Systematisieren und Sichern

Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen

Ideen für reichhaltige Erkundungen und produktive Übungen gibt es viele. Doch wie kann die Phase dazwischen, das Systematisieren und Sichern, sinnvoll gestaltet werden? Verschiedene didaktische Möglichkeiten werden aufgezeigt – damit Wissen und Können nachhaltig gelernt wird.

SUSANNE PREDIGER / BÄRBEL BARZEL / TIMO LEUDERS / STEPHAN HUSSMANN

Erkunden und Üben standen in den letzten Jahren in der Didaktik im Vordergrund. Mit der Entwicklung reichhaltiger, schüleraktivierender Lernumgebungen zum Erkunden wurde eine Forderung von Hans Freudenthal zunehmend eingelöst: Lernende sollen die zentralen mathematischen Konzepte, Beziehungen und Vorgehensweise anhand geeigneter Aufgabenstellungen eigenständig nacherfinden (Freudenthal 1983). Und auch die Phase des Übens und Vertiefens hat seit den Arbeiten von Erich Wittmann und Gerhard Müller zunehmend didaktische Aufmerksamkeit erhalten, um sie so wirkungsvoll wie möglich zu gestalten (Müller/Wittmann 1990). Die entscheidende Unterrichtsphase zwischen dem Erkunden und dem Üben erscheint uns allerdings bisher zu wenig beachtet.

Was kommt nach dem Erkunden?

Betrachten wir also diese Phase des „Sichern und Systematisierens“ etwas näher:

- Jeder Schüler, jede Schülerin bringt aus der Erkundungsphase an den Kontext gebundene Ideen und Erfahrungen mit. Wie werden diese in zusammenhängendes, konsolidiertes Wissen und Können überführt, das im Einklang mit den existierenden Definitionen und Sätzen steht? (*Systematisieren*)
- Und wie kann dieses konsolidierte Wissen und Können so gesichert werden, dass Lernende darauf langfristig zugreifen können? (*Sichern*)

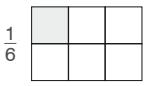
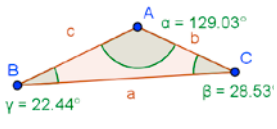
Nur wenige Arbeiten der letzten Jahre beschäftigen sich mit diesen Herausforderungen (Ausnahmen bilden Bruder 2001, Büchter/Leuders 2005), obwohl eine Unterrichtsphase des Systematisierens und Sicherns in jedem Unterricht in irgendeiner Form stattfindet. Wir nennen Systematisieren und Sichern zusammen das *Ordnen* und wollen im Folgenden ausführen, warum und wie es didaktisch gezielt gestaltet werden kann.

Warum ist das Ordnen wichtig?

Systematisieren und Sichern sind für den Lernprozess aus vier Gründen wichtig:

- Erfahrungen werden nur dann zu Wissen und Können, wenn dies bewusst gemacht und konsolidiert wird. Denn reines Entdecken ohne Sammeln und Systematisieren der Ergebnisse hat selten nachhaltige Erfolge. (*Reflexionsbedarf*)
- Individuelle Nacherfindungen bilden einen wichtigen Schritt im Lernprozess – aber sie führen nicht automatisch auf die konventionellen Begriffe und Sätze der Mathematik (Gallin/Ruf 1990 nennen diesen Schritt der Konfrontation mit dem regulären mathematischen Wissen das Regularisieren. (*Regularisierungsbedarf*)
- Allein einzelne Kenntnisse ohne eine systematisierende Einordnung führen nur auf isoliertes bruchstückhaftes Wissen. (*Vernetzungsbedarf*)
- Zum Lernen gehört das Festhalten, vorallem das Verschriftlichen. Dabei werden die Gedanken präzisiert und später kann man auf das Wissen zurückgreifen. (*Dokumentationsbedarf*)

Kandinski 1921 © VG Bild-Kunst, Bonn 2010 / Ursus Wehrli, Wassily Kandinsky *Roter Fleck II*, aufgeräumt c Ursus Wehrli, erschienen in: U. Wehrli, Kunst aufräumen c KEIN&ABER AG Zürich

Welche Wissenselemente müssen gesichert werden?				
Was daran ? (Facette des Wissens) / **Was?** (Art des Wissens)	**Explizite Formulierungen**	**Konkretisierung und Abgrenzung**	**Bedeutungen und Vernetzung**	**Konventionelle Festlegung**
Konzeptuelles Wissen				
Konzepte *Zahlen, Operationen*	Definitionen *Definition eines Bruchs*	Beispiele / Gegenbeispiele $\frac{2}{3}$ *ist ein Bruch, 2 auch, aber 2 ist sogar natürlich*	Vorstellungen / Darstellungen *Bruch als Teil eines Ganzen, so dargestellt:* 	Fachwörter *Namen wie Nenner, Zähler* Bezeichnungen *rechte Winkel markiert man durch einen Punkt*
Zusammenhänge *Winkelsummensatz in Dreieck*	Satz *Formulierung des Winkelsummensatzes*	Beispiele / Gegenbeispiele 	(anschauliche) Begründung / Beweis 	Namen von Sätzen *„Winkelsummensatz“*, Bezeichnung *Winkel und Seiten im Dreieck* konventionelle Regeln *Punkt vor Strich Regel*
Prozedurales Wissen				
Mathematische Verfahren, Algorithmen *Graphen zeichnen, Brüche addieren, Dreisatz im Kopf*	Anleitung *Wie addiert man ungleichnamige Brüche in drei Schritten?*	Bedingungen der Anwendbarkeit, Spezialfälle evtl. Wissen zu typ. Fehlern *Beim Zeichnen von Graphen muss man auf die Skalierung der Achsen achten.*	Vorstellung / Begründung als Verknüpfung zu konzeptuellen Gehalten *Man stellt sich die Additionsschritte von Brüchen in Streifenbildern vor.*	Vereinbarungen *Beim Zeichnen von Funktionsgraphen wird die x-Achse immer als die horizontale Achse genommen.*
Handwerkliche Verfahren *Winkel zeichnen Taschenrechner Heftführung*	Anleitung *So zeichnet man mit dem Geodreieck einen Winkel von 70°…*	Umsetzen der Anleitung, Bedingungen der Anwendbarkeit,spezifische Kniffe, Fehlerwissen *Achte beim Zeichnen von Winkeln über 180 ° auf …*	(keine konzeptuellen Gehalte, nur Handwerk, daher keine Bedeutungen)	Vereinbarungen *Im Heft immer Datum angeben* *Die Taschenrechnertaste „=“ heißt ENTER*
Metakognitives Wissen				
Strategien des Problemlösens	…	…		
Schritte beim Modellieren …	…			

Tab. 1: Arten und Facetten von Wissen

Bewährt hat sich der klassische Ansatz, alle wichtigen Sätze und Verfahren im guten alten Merkheft oder im selbst angelegten Wissensspeicher (Brückner 1978) festzuhalten. Diesen Ansatz kann man noch ausweiten: erstens hinsichtlich der Vielfalt der zu sichernden Wissensarten und -facetten und zweitens im Grad der Schülerbeteiligung beim Ordnen, Formulieren und Gestalten ihres „Nachschlagewerkes“.

Verschiedene Arten und Facetten des Wissens sichern

Natürlich sind Verfahren und Sätze in ihren expliziten Formulierungen zentrale Bestandteile mathematischen Wissens. Gleichwohl lernen Schülerinnen und Schüler sehr viel mehr, was sich zu sichern lohnt. Es lassen sich Arten von Wissen unterscheiden (Zeilen in **Tabelle 1**), die sich in verschiedenen

Facetten zeigen (Spalten in Tabelle 1). Wir nennen die einzelnen Zellen der Tabelle *Wissenselemente*.

Arten des Wissens

Die grundlegende Unterscheidung zwischen dem Wissen über Fakten, Konzepte und Zusammenhänge (*konzeptuelles Wissen*) einerseits und Handlungswissen / Können (*prozeduralem Wissen*) andererseits, ist eine hilfreiche Orientierung.

Als *Konzepte* begegnen den Lernenden etwa Zahlen und Operationen, aber auch Eigenschaften (z. B. geometrischer oder algebraischer Natur) oder Relationen (z. B. senkrecht, ungerade). Diese können in Definitionen explizit formuliert werden. Das Faktenwissen über *konventionelle Bezeichnungen* ist dabei nur ein nachgeordneter Aspekt.

Das Gebäude mathematischen Wissens lebt jedoch von den strukturellen und logischen *Zusammenhängen*. Ein mathematischer Satz ist die „Hochform", in der solche Zusammenhänge zum Ausdruck gebracht werden. Im Unterricht begegnen den Lernenden etwa die Kommutativität von Operationen oder der Winkelsummensatz: Gelegenheiten, neue Erkenntnisse aufgrund des vorherigen Wissens zu erschließen und zu begründen.

Prozedurales Wissen bezieht sich zum einen auf *mathematische Verfahren und Algorithmen*, zum anderen auf *handwerkliche Verfahren,* wie etwa den Umgang mit Zirkel und Lineal oder mit dem Taschenrechner. Daneben erwerben Schülerinnen und Schüler auch *metakognitives Wissen* (z. B. Strategien des Problemlösens oder Meta-Wissen über Schritte des Modellierens) als Hintergrundwissen für bewusstes Vorgehen. Diese Ebene wird hier eher ausgeklammert, obwohl auch sie gesichert werden kann.

Facetten des Wissens

Will man etwa den Begriff des Bruchs sichern, bleibt die Frage: Was genau daran? Die Fachvokabeln Zähler und Nenner sind sicherlich wichtig, aber nicht der Kern. Soll eine formale Definition aufgeschrieben werden? Und dazu Abgrenzungswissen, was kein Bruch ist? Oder auch die zugehörigen Vorstellungen und Darstellungen? Die Entscheidungen zwischen den in Tabelle 1 vorgeschlagenen Wissensfacetten sollte man als Lehrkraft systematisch treffen.

Explizite Formulierung

Für die Fachwissenschaft Mathematik bilden explizite Formulierungen die wichtigste Wissensfacette: In Definitionen und Sätzen wird konzeptuelles Wissen prägnant festgehalten, in Anleitungen prozedurales Wissen. Die Ebene der expliziten Formulierung ist Lehrenden aus dem Studium vertraut und ist vielfach die Sprache in Lexika und Schulbüchern.

Konkretisierung und Abgrenzung

Um sich mathematischen Konzepten und Zusammenhängen zu nähern, werden die expliziten Formulierungen durch Beispiele und Gegenbeispiele konkretisiert: Die Schülerinnen und Schüler entscheiden für Beispiele, ob sie zu einem Begriff gehören und nennen geeignete Beispiele und Gegenbeispiele. Dabei erwerben sie neben dem exemplarischen Verständnis (Winter 1983) gleichzeitig auch ein Gespür für Extremfälle bzw. für die Grenzen der Begriffsbildung (Abgrenzungswissen).

Für Verfahren und Sätze kommen außerdem auch Bedingungen der Anwendbarkeit hinzu, etwa: Wann darf ich die Brüche verrechnen, indem ich Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner verrechne? Beim Multiplizieren ja, beim Addieren nicht.

Bedeutungen und Vernetzungen

Um Konzepte, Zusammenhänge und Verfahren flexibel und verständig nutzen zu können, müssen ihre Bedeutungen verstanden werden. Daher bilden inhaltliche Vorstellungen und passende Darstellungen ganz entscheidende Wissensfacetten (vom Hofe 1995, Prediger 2009), die ebenfalls systematisiert und gesichert werden müssen. Mit diesen lassen sich auch Vernetzungen zu anderen Wissenselementen knüpfen, etwa durch anschauliche Begründung von Sätzen oder Verfahren.

Konventionen

Zu sichern sind auch Konventionen, die zu den jeweiligen Wissensarten gehören, zum Beispiel die Fachwörter zu Konzepten wie „Multiplikation" und „Division". Natürlich darf der Erwerb der Bezeichnung „Multiplikation" nicht mit dem Aufbau einer adäquaten Vorstellung verwechselt werden. Daher wird die Wissensfacette „Konventionen" in Tabelle 1 zur gezielten Unterscheidung eigens in einer Spalte aufgeführt.

Ineinandergreifen der Wissenselemente

In einer konkreten Systematisierungs- und Sicherungsphase müssen meist mehrere Wissenselemente kombiniert werden. Wie dies geschehen kann, zeigt exemplarisch eine Aufgabe zum Ordnen von Körperformen (**Arbeitsblatt 1**). Die Kinder haben zuvor in Erkundungsaufgaben versucht, Quader zu basteln. Dabei haben sie erfahren, dass diese nicht exakt werden, wenn man nicht auf die genaue Lage der Kanten zueinander achtet. Auf dieser Erfahrung wird nun die Systematisierung der Konzepte „senkrecht" und „parallel" aufgebaut.

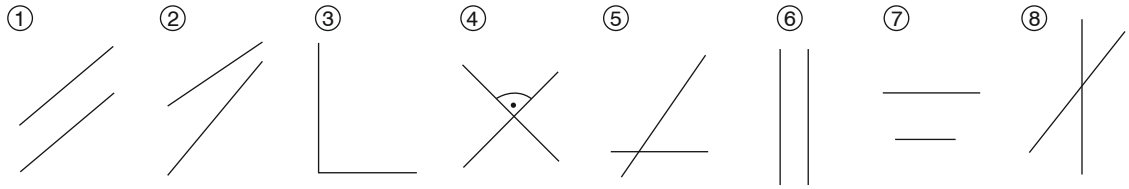
Der Vortext in Arbeitsblatt 1 beginnt mit der schlichten *Mitteilung der konventionellen Namen* der implizit erarbeiteten Konzepte. Aufgabe 2 zielt auf die Facette der *Konkretisierung und Abgrenzung*, indem sie Beispiele zuordnen lässt. Dabei

Name _____ Datum _____ Thema _____

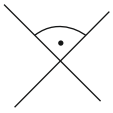
Wie kannst du Körperformen möglichst genau herstellen?

Beim genauen Basteln dürfen die Ecken und Kanten im Rechteck nicht schief sein. Damit die Verpackung möglichst gut aussieht, sollen die Faltkanten wie beim Rechteck verlaufen.
In den Ecken sollen die Kanten senkrecht zueinander sein.
Gegenüberliegende Kanten sollen parallel zueinander sein.

1. Welche der folgenden Bilder zeigen Linien, die senkrecht zueinander stehen? Wo liegen die Linien parallel? In welchen Bildern trifft keines von beidem zu? Markiere die Bilder in jeweils einer anderen Farbe.



➔ *Der Rechte Winkel zwischen zwei senkrechten Linien wird durch einen Punkt gekennzeichnet.*



2. Welche der Aussagen stimmen für parallele Linien?
Welche stimmen für senkrechte Linien? Markiere sie wie in Aufgabe 1.

a) Die Linien haben überall denselben Abstand zueinander.
b) Eine Linie kann man entlang der anderen auf sich selbst falten.
c) Die Linien dürfen nicht schräg über das Blatt verlaufen.
d) Man kann rechte Winkel zwischen die beiden Linien legen.
e) Eine der beiden Linien muss waagerecht sein.
f) Die beiden Linien schneiden sich nie.
g) Beide Linien stehen zu einer dritten Linie senkrecht.

3. Mit welchen zwei Aussagen aus Aufgabe 2 kann man am besten beschreiben, wann zwei Linien senkrecht sind?
Welche zwei Aussagen beschreiben parallele Linien am besten?

4. Vergleicht eure Lösungen aus 1. und 3. und übertragt sie in euren Wissensspeicher oder euer Regelheft.

© Friedrich Verlag GmbH I MATHEMATIK LEHREN **164 I 2011**
Aufgabe: Barzel, B./Glade, M./Prediger, S./Schmidt, U.: Verpackungen – Körperformen beschreiben, herstellen, zeichnen – In: mathewerkstatt. Klasse 5. Cornelsen, Berlin 2012, Vorabdruck 2011.

❶ WISSENSWERT

Ordnen im Unterricht: Planungsschritte

1. Welche Wissenselemente werden systematisiert und gesichert?
- Konkretisierungen (Beispiele) und Abgrenzungen (Gegenbeispiele), oder auch explizite Formulierungen (Regeln, Definitionen, Sätze, Verfahren)?
- Welche Bedeutungen und Zusammenhänge sollten explizit gesichert werden?
- Auf welche Konventionen muss man achten?

2. Wie soll der gesicherte Eintrag am Ende aussehen?
- Welche Wissensfacetten sollen explizit festgehalten werden?
- Welche Gestaltung ist für die Lernenden später nützlich? (Einsatz von Farben, verschiedene Darstellungen, Tabellenform, …)

3. Wie können Lernende bei der Erstellung des Eintrags aktiv werden? Welche „Aneignungshandlungen“ bieten sich an?
- Wie viel gebe ich vor, wie viel erarbeiten die Lernenden selbst? Was ist hier für die ausgewählten Wissenselemente möglich und wichtig?
- Wie komplex sind die expliziten Formulierungen, was können Lernende davon allein bewältigen?
- Welche Vorstellungen und Darstellungen haben die Lernenden längst entwickelt und können sie formulieren? Wo brauchen sie Unterstützung durch das Aufgabenformat (z. B. durch Zuordnen gegebener Texte oder Beispiele)?

4. Welche Unterrichtsformen und -methoden passen zu den gewählten Aneignungshandlungen?
- Was kann in Einzelarbeit erfolgen, wo ist Kommunikation mit anderen Lernenden oder der ganzen Klasse sinnvoll oder sogar erforderlich?
- Welche Schritte muss ich als Lehrkraft kontrollieren, um sicher zu gehen, dass nichts Falsches festgehalten wird?

werden zur Abgrenzung auch typische Fehlvorstellungen mit thematisiert: (1) und (4) würden diejenigen Schülerinnen und Schüler als nicht passend identifizieren, die parallel nur als „parallel zu den Kanten“ interpretieren. In Aufgabe 2 werden explizite Charakterisierungen angeboten, von denen in Aufgabe 3 je eine zur *expliziten Definition* ausgewählt wird. Gleichzeitig wird auch hier *Abgrenzungswissen* durch die Angabe von typisch falschen Aussagen gesichert.

Das Zeichnen von Parallelen und Senkrechten gehört zu einer anderen Wissensart (prozedurales Wissen: Mathematische Verfahren und handwerkliche Verfahren) und wird deshalb auch an anderer Stelle mit einer eigenen Aufgabe gesichert.

Wie gestalte ich die Phase des Systematisierens und Sicherns?

Bei der Vorbereitung ist es zentral, sich bei jedem Lerninhalt zu entscheiden, welche Wissenselemente gesichert werden sollen (vgl. 1. Schritt in **Kasten 1**). Welche Elemente sind an der jeweiligen Stelle im Lernprozess relevant? Welche sind erst später oder vielleicht gar nicht bedeutsam? Nur die wichtigsten Wissenselemente, die weiter gebraucht werden, sollten im Hefteintrag gesichert werden (2. Schritt im Kasten 2).

Zwischen selbst Finden und Nachvollziehen

Ein einfaches Beispiel: Wie bestimmt man relative Anteile, z. B. $\frac{25}{27}$ von 540? Nachdem dieses Problem in einem sinnstiftenden Kontext erkundet und eigenständig an Beispielen gelöst wurde, soll nun das Verfahren systematisch aufgeschrieben und damit gesichert werden.[1] Überspitzt formuliert kann der Unterricht dabei zwei extreme Wege gehen:

Variante 1: Das Buch wird aufgeschlagen, die Merkregel gelesen und ins Heft abgeschrieben. Den Lernenden bleibt dann nur, das Vorgegebene nachzuvollziehen – mit der Gefahr, dass sie sich das Wissen nur oberflächlich aneignen oder sich ihnen der Sinn des Wissenserwerbs nicht erschließt.

Variante 2: Die Lernenden bekommen den Auftrag, völlig eigenständig eine Anleitung für das Verfahren aufzuschreiben, ohne jegliche Unterstützung. Ob sie dabei etwas Richtiges zu Papier bringen, ist dann nur durch individuelle Korrektur jedes Formulierungsversuches zu garantieren. Dieser Weg birgt die Gefahr, dass viel zu viel Zeit in den Prozess fließt und Unsicherheiten aufkommen – bei Lehrenden und Lernenden, da man „nicht mehr weiß, was richtig und falsch ist“.

Viele Lehrkräfte suchen einen Weg zwischen diesen Extremen des reinen Nachvollziehens und des kompletten Selbstfindens. Die Herausforderung dabei ist, einerseits nicht zu viel Zeit und Mühe auf individuelle Schülerlösungen zu verwenden, andererseits aber die Lernenden so weit aktiv an dem Prozess des Systematisierens und Sicherns zu beteiligen, dass das zu sichernde Wissenselement nicht nur im Heft, sondern auch in den Köpfen ankommt. So bleibt das Wissen dort längerfristig aktivierbar.

Ein möglicher Mittelweg: Die Schülerinnen und Schüler machen die ersten Formulierungsversuche allein, die dann aber gemeinsam im Unterrichtsgespräch diskutiert werden. Das Gespräch wird von der Lehrperson moderiert und gelenkt – mit dem Ziel einer gemeinsamen endgültigen Formulierung. Dieses Vorgehen bietet viele weitere Zwischenstufen mit Aktivitäten, die das Spektrum zwischen selbst Finden und Nachvollziehen füllen, etwa die gemeinsame Arbeit an halb geeigneten (Schüler-)

Lösungen oder die Weiterarbeit an vorstrukturierten Teilgedanken.

Aneignungshandlungen

Gleich welches Vorgehen beim Sichern gewählt wird: Es gibt bewusste Handlungen, die gezielt dazu dienen, dass sich die Lernenden das neue Wissen aneignen – sogenannte „Aneignungshandlungen".

Geht es zum Beispiel um Aneignungshandlungen zum expliziten Formulieren, so kann man das Spektrum zwischen Allein-Finden und reinem Nachvollziehen exemplarisch durch die kognitiven Aktivitäten in **Abb. 1** aufzeigen.

Der oben skizzierte Weg von der freien zur gemeinsamen Formulierung ist eine Möglichkeit, Aneignungshandlungen in die Phase des Systematisierens und Sicherns einzubetten. Dieser Weg schränkt den Grad der Beteiligung nur so weit ein, wie unbedingt nötig.

Aber auch wenn man schon relativ konvergent beginnt und (fertige) Formulierungen vorgibt, muss man Aneignungshandlungen in den Lernprozess integrieren. Punkt 1 „Formulierungen alleine finden" entfällt bei diesem Vorgehen, doch die folgenden vier Punkte können als Aneignungshandlungen in einem anschließenden Übungsteil integriert werden. Übrigens wird bei der fünften Aktivität eine neue Wissensfacette angeschnitten, die der Konkretisierung (vgl. **Tabelle 1**, S. 3).

Statt den Prozess der Systematisierung über mehrere Stufen hinweg zu gestalten, kann man auch gleich auf einer Zwischenstufe einsetzen: **Abb. 2** zeigt einen vorstrukturierten Wissensspeicher, bei dessen Bearbeitung die Aneignungshandlung auf das Ergänzen unfertiger Formulierungen und auf das Konkretisieren durch Beispiele beschränkt ist (nach Prediger / Schink / Schneider / Verschraegen 2012).

Die hier geschilderten Prinzipien tragen den lernpsychologischen Anforderungen an die Effektivität des Lernens in zweierlei Hinsicht Rechnung (Atkinson / Renkl 2007):

1. Wissenserwerb benötigt aktive Aneignungsprozesse,
2. Aktivität allein reicht jedoch nicht, sie muss durch geeignete Lernarrangements auf die wesentlichen Wissenselemente fokussiert werden.

Aufgabenformate zum Ordnen

Was schon für die Sicherung expliziter Formulierungen aufgezeigt wurde, gilt analog für andere Wissensfacetten: Stets gibt es zwischen dem kompletten Alleinfinden und dem reinen Nachvollziehen sinnvolle Zwischenstufen mit mehr oder weniger stark vorstrukturierten, aber doch die Lernenden beteiligenden Aneignungshandlungen. Wir haben diese Stufungen in **Tabelle 2** (s. Seite 8) für jedes Wissenselement aus Tabelle 1 exemplarisch angedeutet, wenn auch ohne Anspruch auf Vollständigkeit.

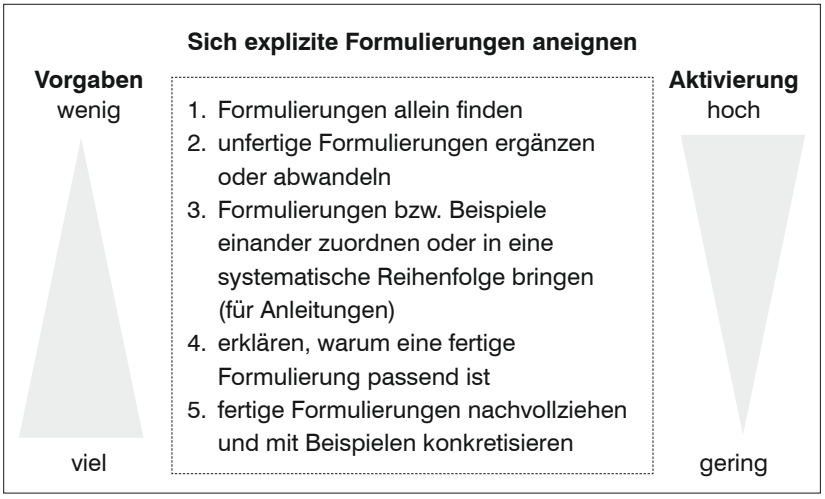


Abb. 1: Mögliche Aneignungshandlungen zum Formulieren von Konzepten und Zusammenhängen

So berechnet man den Teil, wenn Anteil und Ganzes gegeben sind		
	So berechnet man $\frac{25}{27}$ von 540:	*Mein Beispiel*
1. Schritt: Leichtere Aufgabe mit Zähler 1 rechnen	Erst rechne ich $\frac{1}{27}$ von 540, und zwar so: _____ _____	
2. Schritt: Hochrechnen auf größeren Zähler	Nun rechne ich auf $\frac{25}{27}$ hoch, und zwar so: _____ _____	

Abb. 2: Die Aneignungshandlung „unfertige Formulierungen ergänzen" als vorstrukturierte Vorlage zur Sicherung des Wissens

Für die Sicherung der Wissensfacette „Konkretisierung und Angrenzung von Konzepten" nennt Regina Bruder (2001) das *Identifizieren* (d. h. für Beispiele entscheiden, ob sie zu einem Begriff gehören, wie in Arbeitsblatt 2 Aufgabe 1) und das *Realisieren* (d. h. selbst geeignete Beispiele und Gegenbeispiele kennen) als die zentralen Aneignungshandlungen, die sich jeweils noch mit einem Begründungsauftrag versehen lassen. Als vierten Schritt – noch stärker gelenkt – könnte man noch ein (Gegen-)Beispiel mit fertiger Identifizierung vorgeben und nur noch die Identifizierung begründen lassen.

Ganz andere Aufgabenformate erfordert das Ordnen von Grundvorstellungen, wenn es darum geht, die Bedeutungen von Konzepten zu sichern. Dabei hat sich gerade das Zuordnen von Darstellungen bewährt (vgl. Swan 2005, Büchter / Leuders 2005).

Aneignungshandlungen für Wissenselemente – zwischen selbst Finden und Nachvollziehen

explizite Formulierungen

Konzeptuelles Wissen / Zusammenhänge
- Formulierung für Definitionen / Satz allein finden
- Unfertige Formulierung ergänzen oder abwandeln:
  Paula hat es so geschrieben, was stimmt daran noch nicht? Verändere die Formulierung.
- Passung erklären: Inwiefern kann man so das Konzept beschreiben?
- Fertige Formulierung nachvollziehen und konkretisieren

Algorithmen, Mathematische und handwerkliche Verfahren
- Formulierung für Anleitung allein finden
- Unfertige Formulierungen ergänzen oder abwandeln
- Formulierung für Schritte Beispielen zuordnen oder in eine systematische Reihenfolge bringen
- Fertige Formulierung nachvollziehen und konkretisieren

Konkretisierung und Abgrenzung

Konzeptuelles Wissen / Zusammenhänge
- Realisieren des Konzepts / Satzes:
  Finde Beispiele und Gegenbeispiele und erkläre, wieso sie (nicht) passen.
- Identifizieren des Konzepts:
  Welches dieser Beispiele passt zum Konzept, welche nicht? Wieso?
- Für gegebene Beispiele (Nicht-)Passung begründen:
  Inwiefern ist dies ein Gegenbeispiel? Wieso?

Algorithmen, Mathematische und handwerkliche Verfahren
- Falsche Ausführungen der Verfahren und Algorithmen prüfen und korrigieren
- Verschiedene Verfahren vergleichen, um Bedingungen der Anwendbarkeit abzuleiten
- Realisieren der Anleitung am eigenen Beispiel
- Anleitung auf Spezialfälle ausweiten
- Identifizieren, in welchen Beispielen die Anleitung nutzbar ist (und evtl. Kriterien formulieren)

Bedeutungen und Vernetzung

Konzeptuelles Wissen
- Eigenständig interpretieren
  Finde eigene Bilder (Darstellungen) und Situationen (Vorstellungen) zu diesem formalen Ausdruck (Term, Rechnung etc.) und erkläre, wieso sie passen.
- Selbstständig sortieren mit eigenen Kriterien
  Welche dieser Beispiele / Bilder / Situationen gehören zusammen?
- Zuordnen
  Ordne diese formalen Ausdrücke, Bilder (Darstellungen) und Situationen (Vorstellungen) einander zu und erkläre, wieso sie zusammen gehören.

Zusammenhänge, mathematische Verfahren, Algorithmen
- (Vorzugsweise anschauliche) Begründung für den Satz selbst finden und formulieren
- Am gegebenen Bild / Beispiel eine Begründung für den Satz formulieren
- Gegebene falsche und richtige Begründungsbausteine auswählen oder in Reihenfolge bringen
- Gegebene Begründungsbausteine gegebenen Bildern zuordnen

konventionelle Festlegung

Alle Wissensarten
- Selbst Konvention erfinden
- Selbst Konvention aus Liste von Möglichkeiten festlegen
  Suche aus dieser Liste möglicher Fachwörter eins aus, das am besten passt.
- Konvention nachvollziehen, ob sie adäquat sind
  In der Mathematik nennt man es so, erkläre, wieso der Name passt.
- Konvention nutzen
  Nutze die Bezeichnungskonvention in deinem Beispiel. Beschrifte das Dreieck.
- zusätzlich für konventionelle Regeln:
  Fehlersuche
  Beispiele / Gegenbeispiele finden

Tab. 2: Handlungen, die Wissen sichern

Für jedes einzelne zu sichernde Wissenselement ist also eine angemessene Balance zu finden zwischen dem Selbstfinden der Lernenden und dem Nachvollziehen von konvergenten, expliziten Formulierungen. Dieser Schritt hängt ab von der gewählten Sozialform, der Komplexität des Wissenselements und von der Zeit, die für den jeweiligen Sicherungsschritt investiert werden soll. Mittelfristig soll dabei eine gewisse Ausgewogenheit angestrebt werden.

Beispiel „Senkrecht und parallel“

Am Beispiel der Konzepte parallel und senkrecht in Arbeitsblatt 2 ist exemplarisch nachvollziehbar, wie die Wahl der Aneignungshandlungen mit jeder Wissensfacette neu getroffen wurde: Es wird zwar auf die Erfahrung beim Bau der (schiefen) Quader angeknüpft – dies wird aber nicht dauerhaft im Wissensspeicher festgehalten, denn das konsolidierte Wissen zu den Konzepten parallel und senkrecht soll davon unabhängig sein.

Konventionen können nicht eigenständig erarbeitet werden, deswegen werden die Namen der Konzepte parallel und senkrecht im Vorspanntext schlicht *mitgeteilt*. Die individuelle Aneignung der Namen erfolgt über die weitere Arbeit mit ihnen. Die Aneignungshandlung der Wissensfacette Kon-

kretisierung und Abgrenzung ist die des *Identifizierens*. Zwar wäre auch Realisieren möglich gewesen, doch sind so die typischen Fehlvorstellungen besser einzubauen. Erst nach dieser Konkretisierung werden in Aufgabe 2 explizite Charakterisierungen angeboten, von denen in Aufgabe 3 je einer zur *expliziten Definition* ausgewählt wird. Da Kinder die expliziten Definitionen in Klasse 5 noch sehr schwer selbst finden, beschränkt sich hier die Aneignungshandlung auf *Passung erklären.*

Die Lernenden einbeziehen – Schritt für Schritt

Natürlich macht die Festlegung geeigneter Wissenselemente und Aneignungshandlungen allein noch keinen Unterricht. Die konkrete methodische Gestaltung muss geplant werden: Welche Unterrichtsformen und -methoden passen? Was kann in Einzel- oder Partnerarbeit erfolgen, und wo ist Kommunikation mit anderen Lernenden oder der ganzen Klasse sinnvoll oder sogar erforderlich? Natürlich muss auch bei aktiver Beteiligung der Lernenden stets im Auge behalten werden, welche Schritte die Lehrkraft explizit kontrollieren muss, um sicher zu gehen, dass nichts Falsches festgehalten wird. Zum Beispiel halten wir Aufgabe 3 in Arbeitsblatt 2 für wichtig, weil keine individuellen Überlegungen unkontrolliert in den Wissensspeicher übernommen werden sollten.

Ob die Identifizierungs-, Zuordnungs-, und/oder Beispiel-Begründungs-Handlungen nun in Einzel- oder Gruppenarbeit oder Partnerarbeit, im Klassengespräch, mit der Ich-Du-Wir-Methode (Barzel 2006) vollzogen werden, wird man sich in der Vorbereitung stets auch in Abhängigkeit von Schwierigkeitsgrad, Stand der Klasse und verfügbarer Zeit überlegen.

Wie wichtig diese methodischen Überlegungen sind und mit welchen verschiedenen Aufgabenformaten Schülerinnen und Schüler ihre Lernergebnisse systematisieren und sichern können, zeigen die Beiträge in diesem Heft.

Fazit: Auf die Aneignung kommt es an!

Am Ende einer „Ordnen"-Aufgaben haben alle Lernenden, die deutlich aktiver in die Sicherungsprozesse einbezogen sind als beim Abschreiben von Tafel oder Buch, ihren „roten Kasten" im Wissensspeicher. Die Chance, dass er auch im Kopf angekommen ist, ist durch die eigene Arbeit an seiner Erstellung jedoch gewachsen. Unsere Erfahrung im Projekt KOSIMA[2] ist, dass mit solch gezielt ausgewählten Zwischenstufen es viel häufiger gelingt, die Schülerinnen und Schüler aktiv am Ordnen zu beteiligen ohne sie zu überfordern, weil die gezielten Aneignungshandlungen auf einer angemessenen Zwischenstufe in die eigenständige Arbeit integriert werden können, bevor eine gemeinsame Besprechung des Erarbeiteten erfolgt.

Anmerkungen

1 Zur Einbettung dieser Aktivitäten des Ordnens in einen gesamten Unterrichtsgang siehe Leuders/Hußmann/Barzel/Prediger 2011 und das Beispiel der Flächen in der Mathe-Welt in diesem Heft.

2 Alle Autorinnen und Autoren haben an diesem Beitrag gleichberechtigt mitgewirkt. Die meisten Unterrichtsideen in diesem Heft entstanden im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojekt KOSIMA (Kontexte sinnstiftenden Mathematikunterrichts, TU Dortmund – Hußmann/Prediger und PH Freiburg – Barzel/Leuders) und dem dabei entwickelten Schulbuch „mathewerkstatt".

Literatur

Atkinson, R. K./Renkl, A. (Hrsg.) (2007): Interactive learning environments: Contemporary issues and trends (Special Issue). – In: Educational Psychology Review, 19, S. 235–399.

Barzel, B. (2006): Ich-Du-Wir … sich mit einem Thema wirklich auseinandersetzen. – In: mathematik lehren, Heft 139, Friedrich Verlag, Velber.

Barzel, B./Glade, M./Prediger, S./Schmidt, U. (2011): Verpackungen – Körperformen beschreiben, herstellen, zeichnen – In: Barzel, B./Hußmann, S./Leuders, T./Prediger, S. (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 5. Cornelsen, Berlin 2012, Vorabdruck 2011.

Bruder, R. (2001): Mathematik lernen und behalten. – In: Pädagogik 53 (10), S. 15–18.

Brückner, H. (1978): Systematische Festigung des grundlegenden Wissens in den Klassen 5 bis 10. Zur Erarbeitung eines Wissensspeichers in den Klassen 5 bis 7 – In: Mathematik in der Schule 16(6), S. 310–316.

Büchter, A./Leuders, T. (2005): Sammeln, Sichern, Systematisieren. – In: Büchter/Leuders: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen, Cornelsen Scriptor, Berlin, S. 136–139.

Gallin, P./Ruf, U. (1990): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz – Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze.

Leuders, T./Hußmann, S./Barzel, B./Prediger, S. (Hrsg.) (2011): Das macht Sinn. Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen – In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 37.

Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. – In: Fritz, A./Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Beltz, Weinheim, S. 213–234.

Prediger, S./Schink, A./Schneider, C./Verschragen, J. (in Vorbereitung für 2012):: Kinder weltweit – Anteile in Statistiken – In: Prediger, S./Barzel, B./Hußmann, S./Leuders, T. (Hrsg.): mathewerkstatt 6. Cornelsen, Berlin.

Swan, M. (2005): Standards Unit. Improving learning in mathematics: challenges and strategies. – University of Nottingham.

vom Hofe, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte – Spektrum, Heidelberg.

Wittmann, E. C./Müller G. N. (1990): Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1 – Klett, Stuttgart.

Winter, H. (1983b): Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. – In: Journal für Mathematikdidaktik 4 (3), S. 175–204.