auf Reflexion

Die Reduktion der Ansprüche an das ‚Operieren können als Bildungs*ziel*’ bedeutet natürlich nicht, dass das Operieren im Lern*prozess* der künftigen Laien keine Rolle mehr spielen soll. Natürlich gehört zum Prozess der Aneignung an den Mittelwert auch dazu, einen Mittelwert zu berechnen. Aber als *Ergebnis* dieses Lernprozesses ist dies für Laien nur in eingeschränktem Maße notwendig zu erhalten.

Reflexionsarten

Um notwendiges Reflexionswissen zu identifizieren und Prozesse des Reflektierens gezielt anregen zu können, ist es hilfreich, die Vielfalt der möglichen Reflexionsarten etwas zu ordnen. Viele Autoren haben daher Systematisierungen vorgeschlagen, um verschiedene Arten von Reflexion unterscheiden zu können (z. B. Neubrand 1990, Bauer 1990, Lengnink 2005, Skovsmose 1998).

Wir haben hier die Systematisierung von Skovsmose (1998, S. 199f) ausgewählt und an allgemeinen Fragen beispielhaft in *Kasten 2* konkretisiert. (Die Namen in der ersten Spalte ordnen die Aussagen vom Anfang den Reflexionsarten zu.)

Arten der Reflexion	**Beispiele**
Mathematisch orientierte Reflexion Pia, Julian 2	• Wurden die mathematischen Operationen korrekt durchgeführt? • Was kann man sich unter diesem mathematischen Be-griff vorstellen? • Wieso gilt dieser Satz? • Wo liegt hier mein Denkfehler?
Modellorientierte Reflexion Fabian, Lennart, Victoria, Sabeth 1	• Kann ich mit dem gewählten mathematischen Modell das Problem angemessen beschreiben? • Welche impliziten Annahmen sind hier in die Modellierung eingegangen? Welche Grenzen?
Kontextorientierte Reflexion Julian 1, Sabeth 2, Robert	• Warum wird dieses Problem überhaupt mit mathematischen Mitteln beschrieben/gelöst? Welche Vorteile bringt dies mit sich, welche Nachteile? • Was passiert mit dem Kontext durch die Mathematisierung? • Welche Rolle spielen die mathematischen Modelle und Argumentationen für die Kontext-Situation?
Lebensweltorientierte Reflexion Lilly, Tim	• Wie wichtig ist der mathematische Inhalt bei der Bewältigung meiner lebensweltlichen Probleme? • Welchen gesellschaftlichen Nutzen, welche Bedeutung hat dieser mathematische Inhalt?

Kasten 2: Arten bildungsrelevanter Reflexion nach Skovsmose

Mathematisch orientiertes Reflektieren

Mathematisch orientiertes Reflektieren kann immer dann einsetzen, wenn die reine Kalkülebene verlassen wird. Fordert die Lehrkraft z. B. nicht nur auf, das arithmetische Mittel von fünf Werten zu berechnen, sondern auch zu gegebenen vier Werten einen so zu ergänzen, dass ein vorgegebener Mittelwert herauskommt, hat sie bereits eine erste Reflexion angeregt. Die Frage, wie sich das arithmetische Mittel ändert, wenn sich ein Wert vergrößert, kann mathematisch orientierte Reflexionen über die Stabilität des arithmetischen Mittels anregen.

Allgemein haben sich für die Anregung von Reflexion über mathematische Inhalte, Gegenstände und Denkweisen verschiedene Aufgabenformate bewährt, von denen nur einige wichtige hier angedeutet werden sollen (vgl. Kuntze/Prediger 2005, Neubrand 1990, Bauer 1990 u.v.a.m.):

- Verbalisierungsaufträge für Verfahren und Strategien samt der Verständigung über ihre Verständlichkeit
- Begründungsaufgaben samt ihres Vergleichs in der Klasse
- Fehlersuchaufgaben und kognitionsorientierte Aufgaben, die auf inhaltliche Hintergründe von Fehlern eingehen

- Nimm-Stellung-Aufgaben, die Mathematik nutzen zur „Begutachtung“ außermathematischer Situationen
- …

Um mit Aufgaben dieser Art bei möglichst vielen Lernenden gleichzeitig Reflexionen zu initiieren, sollte ihr Einsatz durch aktivierende Unterrichtsmethoden ausgestaltet sein, die die Kommunikation unter den Lernenden anregen (vgl. etwa Kröpfl 2007, Barzel/Büchter/Leuders 2007).

Modellorientiertes Reflektieren

Wenn Mathematikunterricht die Menschen dazu befähigen sollen, mathematikhaltige Expertisen für lebensweltliche Fragen zu verstehen und kritisch zu beleuchten, so müssen sie insbesondere Reflexionserfahrungen und Reflexionswissen aufbauen rund um Fragen nach Bedeutung, Qualität und Grenzen mathematischer Modellierungen. Wie gut eignet sich das arithmetische Mittel, um z. B. Schülerleistungen über verschiedene Fächer hin zu erfassen? Welche (vielleicht unrealistischen) Annahmen müssen getroffen werden, damit es eine adäquate Modellierung für das Leistungsprofil einer Schülerin ist?

Anlässe dazu bietet jede (auch noch so unauthentische) realitätsbezogene (Schulbuch-)Aufgabe im Unterricht, wenn modellorientierte Fragen daran angeschlossen werden. Ist das wirklich ein angemessenes Modell? Wo sind seine Grenzen?

Substanziell beantworten kann solche Fragen allerdings nur, wer parallel das notwendige bereichsspezifische Reflexionswissen aufgebaut hat. Um z. B. die Angemessenheit einer lineare Modellierung beurteilen zu können, muss man sich der Eigenschaften bewusst sein, die man einem funktionalen Zusammenhang durch eine lineare Modellierung zuschreibt. Umgekehrt kann die Hinterfragung der Adäquatheit linearer Modelle auch den Anstoß bieten, Reflexionswissen über Charakteristiken linearer Funktionen aufzubauen.

Viele Beispiele in diesem Heft zeigen, wie modellorientierte Reflexionen durch Aufforderungen zur Validierung von Modellen angeregt werden können. Dies wird zunächst durch Impulse der Lehrkraft angestoßen, nicht immer in ausformulierten Aufgaben. Das langfristige Ziel ist, dass Schülerinnen und Schüler selbst unaufgefordert beginnen, entsprechende Fragen zu stellen (vgl. Riehs in diesem Heft).

Kontextorientiertes Reflektieren

Wer wie Sabeth über die modellorientierte Reflexion hinaus geht zu der Frage, was das jeweilige mathematische Modell für den Kontext selbst bedeutet, und welche Rolle es für die Argumentation in dem Kontext überhaupt spielt, kommt zur kontextorientierten Reflexion: Welche Funktion übernimmt die Mittelwertbildung in der gesellschaftlichen Realität der Notengebung und Selektion eigentlich? Die Frage „Macht das Sinn?“ findet hier keine Antwort mehr auf der Ebene der Modellreflexion, sondern der dahinter liegenden Bezüge und Interessen.

Wer diese in vielen Schulbüchern wenig beleuchtete Art von Fragen stellt, kann mit dem oft sehr allgemein formulierte Bildungsziel „Rolle der Mathematik erfassen“ (OECD 2003) hinreichend konkret ernst machen. In Bezug auf die Kommunikationsfähigkeit gegenüber mathematikhaltigen Expertisen ist die kontextorientierte Reflexion insofern zentral, als erst durch Beschäftigung mit solcherart Fragen die Rahmenbedingungen einer Expertise einschätzbar werden.

Dass kontextorientierte Reflexionen im Unterricht durch entsprechende Aufgabenstellungen angeregt werden können, zeigen die Beiträge in diesem Heft, ganz besonders jener von Franz Picher. Subjektiv besonders bedeutsame Anlässe zur kontextorientierten Reflexion ergeben sich aber oft auch situativ aus Fragen der Lernenden. Diese aufzugreifen, bietet interessante Reflexionschancen.

Lebensweltorientierte Reflexion

Lernende wie Lilly und Tom bringen lebensweltorientierte Reflexionsfragen immer wieder mit ein: Was bedeuten die Inhalte für mich, was bedeuten sie für die Gesellschaft? Lehrende empfinden dies zuweilen als Störung, da sie zum Mathematiklernen nicht unmittelbar beizutragen scheinen. Roland Fischer (2001) hingegen sieht in so angestoßenen Sinn-Diskussionen die fruchtbarsten und authentischsten Reflexionsanlässe überhaupt. Fruchtbar werden Sinn-Diskussionen allerdings vor allem dann, wenn sie konkreter formuliert sind als bei Lilly und Tom:

Wozu ist es für meine Beteiligung an politischen Diskussionen wichtig, dass ich über statistische Kenngrößen wie dem arithmetischen Mittel Bescheid weiß? Diese Frage führt direkt auf eine kontextorientierte Reflexion: Wozu werden Kenngrößen von Politikern benutzt, was bezwecken sie damit? Eine Auseinandersetzung über die individuelle und gesellschaftliche Bedeutsamkeit von mathematischen Inhalten kann für den Aufbau und die Konsolidierung von Reflexionswissen produktiv genutzt werden. Bewährt ist die Aufforderung, gezielt die Proponenten- oder Opponenten-Rolle in einer solchen Auseinandersetzung einzunehmen („Schreibe einen Brief an die Kultusministerin, der sie von einer Lehrplanänderung überzeugt: Warum sollten alle Abiturienten etwas über beschreibende Statistik gelernt haben?“ – vgl. den Beitrag von Chovanetz und Schneider in diesem Heft).

Wie wichtig ist es, dass wir Zehntklässler im Zeitalter von Computeralgebrasystemen Gleichungen von Hand lösen können? Paul gefällt das regelgeleitete Lösen algebraischer Gleichungen eigentlich gut, obwohl die Lehrerin sagt, es sei geistlos. Anna dagegen mag es nicht: „Da fühl ich mich immer, als wäre ich ein Taschenrechner.“ In ihrer Diskussion wird als Charakteristikum algebraischer Umformungen deutlich, dass sie während ihrer Durchführung ohne inhaltliche Interpretation der algebraischen Symbole ablaufen können. Dieser mechanische Kalkül ist in gewisser Weise „entmenschlicht“ und hat doch gerade darin seine wichtige Funktion, denn er entlastet unser Denken. Die individuelle Position dazu muss nicht dieselbe sein, um in einer lebensweltorientierten Reflexion zur für die Mathematik zentralen Idee des Algorithmus als charakteristische Schnittstelle zwischen Mathematik und Welt vorzustoßen (vgl. Prediger 2005). So entsteht durch die Sinn-Suche mit dem Sinn-Angebot „Idee des Algorithmus als Charakteristikum der Mathematik“ ein entscheidender Baustein für das Reflexionswissen über typische mathematische Vorgehensweisen.

Beide Beispiele deuten an, wie fruchtbar das situative Aufgreifen lebensweltorientierter Reflexionen auch zur Anregung anderer Reflexionsarten sein kann.

Statt eines Fazits: Reflektieren zu schwer?

Die hier gestellte Forderung nach mehr Reflexion in Bezug auf Mathematik und ihre Bedeutung wird zwar selten grundsätzlich abgelehnt, gleichwohl stößt man mit ihr bei Lehrkräften oft auf Bedenken:

„Bevor wir das machen können, müssen die erst mal die einfachen Fertigkeiten beherrschen, denn sonst wissen sie gar nicht, worüber sie reden sollen.“ – Dieser Sorge sei die immer wieder bestätigte Erfahrung entgegengesetzt, dass das lernbegleitende Reflektieren den innerfachlichen Lernprozess oft gut befördern kann.

„Das ist den meisten doch zu anspruchsvoll!“ – Hinter dieser gängigen, aber nicht zwangsläufig berechtigten Sorge steht das Missverständnis, dass mit Reflexion immer tiefgreifende wissenschaftstheoretische Überlegungen oder metamathematische Diskussionen gemeint sind. Dass man jedoch selbst die großen Fragen in kleinen Schritten beginnen kann, sollen die Beiträge in diesem Heft zeigen. Gerade wer Ideen der Lernenden aufgreift und als Reflexionschancen situativ und schülernah nutzt, wird nicht über die Köpfe hinweg philosophieren müssen.

Solchen (wie uns scheint „behebbaren“) und anderen Einwänden gegen mehr Reflexion im Mathematikunterricht möchten wir abschließend auch noch einmal auf der grundsätzlichen Ebene entgegenhalten: Es ist nicht nur möglich, sondern in einer arbeitsteiligen Gesellschaft wie der unseren absolut unverzichtbar, Ergebnisse von Expertinnen und Experten zu bewerten, ohne selbst Expertin oder Experte zu sein (vgl. Beispiel Richter). Gerade die gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik liegt zu einem sehr wesentlichen Teil darin, dass sie vielfach in (technischen) Anwendungen versteckt auftritt und funktioniert, auch wenn der Anwender bzw. die Anwenderin nicht weiß warum.

Gesellschaftlich weniger relevantes mathematisches Wissen und Können im Unterricht zu vermitteln, weil relevantes Wissen und Können zu schwierig erscheint, macht den Mathematikunterricht obsolet. Längerfristig führt kein Weg daran vorbei, sich im Mathematikunterricht um gesellschaftlich relevante und wichtige Inhalte zu bemühen – so herausfordernd und schwierig dies für Lehrende und Lernende auch sein mag.

Literatur

Bauer, Ludwig (1990): Mathematikunterricht und Reflexion In: Mathematik lehren 38, S. 6-9.

Fischer, Roland (2001): Höhere Allgemeinbildung. In: Fischer-Buck, Anne u. a. (Hrsg.): Situation – Ursprung der Bildung, Franz-Fischer-Jahrbuch für Philosophie und Pädagogik 6. Universitätsverlag, Leipzig, S. 151-161.

Fischer, Roland (2003): Höhere Allgemeinbildung und Bewusstsein der Gesellschaft. In: Erziehung und Unterricht 5-6, S. 559-566.

Fischer, Roland / Malle, Günther (2004): Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln, Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik Bd. 5. Profil Verlag, München.

Kaune, Christa (2006): Reflection and Metacognition in Mathematics Education – Tools for the Improvement of Teaching Quality. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38 (4), S. 360-360.

KMK (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 04.12.2003. Wolters Kluwer, München.

Kröpfl, Bernhard (2007): Höhere mathematische Allgemeinbildung am Beispiel von Funktionen, Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik. Profil Verlag, München.

Kuntze, Sebastian / Prediger, Susanne (2005) (Hrsg): Ich schreibe, also denk’ ich. Über Mathematik schreiben. In: Praxis der Mathematik in der Schule 47 (5).

Lengnink, Katja (2005): Mathematik reflektieren und beurteilen: ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit. In: Lengnink, K. und Siebel, F. (Hrsg.): Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. Verlag Allgemeine Wissenschaft, Mühltal, S. 21-36.

Lengnink, Katja / Prediger, Susanne (2001): Mathematik öffnen: Bildung zum mathematikverständigen Bürger. In: mathematica didactica 24 (2), S. 73-88.

Neubrand, Michael (1990): Stoffvermittlung und Reflexion: mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht. In: mathematica didactica 13, S. 21-48.

OECD (2003): The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. OECD: Paris.

ÖKZ-M (2007): Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe. Version 4/07. (Online: http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf; 01.01.2008)

Peschek, Werner (2004): Lehrer(innen) als Forscher(innen) – Das Klagenfurter Doktorand(inn)enkolleg. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 36 (1), S. 9-14.

Peschek, Werner (2005): Reflexion und Reflexionswissen in R. Fischers Konzept der Höheren Allgemeinbildung. In: K. Lengnink / F. Siebel (Hrsg.): Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. Allgemeine Wissenschaft: Mühltal, S. 55-68.

Postman, Neil (1995): Keine Götter mehr: Das Ende der Erziehung. Berlin Verlag, Berlin.

Prediger, Susanne (2005): „Was hat die Exponentialfunktion mit mir zu tun?“ Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht. In: K. Lengnink / F. Siebel (Hrsg.): Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. Verlag Allgemeine Wissenschaft, Mühltal, S. 97-110.

Skovsmose, Ole (1998): Linking Mathematics Education and Democracy: Citizenship, Mathematical Archeology, Mathemacy and Deliberative Interaction. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 6, 195-203.

Sjuts, Johann (2001): Metakognition beim Mathematiklernen: das Denken über das Denken als Hilfe zur Selbsthilfe. In: Der Mathematikunterricht 47 (1), S. 61-68.

Vollrath, Hans-Joachim (1987): Störungen des „didaktischen Gleichgewichts“ im Mathematikunterricht. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 40 (6), S. 373-378.

Adressen der Verfassenden:
Univ.-Prof. Dr. Werner Peschek
Ao. Univ.-Prof. Dr. Edith Schneider
Institut für Didaktik der Mathematik
Alpen-Adria Universität Klagenfurt
edith.schneider@uni-klu.ac.at
werner.peschek@uni-klu.ac.at

Prof. Dr. Susanne Prediger
Institut für Entwicklung und Erforschung
des Mathematikunterrichts, TU Dortmund
prediger@math.uni-dortmund.de

Bildnachweise:

Einstiegsfoto von Timo Leuders