Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen

Astrid Fischer, Lisa Hefendehl-Hebeker, Susanne Prediger

Einführungsartikel zum Heft „Mehr als Umformen – Algebraisches Denken“, Praxis der Mathematik in der Schule 52 (2010) 33, S. 1-7.

Zusammenfassung: Fragt man Lernende und Lehrkräfte, was algebraisches Denken ausmacht, so nennen sie zuallererst das Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen. Doch algebraisches Denken ist reichhaltiger, denn es umfasst auch das Strukturieren, Verallgemeinern, Darstellen und viele andere Denkhandlungen. Diese im Lernprozess sichtbar zu machen ist ein Weg, um den Algebraunterricht leichter zugänglich und gleichzeitig fachlich gehaltvoller zu gestalten.

Das Problem der erlebten Sinnlosigkeit

Algebra ist ein Thema, das bei vielen Schülerinnen und Schülern nicht sehr beliebt ist. Sie empfinden die Algebra häufig als wirklichkeitsfremd, ohne Bezug eigenen Person und Lebenswelt: ein System von strengen Regeln, an die man sich strikt halten muss, deren Sinn aber nicht einsichtig is und deren Anwendung ohne Ziel geschieht. Die Regeln scheinen irgendwie beliebig zu sein. Drei Beispiele – aus Schülersicht:

- Als vernünftig erscheint noch, dass (a + b) + 2 dasselbe ist wie a + b + 2. Auch der Zweck einer solchen Umformung ist einsichtig: Die Klammern verwirren nur, sie sind überflüssig und man lässt sie am besten weg.
- Dann heißt es aber, dass $(a+b)\cdot 2 = a\cdot 2+b\cdot 2$ ist, obwohl hier die 2 plötzlich doppelt auftritt! Das ist auch lästig, denn will man die Klammern loswerden, muss man in Kauf nehmen, dass der Term viel länger wird. Außerdem ist es ärgerlich, dass man es mal so und mal o machen muss und immer irgendwie durcheinanderkommt, wann welche Umformung richtig ist.
- Hat man sich damit abgefunden und schreibt dann entsprechend $(a+b)^2 = a^2+b^2$, um mal etwas wirklich zu vereinfachen, soll das aber nun falsch sein.

In den Beispielen werden äußere Analogien auf der Ebene der Zeichen gesucht, ohne dass berücksichtigt wird, was die Operationszeichen, die hier auftreten, bedeuten. Bei einem solchen Zugang zur Algebra auf der Oberfläche des Erscheinungsbildes ist es schwer, in der Ansammlung von Regeln ein durchgängiges System zu erkennen (Malle 1993). Es sieht so aus, als müsse man sich inkonsistenten und willkürlichen Reglementierungen unterwerfen. Man muss ständig damit rechnen, dass alles intuitive Handeln gegen die Vorschriften verstößt.

So fragten die Lernenden einer 8. Klasse ihren neuen Lehrer: „Wie ist das bei Ihnen? Bei unserem bisherigen Mathe-Lehrern mussten wir beim Rüberbringen immer das Vorzeichen ändern.“ (zitiert nach Andelfinger 1985, S. 97).

Dabei hat dieses Regelwerk der algebraischen Formelsprache in den zugrunde liegenden Gesetzen des Zahlenrechnens ein klares und sicheres Fundament (Berlin u. a. 2009). Wäre die „Rüberbring-Regel“ tatsächlich in der Entscheidungsmacht des einzelnen Lehrers, so müsste einer Entscheidung zugunsten der Beibehaltung des Vorzeichens die Passung zum Zahlenrechnen geopfert werden:

$7 – 2 = 5$ wäre dann äquivalent zu $7 = 5 – 2$?

Wie also kann das Regelwerk der algebraischen Formelsprache aus dem inneren Reichtum des Zahlensystems heraus auch für Lernende sinnstiftend begründet werden? Und wie kann im Unterricht erlebbar werden, inwiefern die Algebra wesentliche Voraussetzungen geschaffen hat für die Erkenntnisse aller Teildisziplinen der Mathematik? Dazu soll in diesem Beitrag ein Ansatz vorgestellt werden, der den Blick auf algebraische Denkhandlungen richtet.

Bedeutung vielfältiger Denkhandlungen

Fragt man Lernende und Lehrkräfte, was algebraisches Denken ausmacht, so nennen sie zuallererst das Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen. Trotz aller kritischen Diskussionen und Innovationen der letzten Jahre („Wie viel Termumformungen braucht der Mensch?“, Hischer u. a. 1993), ist der kalkülhafte Umgang mit algebraischen Objekten der Unterrichtsrealität und der Wahrnehmung der meisten Beteiligten nach wie vor dominierend.

In den letzten Jahren ist das *Umformen* in vielen Schulbüchern und Unterrichtskonzepten ergänzt worden durch das *Aufstellen* und *Interpretieren* von Termen und Gleichungen. Wenn diese Denkhandlungen jedoch, wie beispielsweise im Kernlehrplan von Nordrhein-Westfalen (MSJK 2004), ausschließlich dem Kompetenzbereich Modellieren zugeordnet werden statt auch dem Kompetenzbereich Arithmetik/Algebra, wird eine falsche Botschaft gesendet. Denn das genuin zur Algebra gehörende Aufstellen von Termen (also das *Mathematisieren*) ist keine „zusätzliche“ Anforderung, die in einen als „extern“ missverstehbaren Bereich ausgelagert werden kann. Terme sind ökonomische Darstellungsmittel für allgemeine Zusammenhänge und Terme zu impliziert, diese Bedeutung zu erfassen.

Unabhängig von der Formulierung aktueller Lehrpläne und bildungspolitischer Vorgaben möchten wir aus übergeordneter didaktischer und erkenntnistheoretischer Perspektive mit diesem Heft aufzeigen, dass algebraisches Denken durch deutlich mehr substanzielle Denkhandlungen charakterisiert werden kann als durch das Aufstellen und Umformen von Termen und Gleichungen. Es lohnt sich, diese Denkhandlungen gezielt wahrzunehmen und weiterzuentwickeln, um einen leichter zugänglichen und gleichzeitig fachlich gehaltvolleren Umgang mit der Algebra zu erreichen.

Allgemeine menschliche Denkhandlungen,
die in der Algebra eine wichtige Rolle spielen:

- Verallgemeinern:
  aus vielen einzelnen Fällen ein allgemeines Muster oder einen allgemeinen Zusammenhang herleiten – das allen Gemeinsame erfassen
- Abstrahieren:
  weglassen bestimmter Merkmale zur Hervorhebung anderer Eigenschaften (die meist von allgemeinerem Interesse sind)
- Strukturieren:
  eine Struktur (lat. Bauart), d. h. eine Ordnung, in etwas hineinsehen oder schaffen; etwas gliedern
- Darstellen:
  Situationen, Muster, Zusammenhänge mit spezifischen Darstellungsmitteln erfassen/beschreiben
- Konstruieren:
  etwas Neues erzeugen aus Bestehendem
- Deuten und Umdeuten:
  in einer Darstellung Bedeutungen erkennen und zwischen Bedeutungen wechseln
- …

Spezifisch algebraische Denkhandlungen

- Mathematisieren: außermathematische Situationen, Muster, Zusammenhänge mithilfe mathematischer Sprachmittel darstellen
- Interpretationsfreies, kalkülhaftes Umformen: Denkoperationen zur Denkentlastung unabhängig von Interpretationen der Zeichen durch ausschließliche Beachtung festgelegter Regeln vollziehen
- Kalkül entwickeln: Findung von Regeln, die die Schematisierung inhaltlicher Denkschritte erlauben, um interpretationsfrei umformen zu können
- Wirkungen bei kleinen Veränderungen analysieren: lokales Variieren und beobachten der Auswirkungen auf abhängige Größen

Kasten 1

Algebraisches Denken beginnt nicht mit dem Umformungskalkül, sondern viel früher bei dem Verstehen arithmetischer Operationen und ihrer Wirkungen (Wittmann 1985), bei dem Beobachten von gemeinsamen Strukturen arithmetischer oder geometrischer Gebilde (Wittmann / Müller 2008, Berlin u. a. 2009) und bei der Erfindung arithmetisch-algebraischer Darstellungsweisen für diese Phänomene (Hefendehl-Hebeker 2001), wie im Folgenden an Beispielen erläutert werden soll.

Viele elementare Denkhandlungen, die überall im menschlichen Denken eine Rolle spielen, sind auch für algebraisches Denken typisch und erfahren hier eine spezifische Ausformung, so das Strukturieren und Verallgemeinern (Lengnink/Prediger 2000). In *Kasten 1* wurden die wichtigsten Denkhandlungen zusammengestellt und unter Rückgriff auf verschiedene (insbesondere Seiffert/Radnitzky 1992) erläutert. Nicht erwähnt sind dabei komplexere, zusammengesetzte Denkhandlungen wie etwa Explorieren, Kommunizieren oder Argumentieren, deren Bedeutung Winter (1975) in seinem Aufsatz zu allgemeinen Lernzielen schon vor 35 Jahren betont hat.

Die verschiedenen Artikel im Thementeil dieses Heftes nehmen jeweils ausgewählte Denkhandlungen in den Blick und zeigen ihre Bedeutung für die in unterschiedlichen Jahrgangsstufen und Phasen des Algebra-Lernens auf:

- Johann Sjuts dokumentiert, wie eine genaue Analyse von *Strukturierungen* und *Darstellungen* von jüngeren Lernenden bereits im Arithmetikunterricht helfen kann, die individuellen Ressourcen für eine Weiterentwicklung algebraischer Denkhandlungen aufzuspüren.
- Franziska Siebel zeigt, wie das *Variieren* und Wirkungen *Analysieren* schon in arithmetischen Aufgabenformaten vorkommen kann und Potenziale für Veränderliche birgt,
- Tatjana Berlin und Dagmar Melzig zeigen in ihren Artikeln, wie die eigenständige Nacherfindung der Variablen aus der Denkhandlung des *Verallgemeinerns* und *Abstrahierens* genetisch erwachsen kann, wenn ein Fokus auf das *Darstellen* und *Strukturieren* gelegt wird.
- Maureen Hoch und Tommy Dreyfus dokumentieren in einem aus dem Förderunterricht mit einer Elfklässlerin, wie eine gesteigerte Bewusstheit für das *Strukturieren* von Teiltermen gerade schwächeren Schülerinnen und Schülern beim gezielteren und regelgerechteren *Umformen* helfen kann.
- Astrid Fischer stellt in ihrer Lernumgebung zum Vergleich der euklidischen und analytischen Geometrie heraus, was die analytische Geometrie durch die algebraische *Darstellung* der Objekte und Relationen und die daraus erwachsene Möglichkeit der *Algorithmisierung* gegenüber der euklidischen Geometrie gewinnt. Notwendig ist dazu das *Konstruieren* neuer geometrischer und algebraischer Objekte, der Koordinaten, Tupel und Vektoren.

Im Folgenden sollen die Denkhandlungen an einem wohlbe nten Beispiel illustriert werden.

Beispiele für Denkhandlungen in der Auseinandersetzung mit mit einer Punktmusterfolge

Verallgemeinern, strukturieren, darstellen

Die Auseinandersetzung mit einer einfachen Folge von Punktmustern, die gedanklich fortzusetzen ist (vgl. *Abb. 1)*, beginnt mit Fragen wie:

? Wie sieht das zehnte Muster aus? Wie viele Punkte hat
? Und wie viele Punkte hat ein beliebiges Muster in der Folge, wenn es eine noch größere Nummer n hat?

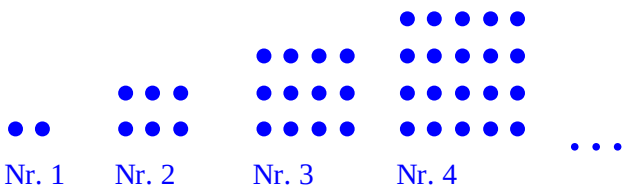
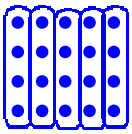
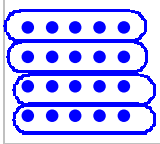
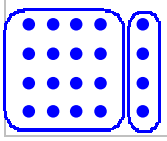


***Abb. 1**: Einfache Punktmusterfolge als Ausgangspunkt vielfältiger Denkhandlungen*

Für eine Antwort müssen Lernende Gemeinsamkeiten der gegebenen Muster finden und für eine Fortsetzung der Folge *verallgemeinern*. Dazu müssen sie sich die Bilder der Folge in einer einheitlichen Weise *strukturieren*. Dabei können individuell unterschiedliche Strukturierungen vorgenommen werden (vgl. Melzig in diesem Heft). Auch für Beschreibungen der Muster und ihrer Punkteanzahlen gibt es zahlreiche Alternativen. Die Tabelle in *Kasten 2* zeigt in den einzelnen Zeilen verschiedene mögliche Strukturierungen und *Stufen des Darstellens*, die durchlaufen und bewusst nebeneinander gestellt werden können.

Stufen des Darstellens für die Zahl der Punkte in der Punktmusterfolge aus Abb. 1

Strukturierung des Musters für Nr. 4	Verbale Darstellung für Punktmuster Nr. 4	Symbolische Darstellung für Punktmuster Nr. 4	Symbolisch-verbale Darstellung für Punktmuster Nr. n	Symbolische Darstellung für Punktmuster Nr. n
	Anzahl der Spalten mit je 4 Punkten ist 5 (eins mehr als die Musternummer 4)	4 + 4 + … + 4 oder 5 · 4 oder (4 + 1) · 4 also 20	$\underbrace{n+n+\ldots+n}$ = x · n x-mal, wobei ich x erhalte, wenn ich 1 zu n dazuaddiere	n+n+…+n x·n, wobei n+1=x also (n+1)·n
	4 Zeilen mit je 5 (eine mehr als 4) Punkten	5 + 5 + 5 + 5 oder (4+1) + … + (4+1) oder 4 · 5 also 20	x+x+…+x n·x, wobei x eins mehr ist als n	x+x+…+x, wobei n+1=x (n+1)+…+(n+1) also n·(n+1)
	Quadrat aus 4 mal 4 Punkten und eine Spalte mit 4 Punkten	4 · 4 + 4 also 16 + 4 = 20	n·n+n	n·n+n

Kasten 2

Deuten, umdeuten und konstruieren

Bei dieser Abfolge von Darstellungen, die immer pointierter und knapper die Anzahl der Punkte eines Musters zum Ausdruck bringen, werden *verschiedene Deutungsweisen* symbolischer Repräsentationen angestoßen. So ist die Zahl 4 zunächst eine bestimmte Zahl, zu der ein bestimmtes Muster gehört. Aber sie und ihr Muster wird hier auch zum Prototyp für ein beliebiges Muster mit unbestimmter Nummer. Fischer (2009) zeigt, dass Fünftklässler dieses Deutungsmuster selbstständig verwenden.

Besonders spannend ist hier auch der Ausdruck „n+1“, der eine andersartige *Umdeutung* erfährt: Während „n“ für eine unbestimmte Zahl steht, wird „n+1 zunächst verwendet, um eine Rechenanweisung zu geben, was mit dieser unbestimmten Zahl zu tun ist. Als Ergebnis dieser Rechnung erhält man eine unbestimmte Zahl, zunächst benannt „x“. Hier ist jedoch ein Zusatz nötig, mit dem die Beziehung der beiden unbestimmten Zahlen n und x beschrieben wird. Eine noch prägnantere Darstellung der Situation verzichtet auf den Ausdruck x: Wenn „x“ dasselbe ist wie „n+1“, dann kann man auch „n+1“ anstelle von „x“ schreiben. Aus der Rechenvorschrift „n+1“ wird die Zahl „n+1“: Der Ausdruck „n+1“ bezeichnet nun den Nachfolger der unbestimmten Zahl n.

Hier wird aus einer Rechenanweisung ein (neues) mathematisches Objekt, das in der gleichen Weise behandelt wird wie die unbestimmte Zahl n: man kann es mit anderen Zahlen und Variablen verknüpfen. Dieser gedankliche Verwandlungsprozess ist ein anspruchsvoller Schritt, in dem ein neuartiges mathematisches Objekt *konstruiert* wird. Das formale Konstruktionsprinzip, mit dem durch Bildung von algebraischen Termen aus bekannten algebraischen Objekten neue algebraische Objekte erzeugt werden können, wird Schülerinnen und Schülern in der Algebra immer begegnen.

Idee des Kalküls verstehen und Kalkül entwickeln

Dass Lernende zur Beschreibung der Punkteanzahl des n-ten Musters unterschiedliche Terme finden, ist interessanter Ausgangspunkt für weitere Fragen:

? Lisa hat n·(n+1), Achmed n·n+n und Maria (n+1)(n+1)–n. Können alle drei stimmen? Wie sieht man das möglichst einfach?

Verschiedene, in einer Klasse gefundene Terme zu vergleichen, ist ein bewährter instruktiver Anlass zur Entwicklung eines Kalküls zum Identifizieren gleichwertiger Terme, der Termumformung. Terme sind im Kontext der Punktmuster dann gleichwertig, wenn sie dasselbe Muster beschreiben („beschreibungsgleich", vgl. *Kasten 3*). Also werden die gefundenen Terme geprüft, ob sie wirklich alle die Punkteanzahl des n-ten Musters darstellen. Geometrische Umstrukturierungen im Sinne der rsten Spalte in *Kasten 2* ermöglichen, sich von der Beschreibungsgleichheit zu überzeugen.

Die Kontrolle durch Einsetzen für ein spezifisches Muster (für Nr. 4 kann man noch nachzählen) könnte eine behauptete Gleichwertigkeit widerlegen: 5·5–4 ergibt nicht die richtige Zahl Punktzahl 20. Passt vielleicht stattdessen der Term (n+1)(n+1)–n–1? Leider lässt sich eine bestehende Gleichwertigkeit nicht über das Einsetzen prüfen, denn die bestehende Einsetzungsgleichheit müsste für *alle* Nummern n geprüft werden.

Die Mühe dieser Wege kann Anlass bieten, nach effektiveren Möglichkeiten zu suchen, zu einem Term gleichwertige Terme zu finden:

? Zwei Terme können wir als gleichwertig erkennen, wenn sie dasselbe beschreiben. Manchmal ist es aber sehr mühsam herauszufinden, wie sie dasselbe beschreiben. Gibt es auch rechnerische Wege zu erkennen, ob zwei Terme gleichwertig sind?

Wer die Mühen des inhaltlichen Denkens am Beispiel erlebt hat, kann die zentrale Idee des algebraischen *Kalküls* würdigen: Wenn man semantisch anspruchsvolle, aber wiederkehrende Denkschritte durch feste Regeln schematisieren kann, wird es möglich, Denkoperationen mit Zahlen oder Termen durch rein syntaktische Denkoperationen (z.B. Rechnungen oder Umformungen) zu ersetzen, die unabhängig von Interpretationen der Zeichen durch ausschließliche Beachtung festgelegter Regeln vollzogen werden können. Dies hat eine erheblich denkentlastende Wirkung und erhöht damit die Reichweite des mathematisch Ableitbaren (Hefendehl-Hebeker 2001).

Um einen solchen Kalkül für Terme zu entwickeln, wird Vorgehen des geometrischen Umstrukturierens der Punktmuster verallgemeinert zu allgemeingültigen, elementaren Umformungsschritten auf der formalen Ebene der interpretationslosen Zeichen:

- Man kann Punktemuster in unterschiedlichen Reihenfolgen zählen, daher gilt immer a+b = b+a und a·b = b·a (Kommutativgesetz).
- Man kann Punktemuster in unterschiedliche Teile zerlegen und getrennt zählen oder vorher zusammenfassen und zählen, daher gilt immer a·(b+c)=a·b+a·c. (Distributivgesetz)
- Man kann Teilkonstellationen in unterschiedlichen Reihenfolgen zusammenfassen, daher gilt immer (a+b)+c=a+(b+c) und (a·b)·c=a·(b·c) (Assoziativgesetz)

Es kommt also bei der Entwicklung eines Kalküls darauf an, einmalig die Entsprechung der Denkoperationen auf inhaltlicher und formaler Ebene abzusichern, damit beide Ebenen danach getrennt behandelt werden können.

Wirkungen bei kleinen Veränderungen analysieren

Auch eine Bearbeitung funktionaler Fragestellungen ist bereits an arithmetischen Objekten wie der Punktmusterfolge möglich, wie Wittmann (1985) herausgestellt hat:

? Wie wirkt sich das aus, wenn ich kleine Veränderungen an der Musterfolge vornehme?
? Was passiert, wenn ich jedem Muster eine Punktspalte m gebe? Wie wirkt sich das auf die Anzahl der Punkte im ersten, zweiten, dritten, n-ten Muster aus?
? Wie wirkt es sich aus, wenn ich jedem Muster eine Punktzeile mehr gebe?
? Welche Wirkung erziele ich, wenn ich beides tue?

Oder in der umgekehrten Fragerichtung:

? Wie kann ich die Musterfolge so verändern, dass jedes Muster genau einen Punkt mehr bekommt?

Antworten können wiederum an den Punktmustern direkt gefunden werden, aber auch an den beschreibenden Termen: Wenn ich eine Spalte ergänze, ergänze ich n Punkte. Für den beschreibenden Term bedeutet das: Ich erhöhe den Faktor, der die Spalten zählt, um 1, und das ist gleichbedeutend damit, dass der kleinere Faktor zusätzlich addiert wird. Die Auseinandersetzung mit solchen Fragen gibt Schülerinnen und Schülern ein Gespür für die Effekte, die mit den verschiedenen Veränderungen in den unterschiedlichen Darstellungen erzielt werden und schult so algebraisch-funktionales Denken (vgl. Siebel in diesem Heft).

Wie und warum Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen?

Die Explizierung der in *Kasten 1* zusammengefassten Denkhandlungen bietet nicht nur für Lehrerinnen und Lehrer ein wichtiges Hintergrundwissen, um algebraische Potenziale arithmetischen und algebraischen Arbeitens zu identifizieren. Auch Schülerinnen u Schüler können davon profitieren, wenn einige Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar werden. Die folgenden Beispiele zeigen, dass dies auf unterschiedliche Weise möglich ist:

Eigenaktivität als Voraussetzung für nachhaltiges Lernen – Beispiel Darstellen

Schon immer wurde im Algebraunterricht verallgemeinert, mathematisiert und es wurden Kalküle entwickelt. Analysen vieler fragend-entwickelnder Unterrichtsgespräche zeigten jedoch, dass vor allem die Lehrkräfte diesbezüglich aktiv waren, während die kognitiven Aktivitäten der Lernenden oft auf das Beisteuern von Halbsätzen mit schlichten Denkhandlungen (z.B. Teilergebnisse ausrechnen) reduziert waren. Es ist jedoch eine entscheidende Voraussetzung für die Intensivierung der Lernprozesse, die Lernenden selbst aktiv in diese Denkhandlungen einzubinden, damit sie *eigenaktiv* verallgemeinern, strukturieren, darstellen usw.

So zeigt Dagmar Melzig in ihrem Artikel einen Zugang, in dem Lernende selbst um Darstellungen für Strukturen ringen. Sie benennen selbst ihre Beobachtungen, präzisieren sie und erfinden eigene Darstellungen mit dem Ziel, relevante Merkmale möglichst prägnant und vollständig zu erfassen.

Wenn eigenaktives Darstellen zeitweise im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit steht, können die Lernenden eine Wertschätzung von algebraischen Ausdrücken entwickeln und ein Verständnis für das, worauf es ankommt (z.B. ist der gewählte Variablenname unwesentlich, aber bestimmte Charakteristika der Zusammensetzung des Terms sind entscheidend).

***Abb. 2**: Es kommt darauf an, welche Denkhandlungen die Lernenden selbst vollziehen!*

Eine Denkhandlung als sinnstiftende Orientierung – Beispiele Verallgemeinern und Kalküle entwickeln

Einige Denkhandlungen bilden tragfähige sinnstiftende Gesamtorientierungen über mehrere Unterrichtsstunden hinweg. Dazu gehört etwa die Denkhandlung des *Verallgemeinerns*, die als Leitidee zur Entwicklung algebraischer Sprachmittel und dabei insbesondere zur Einführung der Variablen dienen kann (vgl. Berlin und Melzig in diesem Heft, und allgemein für viele Teilbereiche der Algebra bei Mason u. a. 2005).

In dem (am Beispiel der gleichwertigen Punktmusterbeschreibungen angedeuteten) Zugang zum Thema Termumformungen ist es die Denkhandlung *Kalkül entwickeln*, die eine ganze Unterrichtsein-

heit sinnstiftend leitet. Wie dies in unterrichtlichen Lernschritten organisiert werden kann, ist in *Kasten 3* angedeutet.

Auf der Basis eines zunächst erarbeiteten inhaltlichen Verständnisses von Gleichwertigkeit im Sinne der Einsetzungs- und Beschreibungsgleichheit können Lernende die Grundidee eines Kalküls erfassen: Wie kann man einen Term in einen gleichwertigen Term umwandeln, nur durch Einhaltung formaler Regeln ohne inhaltliche Deutung? Und wie müssten formale Regeln aussehen, die das leisten? Wenn Lernende selbst in den Prozess des Suchens nach einem geeigneten Kalkül eingebunden sind, werden Termumformungen tiefer verstanden, und eine sinnstiftende Orientierung in dem Themengebiet geboten.

Kalküle selbst entwickeln – eine Leitidee für den Weg von der Gleichwertigkeit von Termen zu Termumformungen

1. Etappe: Gleichwertigkeit von Termen im Sinne der Beschreibungs- und Einsetzungsgleichheit erarbeiten

Lernende ...

1. ... entdecken, dass es unterschiedliche Terme gibt, die dieselbe Situation oder dasselbe Bild mit allgemeinen Größen beschreiben (sie entdecken die Existenz beschreibungsgleicher Terme);
2. ... erfahren durch Ausprobieren, dass die Beschreibungsgleichheit die Einsetzungsgleichheit impliziert;
3. … finden zu einer Situation oder einem Bild mehrere beschreibungsgleiche Terme. Sie überprüfen oder widerlegen ihre Gleichwertigkeit mit der Einsetzungsgleichheit;
4. ... zeigen durch Konstruktion einer passenden Situation oder eines Bildes, dass zwei Terme gleichwertig sind;

2. Etappe: Kalkülhaften Übergang zwischen gleichwertigen Termen erarbeiten

Lernende ...

5. ... suchen rechnerische Möglichkeiten, die Gleichwertigkeit zweier Terme ohne inhaltlichen Bezug schneller zu erkennen und entdecken Umformungsregeln, um einem Term umzuwandeln;
6. … nutzen Termumformungsregeln als Möglichkeit, auf der Kalkül-Ebene zu gleichwertigen Termen überzugehen;
7. ... gewinnen Vertrauen in den Kalkül durch mehrmaliges Prüfen der Entsprechung von Inhalts- und Kalkülebene (also von Beschreibungs-/Einsetzungsgleichheit und Umformungsgleichheit);
8. … deuten auch später immer wieder umformungsgleiche Terme als beschreibungs- und einsetzungsgleich.

Kasten 3 *(aus Prediger 2009)*

Vergleiche von Denkhandlungen aus der Vogelperspektive – Beispiel Koordinatisieren

Eine *Vogelperspektive* gibt einen Blick für Zusammenhänge. Lernende können sich leicht im Dschungel der Details einzelner Handlungssequenzen zu isolierten Fragestellungen verlieren. Ein Überblick, der eine Einordnung dieser Einzelphänomene in einen größeren Zusammenhang stellt, kann Orientierung geben und damit ein Gefühl von Sicherheit vermitteln. Ein Beispiel liefert Fischer (in diesem Heft): Der Ansatz der analytischen Geometrie, mit geometrischen Orten zu „rechnen“, indem sie mit Hilfe von Koordinaten beschrieben werden, gibt einen Leitfaden für viele Handlungen und abstrakte Ideen, mit denen sich die Schülerinnen und Schüler im Rahmen der Vektorrechnung auseinandersetzen sollen. Algebraische Darstellungen und Transformationen treten hier als Denkwerkzeuge auf, die mühsame geometrische Argumentationen ersetzen.

Metakommunikation als produktiver Umgang mit Irritationen – Beispiel Umdeuten

Viele Denkhandlungen treten in der Algebra implizit auf, ohne thematisiert zu werden. Auch Experten vollziehen sie häufig intuitiv, ohne sich dessen noch bewusst zu sein. Manche Schülerinnen und Schüler nehmen diese ebenfalls intuitiv auf, andere jedoch nicht.

Als Beispiel sei eine Episode aus einer Darmstädter Gesamtschulklasse 8 herangezogen, die die in *Kasten 4* abgedruckte Aufgabe zu lösen hatte. Im Klassengespräch wurde ein Lösungsweg gemeinsam erarbeitet. Als die Lösung wie in *Kasten 4* (Zeilennummern eingefügt) fertig an der Tafel stand, meldeten Lynn und Paul Bedenken an:

(Um-)Deutungen bei Dreiecksberechnungen

Aufgabe: Ein Dreieck mit der Höhe h=3 cm hat einen Flächeninhalt von 6 cm². Wie lang ist die Grundseite g?

Tafelanschrieb zur Lösung:

(Z1)	Wir wissen:	F	$= \frac{g}{2} \cdot h$
(Z2)	Also bei uns:	6	$= \frac{g}{2} \cdot 3$
(Z3)			$= \frac{3}{2} \cdot g$
(Z4)			$= 1{,}5 \cdot g$
(Z5)	Damit ist	g	$= 4$

Kasten 4

(Z6) Lynn: Ich verstehe das nicht! Klar, mit $F = \frac{g}{2} \cdot h$ rechnen wir sonst F aus. Aber das geht ja hier gar nicht, weil wir g nicht benutzen können.

(Z7) Paul: Genau! Wie können wir das ausrechnen *[zeigt auf* $6 = \frac{g}{2} \cdot 3$ *in (Z2)]*, wenn wir g nicht kennen?

(Z8) Hamit: Das haben wir einfach eingesetzt.

(Z9) Lynn: Hm, na gut…. *[4 sec Pause]* Aber Moment: In welche Formel denn? $F = \frac{g}{2} \cdot h$ oder $F = \frac{h}{2} \cdot g$? Das wird ja irgendwie zweimal eingesetzt, da stimmt doch was nicht?

(Z10) Hamit: Nee, das ist nicht zweimal eingesetzt, das *[zeigt auf „ = " in (Z3)]* macht was anderes!

Dieses für algebraische Probleme übliche Vorgehen ist für die Algebra-Novizen noch ungewohnt, birgt es doch unterschiedlichste Deutungen:

Die in Zeile (Z1) aufgeschriebene allgemeine Formel wird in Zeile (Z2) genutzt für eine Bestimmungsgleichung. Aus der Variablen g als Unbestimmte in (Z1) wird dabei (nach Einsetzen der Zahlen 6 und 3 für die Variablen F und h) eine zu suchende Unbekannte. Im Umformungsschritt hin zu (Z3) wird diese Variable als bedeutungsloses Zeichen behandelt, das formalen Regeln genügt. Das Gleichheitszeichen in (Z3) bezieht sich auf eine formale Umformung der Terme. Binnen dreier Zeilen wird die Variable g von der Unbestimmten über die Unbekannte zum bedeutungslosen Zeichen umgedeutet; die Deutung der drei Gleichheitszeichen wechselt von der inhaltlichen Gleichheit (Z1), über eine Bestimmungsgleichheit (Z2) zur formalen Umformungsgleichheit (Z3) (vgl. Malle 1993, Prediger 2008).

Solche Umdeutungen algebraischer Objekte nutzen wir oft, denn in der flexiblen Umdeutung steckt eine wichtige Kraft der algebraischen Sprache. Solange die Vorgehensweisen funktionieren, dürfen diese Deutungswechsel implizit bleiben. Wenn jedoch Irritationen auftauchen wie die von Lynn, dann ist ein explizites Reflektieren über Deutungen und Umdeutungen notwendig. Hamit beginnt diese Reflektion durch die Aussage, das Gleich „macht was anderes" (Z10), braucht jedoch noch Unterstützung, um seiner richtigen Intuition einen kommunizierbaren Ausdruck zu verleihen.

Die Lehrkraft lässt nun die Schülerinnen und Schüler jede Zeile der Tafel mehrfach verbalisieren (unter Verbot des Wortes „gleich"). Die Verbalisierungsversuche legen individuelle Deutungen offen und machen die Umdeutungen deutlich. Zum Beispiel formulieren Paul und Lynn nach einiger Diskussion:

(Z22) Paul *(zu Z1 und Z2)*: Eigentlich gilt immer die Formel für F, also F gleich, uups, also, rechne ich aus durch g durch zwei mal h. Jetzt einsetzen in F und h, und jetzt… ich rechne 6 aus durch g durch zwei mal h. Hä? So kann ich das nicht sagen, oder?

…

(Z25) Lynn *(zu Z2 und Z3)*: g bleibt halt übrig, das müssen wir noch rauskriegen. Und dann . also.. den Term g durch zwei mal drei kann ich ummodeln in drei durch zwei mal g. Da ist das g einfach nur dabei.

…

(Z29) Hamid: Ja, einmal nehmen wir das gleich als „soll so rauskommen“ und dann als „umgeformt“.

Als Denkhandlung sichtbar gemacht wurde in diesem Beispiel das Umdeuten, um auf typische Verständnisschwierigkeiten zu sensibilisieren. Dazu wurden Irritationen situativ aufgegriffen und durch Verbalisierungen ihre Hintergründe zur Sprache gebracht. Durch das vergleichende Fassen in eigener Sprache werden Deutungen und Rollen der Symbole diskutierbar und damit diejenigen Stolpersteine expliziert, die Lernende beim eigenständigen Lösen solcher Aufgabenstellungen allein überwinden müssen. Wenn darin Routine entwickelt wurde, können die Deutungswechsel wieder ins Implizite abrutschen.

Ähnlich gehen Maureen Hoch und Tommy Dreyfus (in diesem Heft) vor, wenn sie – in dem ganz anderen Zusammenhang des kalkülhaften Umformens – die zu strukturierenden Teilterme verbalisieren lassen und damit die immer implizit zugrunde liegenden Strukturierungen eines Terms in Teilterme explizit ansprechen. Diese Denkhandlung des Erkennens von Strukturen in Teiltermen isoliert zu haben, trägt nachweislich zum Aufbau der Umformungsfertigkeiten bei.

Wiederkennungseffekte ermöglichen – Beispiel Verallgemeinern und Kalküle entwickeln

Wenn Lernende eine vertraute Denkhandlung in neuen Bereichen wiedererkennen können, kann dies Vertrauen und Kohärenzen schaffen. Nachdem z.B. Lernende im Unterricht an der Suche nach einem Kalkül für Termumformungen beteiligt wurden, kann die nach einem Kalkül für Gleichungsumformungen in gezielter Analogie gestaltet werden.

Auch Vergleiche mit außermathematischen Denkhandlungen ermöglichen Wiedererkennungseffekte (Lengnink/Prediger 2000) und eröffnen abgrenzend auch einen Blick für das spezifische in der Algebra. Wenn zum Beispiel der Variablenterm $2 \cdot n+1$ als zusammenfassende (und verallgemeinernde) Beschreibung der arithmetischen Terme $2 \cdot 3+1$; $2 \cdot 4+1$; $2 \cdot 5+1$; $2 \cdot 294+1$… angesehen wird, die die Gemeinsamkeit dieser arithmetischen Terme prägnant erfasst, dann tritt $2 \cdot n+1$ in den Augen der Schülerinnen und Schüler nicht als seltsames neues Objekt auf, sondern als Bezeichnung für vertraute Objekte. Hier geschieht nichts anderes als bei der zusammenfassenden Bezeichnung „ein Säugetier“ für eine Katze, ein Hund, eine Maus, … Hier wie dort sind auch weitergehende Aussagen über allgemeine Objekt möglich, nämlich solche Aussagen, die auf jeden einzelnen Vertreter zutreffen: z.B. „$2 \cdot n+1$ ist eine ungerade Zahl“. Im Unterschied zu den allgemeinen Begriffen der Alltagssprache kann mit allgemeinen Beschreibungen der Terme jedoch auch operiert werden, und so ermittelt man zum Beispiel leicht, dass die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist.

Fazit

Natürlich ist für die Algebra das Umformen immens wichtig, denn die Möglichkeit des Kalküls hat der modernen Mathematik in inner- und außermathematischen Zusammenhängen eine große Reichweite gegeben. Diesen Kalkül kann aber nur verständig einsetzen, wer ihn in Beziehung zu anderen Denkhandlungen erfahren hat. Insofern ist es absolut zentral, das Strukturieren, Verallgemeinern, Darstellen und Deuten im Algebraunterricht expliziter zu thematisieren.

Dass dies auf unterschiedliche Weise erfolgen kann, zeigt die Bandbreite der unvollständig zusammengestellten Möglichkeiten in *Kasten 5*. Lehrkräfte, die für die Bedeutung reichhaltiger Denkhandlungen sensibilisiert sind, werden einige planmäßig thematisieren, aber auch mit offeneren Augen und Ohren das wahrnehmen und aufgreifen, was die Lernenden ihnen anbieten.

Wie und wozu algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbarer machen?

- *Eigenaktivität*: Ein gezieltes aktives Beteiligen der Lernenden an reichhaltigen Denkhandlungen statt einer Reduktion auf Resultate und Umformungen kann das Lerne intensivieren und zur Nachhaltigkeit beitragen.
- *Sinnstiftende Orientierung:* Sinnstiftung für einen Lernprozess kann darüber gegebe werden, dass Lernenden das längerfristige Ziel ihrer Bemühungen in Form einer Orientierung gebenden leitenden Denkhandlung im Blick haben oder Vogelperspektiven auf Gebiete einnehmen.
- *Zeitweises Isolieren einer Denkhandlung:* Um individuelle Aneignungen einer Denkhandlung zu initiieren, kann es sinnvoll sein, sie im Lernprozess zeitweise isoliert zu thematisieren und zu üben.
- *Anregen von Metakognition und -kommunikation:* Die Anregung von Phasen des Nachdenkens und Sprechens über das in der Algebra geforderte Denken, z.B. einer Irritation oder in einer Fehleranalyse, kann Bewusstheit für Stärken und typische Stolpersteine beim algebraischen Denken schaffen.
- *Wiederkennungseffekte*: Wenn Lernende eine vertraute Denkhandlung in neuen Bereichen wiedererkennen können, kann dies Vertrauen und Kohärenzen schaffen. Auch Vergleiche mit alltäglichen Denkhandlungen ermöglichen Wiedererkennungseffekte.

Kasten 5

Literatur

Andelfinger, Bernhard (1985): Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen. Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, Soest.

Berlin, Tatjana / Fischer, Astrid / Hefendehl-Hebeker, Lisa / Melzig, Dagmar (2009): Vom Rechnen zum Rechenschema – zum Aufbau einer algebraischen Perspektive im Arithmetikunterricht. In: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Beltz, Weinheim, S. 271–292.

Fischer, Astrid (2009): Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen – Zahl- und Variablenauffassungen von Fünftklässlern. In: Journal für Mathematikdidaktik 30(1), S. 3–29.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2001): Die Wissensform des Formelwissens, in: Weiser, Werner / Wollring, Bernd (Hrsg.): Beiträge zur Didaktik der Primarstufe, Festschrift für Siegbert Schmidt, Verlag Dr. Kovac, Hamburg, S.83–98.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2007): Algebraisches Denken – was ist das? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Franzbecker, Hildesheim, S. 148–151.

Hischer, Horst (1993) (Hrsg.): Wieviel Termumformung braucht der Mensch?, Franzbecker, Hildesheim.

Lengnink, Katja / Prediger, Susanne (2000): Mathematisches Denken in der Linearen Algebra, in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 32(4), S.111–122.

Malle, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Vieweg, Wiesbaden.

Mason, John / Graham, Alan / Johnston-Wilder, Sue (2005): Developing Thinking in Algebra, London, Sage.

MSJK - Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (2004): Kernlehrplan Mathematik für die Realschule in NRW (ebenso andere Schulformen). Ritterbach, Frechen.

Prediger, Susanne (2008): „…nee, so darf man das Gleich doch nicht denken!“ Lehramtsstudierende auf dem Weg zur fachdidaktisch fundierten diagnostischen Kompetenz. In: Barzel, Bärbel u. a. (Hrsg.): Algebraisches Denken. Franzbecker, Hildesheim, S. 89–99.

Prediger, Susanne (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten, in: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Beltz, Weinheim, S. 213–234.

Seiffert, Helmut / Radnitzky, Gerard (1992) (Hrsg.): Handlexikon zur Wissenschaftstheorie, dtv, München.

Winter, Heinrich (1975): Allgemeine Lernziele für den ematikunterricht?, in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 7 (3), S. 106-116.

Wittmann, Erich Ch. (1985): Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik, in: Mathematik lehren 11, S. 7–11.

Wittmann, Erich Ch. / Müller, Gerhard N. (2008): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept, in: Walther, Gerd u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret, Cornelsen, Berlin, S. 42–65.

Adressen der Autorinnen
Prof. Dr. Astrid Fischer
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
astrid.fischer@uni-oldenburg.de

Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker
Universität Duisburg-Essen
lisa.hefendehl@uni-due.de

Prof. Dr. Susanne Prediger
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, TU Dortmund
prediger@math.uni-dortmund.de