Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen

Stephan Hußmann und Susanne Prediger

Erschienen in Praxis der Mathematik in der Schule 52(31), S. 35-38.

„Kommt das auch in der Prüfung dran?" - Das ist die Frage, mit der Lernende sich eine Einschätzung über die Relevanz eines Lerninhalts verschaffen. Wer inhaltliche Vorstellungen von mathematischen Begriffen wichtig findet, muss sie konsequenterweise auch in Klausuren berücksichtigen. Der Artikel zeigt, welche Möglichkeiten sich dafür in der Analysis eröffnen.

Vorstellungsorientierung in der Analysis

Inhaltliches Denken ist absolut zentral, wenn nicht nur Kalkül, sondern auch Verständnis im Zentrum der Lernprozesse und ihrer Ergebnisse stehen sollen (Bender 1991, vom Hofe 2003). Im Analysiscurriculum kann zum Aufbau inhaltlicher Vorstellungen insbesondere die qualitative Analysis einen bedeutsamen Beitrag leisten.
Vorstellungen sollen jedoch nicht nur im ersten qualitativen Zugang entwickelt und dann durch formale Konzepte abgelöst werden, sondern sie sollen durch die ganze Analysis hindurch tragen und auch in Prüfungen am Ende des Lernprozesses ernst genommen werden (Prediger 2009). Denn nur was geprüft wird, wird als Lerninhalt ernst genommen.

Dass dies noch nicht immer der Fall ist, zeigt ein Blick auf Abituraufgaben. Viele Aufgaben zeigen eine Dominanz von relativ komplizierten, rechnerisch aufwändigen Aufgaben und eine deutliche Bevorzugung von Aufgaben, die eine rezeptartige Reproduktion gestatten. Die zum Verständnis dieser Operationen notwendigen inhaltlichen Vorstellungen werden dagegen nur am Rande abgefragt. Eine Ursache bildet sicher eine gewisse Tradition im Mathematikunterricht, die symbolisch dargestellten Aufgaben den Vorrang vor zum Beispiel grafisch repräsentierten Aufgaben einräumt (Eisenberg/Dreyfus 1990). Eine zweite Ursache ist die vereinfachende Annahme vieler Lehrerinnen und Lehrer, dass Schülerinnen und Schüler kalkülorientierte Aufgaben leichter beherrschen lernen als konzeptionell reichhaltige Fragestellungen.

Schon lange setzt die Didaktik dagegen die Forderung, konsequenter die Grundvorstellungen aufzubauen (für Analysis Bender 1991, Blum 2000). Als *Grundvorstellungen* werden die „Übersetzungsscharniere" zwischen realen Situationen und mathematischen Konzepten (Begriffen, Operationen usw.) bezeichnet. Sie sind vorwiegend als *inhaltliche Interpretationen* mathematischer Konzepte mental repräsentiert und ermöglichen, diese Konzepte zur Mathematisierung von Situationen zu nutzen oder umgekehrt mathematische Sachverhalte lebensweltlich zu deuten (in *Abb. 1* im Hinblick auf ihre Bedeutung im Modellierungskreislauf verortet).

Wer über inhaltlichen Vorstellungen verfügt, kann auch kalkülhafte Rechenverfahren nachhaltiger und weniger fehleranfällig behalten, zum Beispiel: Muss man zur Bestimmung der Extremstelle f'' oder f' null setzen? Wer über geometrische oder inhaltliche Deutungen der Extremstelle verfügt, wird sich dies leichter herleiten können, als wer nur Regeln auswendig gelernt hat (vgl. Aufgabe 1 in *Kasten 4*).

Auch möchten wir zeigen, dass elementare Aufgaben zu inhaltlichen Vorstellungen nicht schwieriger sein müssen als kalkülorientierte Aufgaben.

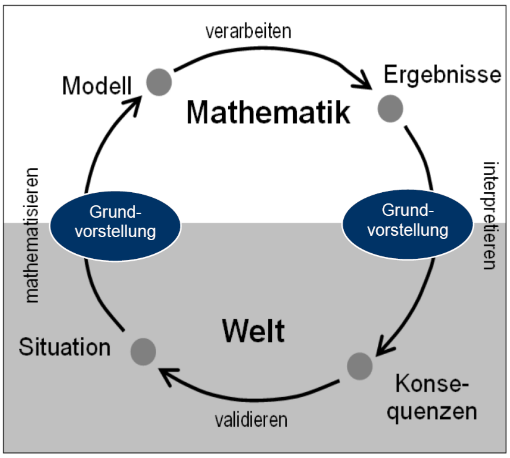


***Abb. 1:** Verortung der Grundvorstellungen für kognitive Aktivitäten (*nach vom Hofe 2003*)*

Was muss man können?

Mit Blick auf Leistungsüberprüfungen stellt sich die Frage, was die Schülerinnen und Schüler am Ende des Analysisunterrichts können müssen.

Kasten 1 listet für die zentralen Begriffe der Analysis die wichtigen Grundvorstellungen in der Reihenfolge ihrer Relevanz für inhaltliches Denken auf (nach Blum 2000, Danckwerts/Vogel 2006, Hahn/Prediger 2008 u. v. a.).

Bilden die Grundvorstellungen aus *Kasten 1* die elementare Basis einer vorstellungsorientierten Analysis, so zeigt *Kasten 2* einen Ausschnitt vorstellungsorientierter Fähigkeiten, die darauf aufbauen und (ähnlich) im derzeitigen Entwurf für die neu zu konzipierende österreichische Zentral-Matura formuliert sind (Dangl u. a. 2009, S. 34).

Wichtige Grundvorstellungen in der Analysis

Ableitung als

- lokale Änderungsrate
- lokale lineare Approximation
- Tangentensteigung (geometrisch gedeutet)

Integral als

- Rekonstruktion der Wirkung bzw. des Gesamteffekts
- Mittelung
- Fläche unter der Kurve (geometrisch gedeutet)

Extrem- und Wendestellen als

- markante Punkte in Wachstumsprozessen (oder allg. in funktionalen Zusammenhängen), bei denen sich Änderungsverhalten ändert
- begriffliche Werkzeuge zur Lösung von Optimierungsproblemen

Kasten 1

Ausschnitt wichtiger vorstellungsorientierter Fähigkeiten

- absolute und relative Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können
- den Zusammenhang zwischen mittleren Änderungsraten (Differenzenquotienten) und momentanen Änderungsraten (Differenzialquotienten) kennen und auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes beschreiben und in verschiedenen Situationen anwenden können
- den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können
- den Unterschied zwischen Bestand und Änderung in Anwendungssituationen erklären und zur Problembearbeitung nutzen können
- Eigenschaften von funktionalen Zusammenhängen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen
- das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können
- den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können
- den Unterschied zwischen Änderungsfunktion und Wirkung bzw. Gesamteffekt erklären und zur Problembearbeitung nutzen können

Kasten 2

Inhaltliche Vorstellungen überprüfen ist notwendig

Viele empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass diese Vorstellungen und Fähigkeiten durch einen vorrangig kalkülorientierten Unterricht nicht automatisch entwickelt werden. So wurde z. B. die in *Abb. 2* abgedruckte Aufgabe im internationalen Vergleichstest TIMSS III (Baumert u. a. 2000) nur von 35 % der befragten deutschen Oberstufenschülerinnen und -schüler gelöst (international von 45 %). Die elementare Fähigkeit, einen formalen Ausdruck wie $f'(1) < 0$ geometrisch zu interpretieren, zeigten also nur rund ein Drittel der Befragten.

Welcher der folgenden Graphen hat die nachstehenden Eigenschaften:
$f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$ und $f''(x)$ ist immer negativ?

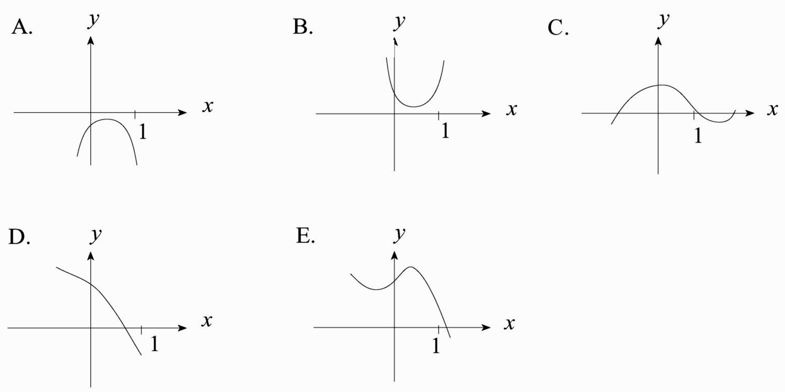


***Abb. 2**: Aufgabe aus TIMSS III zur Deutung formaler Bedingungen an Funktionsgraphen*

Viele Lehrkräfte waren über diese geringen Lösungshäufigkeiten überrascht. Dies zeigt, wie wichtig es ist, auch über solche elementare Fähigkeiten beim Mathematisieren und beim Interpretieren mathematischer Sachverhalte in entsprechenden Klausuraufgaben Rückmeldungen einzuholen.

Wie kann man Vorstellungen überprüfen?

Eine Übersicht über mögliche Aufgabenformate ist (in Erweiterung eines Kastens aus Leuders/Hußmann/Prediger 2007) in *Kasten 3* gegeben. Meist werden Aufgaben des 1. und 3. Typs genutzt, doch sind viele weitere denkbar. Gerade auch die Rechenverfahren sollten immer wieder an inhaltliche Denkweisen angebunden werden (Aufgabentyp 5), denn so wird sichtbar, wie weit die Rechenoperationen verstanden wurden (siehe Aufgabe 1 in *Kasten 4*).

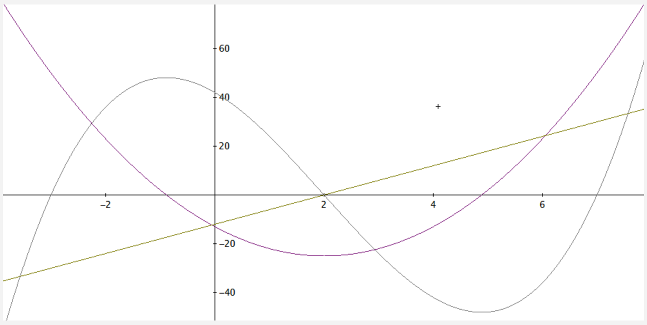
Oft sind längere Aufgaben so aufgebaut, dass erst mit inhaltlichen Argumenten begonnen wird (siehe Aufgabe 2 in *Kasten 4*), dann aber in einem weiteren (hier nicht gezeigten) Schritt quantitativ abgesichert oder in Frage gestellt werden. Am elementarsten sind einfache Interpretationsaufträge wie in Aufgabentyp 3 und 4. Dass diese für unvertraute Sachzusammenhänge auch anspruchsvoller werden können, zeigt Aufgabe 3 in *Kasten 4*.

Wichtige Aufgabenformate zum Abprüfen inhaltlicher Vorstellungen	
Was abprüfen?	**Beispiele für Aufgabentypen auf je zwei Schwierigkeitsniveaus**
Vorstellungen zur Mathematisierung nutzen können	1. *Eine gegebene Sachsituation mathematisieren*, z. B. „Geben Sie eine Funktion für den Gesamteffekt der im Sachkontext gegebenen Änderungsfunktion an.“ 2. *Analysieren einer falschen Mathematisierung*, z. B. „Beurteilen Sie, inwiefern die Inflationsrate keine Ableitung der Preisniveau-Funktion darstellt. Vergleichen Sie dazu folgende Formel für die Inflationsrate (…) mit dem Differenzenquotienten.“
Vorstellungen zur Veranschaulichung und Interpretation nutzen können	3. *Zuordnen von Mathematisierung und Sachsituation oder Bild*, z. B. Aufgabe 1 in Abb. 2 4. *Interpretation eines mathematischen Ausdrucks im Bild oder Sachkontext*, z. B. Aufgabe 3 in Kasten 4 oder „Interpretieren Sie die Bedeutung des Integrals in Bezug auf die im Sachzusammenhang gegebene Änderungsfunktion.“
Sachverhalte und Rechenverfahren durch Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen erklären können	5. *Erklären eines Rechenverfahrens unter Rückgriff auf eine geometrische oder inhaltliche Interpretation*, z. B. Aufgabe 1 in Kasten 4 6. *Erklären komplexerer Sachverhalte durch Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen*, z. B. „Erklären Sie die Beziehung zwischen Integrieren und Differenzieren am Beispiel folgenden Sachverhalts ...“

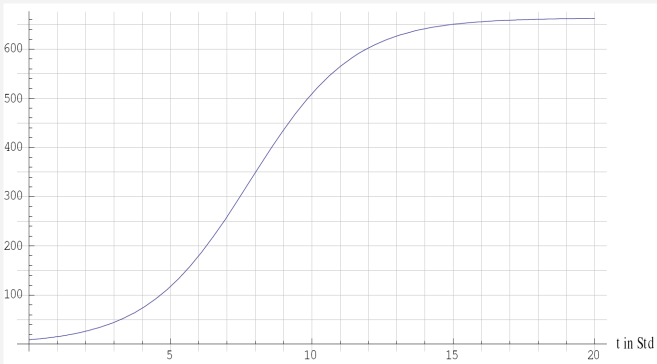
Kasten 3

Beispiele für Abituraufgaben

Aufgabe 1: Rechenverfahren erklären
Um eine Maximalstelle zu berechnen, sind zwei Schritte notwendig:
(1) man bestimmt die Nullstelle x_0 der Ableitung und
(2) man überprüft, ob $f''(x_0) < 0$ ist.
Erläutern Sie anhand der Graphen, warum man mit den Schritten (1) und (2) eine Maximalstelle erhält.

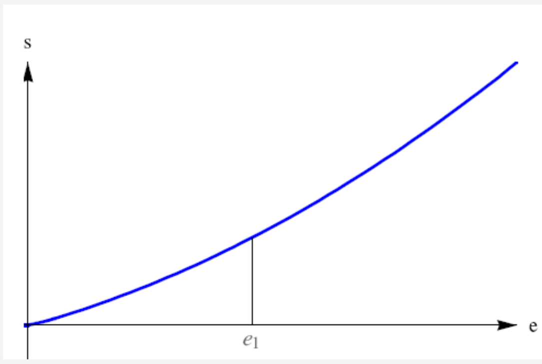


Aufgabe 2: Hefewachstum (Dangl u. a. 2009)
In der Grafik ist das Wachstum einer Hefekultur dargestellt (Zeitangaben in Stunden; Hefemenge in mg).



a) Schätzen Sie die ungefähre Lage des Wendepunktes ab und zeichnen Sie ihn in der Grafik ein!
b) Schätzen Sie ab, wie groß die Wachstumsgeschwindigkeit an der Wendestelle ist!
c) Deuten Sie den Wendepunkt im Hinblick auf die Wachstumsgeschwindigkeit!

Aufgabe 3: Einkommenssteuer (nach Dangl u. a. 2009)
Es sei $s: \; e \to s(e)$ die Funktion, die jedem Einkommen *e* die zugehörige Einkommenssteuer *s* zuordnet; e_1 ist das Einkommen von Frau Meier (siehe Grafik, alles in Euro).



a) Interpretieren Sie die Terme $e_1 - s(e_1)$ und $e_1/s(e_1)$
b) $s'(e)$ wird als Grenzsteuersatz bezeichnet. Erklären Sie diesen Begriff!
c) Frau Meier erhält eine Gehaltserhöhung um h Euro.
Interpretieren Sie den Ausdruck $s(e_1 + h) - s(e_1) \; / \; h$ im Sachzusammenhang.
d) Interpretieren Sie die Ungleichung $s(e_1 + h) - s(e_1) / h \geq s(e_1) / e_1$ im Sachzusammenhang.
e) In den meisten Steuersystemen gilt für Einkommen über einer bestimmten Einkommensgrenze die Beziehung $s''(e) = 0$. Deuten Sie diese Beziehung im Sachzusammenhang.

Kasten 4

Und werden die Klausuren dadurch schwerer?

„Können das meine Schüler überhaupt schaffen? Jetzt verliere ich auch noch einige, die bislang wenigstens eine vier geschafft haben." Diese Fragen hört man immer wieder, wenn man sich für vorstellungsorientierte Klausuren ausspricht. Das stimmt partiell, wenn die Mathematisierungs-Interpretations- und Erklärungsleistungen sehr komplex sind. Wie für alle Anforderungen des Mathematikunterrichts ist es jedoch auch hier möglich, ein breites Schwierigkeitsspektrum auszuschöpfen. Dies zeigen die unterschiedlich anspruchsvollen Teilaufgaben von Aufgabe 3 in *Kasten 4*.

Insgesamt zeigen zahlreiche Unterrichtserfahrungen und empirische Untersuchungen, dass der Fokus auf inhaltliches Denken lohnend ist, weil die mathematischen Kenntnisse nachhaltiger erworben und behalten werden können, wenn sie auf Verständnis gründen. Und was eingehender verstanden wurde, lässt sich gewinnbringender in Klausuren zeigen.

Literatur

Baumert, Jürgen / Bos, Wilfried / Lehmann, Rainer (Hrsg.) (2000): Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie - Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Leske + Budrich, Leverkusen.

Bender, Peter (1991): Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen der Sekundarstufen. In: Postel, Helmut / Kirsch, Arnold / Blum, Werner (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel, Schroedel Verlag, Hannover, S. 48-60.

Blum, Werner (2000): Perspektiven für den Analysisunterricht. In: Der Mathematikunterricht 46 (4-5), S. 5-17.

Danckwerts, Rainer / Vogel, Dankwart (2006): Analysis verständlich unterrichten. Spektrum, Heidelberg.

Dangl, Martin / Fischer, Roland / Heugl, Helmut / Kröpfl, Bernhard / Liebscher, Maria / Peschek, Werner / Siller, Hans-Stefan (2009): Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik" – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen. Zwischenbericht des AECC-M Klagenfurt, online unter http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/sRP-M_September_2009.pdf

Eisenberg Theodore / Dreyfus, Tommy (1990): On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunninham (Hrsg.): Visualization in Teaching and Mathematics, MAA Series, Washington, S. 25-37.

Hahn, Steffen / Prediger, Susanne (2008): Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. In: Journal für Mathematikdidaktik 29(3/4), S. 163-198.

Leuders Timo / Hußmann, Stephan / Prediger, Susanne (2007): Schülerleistungen verstehen – Diagnose. In: PM 47(15), S. 1-8.

Prediger, Susanne (2009): Verstehen durch Vorstellen. Inhaltliches Denken von der Begriffsbildung bis zur Klassenarbeit und darüber hinaus. In: Leuders, Timo / Hefendehl-Hebeker, Lisa / Weigand, Hans-Georg (Hrsg.): Mathemagische Momente, Cornelsen, Berlin, S. 166-175.

vom Hofe, Rudolf (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: Mathematik lehren 118, S. 4-8

Adresse der Verfassenden

Prof. Dr. Stephan Hußmann und Prof. Dr. Susanne Prediger
Institut für Erforschung und Entwicklung des Mathematikunterrichts, Dortmund
hussmann@math.uni-dortmund.de
prediger@math.uni-dortmund.de