SUSANNE PREDIGER, CLAUDIA ADEMMER

Gemeinsam zum Volumen von Quadern

Eine inklusive und sprachsensible Unterrichtsreihe

LERNGRUPPE:	5./6. Schuljahr
IDEE:	Mit selbstdifferenzierenden Arbeitsaufträgen im gemeinsamen Lernen gestufte fachliche und sprachliche Lernziele erreichen
ONLINE-MATERIAL:	Erkundungsauftrag aus Kasten 1 als Arbeitsblatt
MATERIAL:	24 Holzwürfel pro Gruppe
ZEITBEDARF:	2–3 Unterrichtsstunden

Für den inklusiven Mathematikunterricht ist eine Balance zwischen individuellem und gemeinsamem Lernen anzustreben (Häsel-Weide/Nührenbörger 2013). Gute Ausgangspunkte für Phasen gemeinsamen Lernens bilden selbstdifferenzierende Aufgaben, an denen alle Lernenden mit unterschiedlichen Zugangsweisen arbeiten können (Scherer 2017). Wir zeigen in diesem Artikel, wie damit gestufte Lernziele erreicht werden können.

Anlass: reichhaltige, selbstdifferenzierende Aufgabe

Ein Beispiel für einen selbstdifferenzierenden Erkundungsauftrag zeigt **Kasten 1**, der einen gemeinsamen, handlungsorientierten Zugang zur Volumenbestimmung von Quadern ermöglicht (Prediger 2009).

Kasten 2 zeigt das Differenzierungspotenzial der Quader-Aufgabe: Der Auftrag ermöglicht unterschiedliche Wege, das Material und die Strukturen zu nutzen, vielfältige Darstellungsformen zur Dokumentation und differenziert auch danach, welche Schritte des Weges hin zur Volumenformel die Lernenden selbständig schaffen.

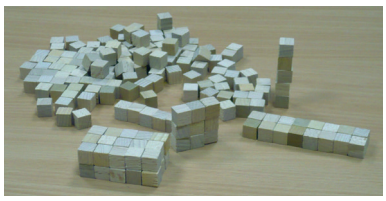
Der Auftrag ist als Einstieg auch für den inklusiven Unterricht gut geeignet, wie sich in mehreren Erprobungen herausgestellt hat (z. B. Rolka/Albersmann 2019). Denn auch Kinder mit Förderbedarf Lernen finden einen Zugang. Gleichwohl bleiben für gelungene Inklusion viele Fragen offen:

- Wie geht man mit der herausgeforderten Vielfalt der Produkte und Denkschritte in den weiteren Unterrichtsphasen um? Wie wird daraus konsolidiertes Wissen?
- Wie können die unterschiedlichen Niveaus kommunikativ aufeinander bezogen werden, um nicht nur Nebeneinander, sondern ein Mit- und Voneinander-Lernen (Häsel-Weide/Nührenbörger 2013) zu erreichen?
- Wie gelingt nicht nur für die Schnell-Denkenden ein Übergang vom inhaltlichen Denken zum Kalkül der Volumenformel, sondern für möglichst viele?
- Wie erreicht man, dass Lernende mit sonderpädagogisch festgestelltem Förderbedarf auch zentrale Strukturen erfassen? Gerade die, die noch keine multiplikativen Strukturen kennen, sollten evtl. lieber diese erarbeiten statt nur Türmchen zu bauen?

So attraktiv selbstdifferenzierende Einstiege für den gemeinsamen Unterricht sind, so wenig ist es also ein Selbstläufer, dass alle Kinder dabei *etwas mathematisch Relevantes* lernen. Dazu bedarf es weiterer Planungsschritte und Maßnahmen:

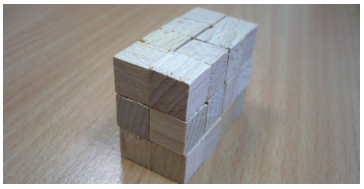
1 ZUM AUSPROBIEREN

Gemeinsames Lernen beginnt mit einer gemeinsamen Aufgabe



Selbstdifferenzierende Erkundungs-Aufgabe:
Hier habt ihr viele Holzwürfel.

- Welche Quader könnt ihr aus 24 Würfeln bauen?
- Notiert, welche ihr schon gefunden habt.
- Wie viele findet ihr?



Mögliche differenzierende Impulse:

- Findest du einen Quader?
- Findest du viele Quader?
- Findest du alle Quader?
- Wie kannst du sicher sein, dass du alle gefunden hast?

Alle möglichen Quader:
1×1×24, 1×2×12, 1×3×8, 1×4×6, 2×3×4, 2×2×6.

② WISSENSWERT

Differenzierungspotential des Auftrags

Heterogener Umgang mit Material und Strukturen

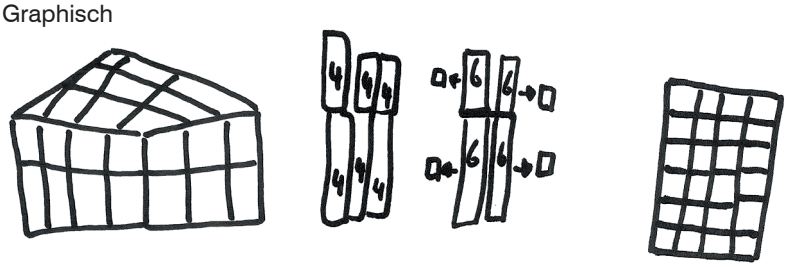
- längeres oder kürzeres Nutzen der handlungsorientierten Materialien
- früheres oder späteres Entdecken der Strukturen
- mehr oder weniger systematisches Suchen aller Quader
- mehr oder weniger starkes Bemühen, die Vollständigkeit aller sechs Quader zu begründen

Mögliche Schritte auf dem Weg hin zur Volumenformel

1. Mit Holzwürfeln bauen und separat zählen
2. Mit Holzwürfeln bauen und reihenweise gebündelt zählen oder aufaddieren
3. a. Mit Holzwürfeln bauen, Zahl der Würfel in Schichten durch Multiplizieren bestimmen und Schichten addieren (partielle Nutzung multiplikativer Strukturen)
   b. Quader in Schichten zerlegen, in einer Schicht zählen und dann mal Zahl der Schichten nehmen
4. Nur teilweise bauen und Rest mental bestimmen, meist durch Nutzung additiver oder multiplikativer Strukturen
5. Quader nur vorstellen und in Reihen und Schichten zählen
6. Nutzung multiplikativer Strukturen zur Bestimmung des Volumens (ohne Vorstellung)

Vielfältige Darstellungsformen aus einer Klasse

Graphisch



Numerisch

2·12=24
4·6=24
2·6·2=24
2·4·3=24
(2·3·4=24)
3·8=24
1·24=24

Verbal

4 runter 6 nach links
8 runter 3 nach links
12 runter 2 nach links
24 runter 1 nach links
2 nach oben 4 nach unten 3 nach links
2 nach oben 2 nach unten 6 nach links

Ich habe eine Platte und dann noch eine Platte da drüber.

Ich habe immer 3 Würfel aufeinander gestapelt.

Planungsschritte jenseits der Selbstdifferenzierung

Inklusiver Mathematikunterricht wird dann besonders fruchtbar, wenn individuelle Lernbedarfe auch in Momenten gemeinsamen Lernens zum Tragen kommen können, z. B. indem wichtige Verstehensgrundlagen für die einen in Erinnerung gerufen und parallel für die anderen erarbeitet werden (Häsel-Weide/Nührenbörger 2013).

Im Folgenden wollen wir zeigen, wie dies auch bei der Volumenbestimmung von Quadern möglich ist. Wir orientieren uns dabei an vier Planungsschritten (Prediger u. a. 2019):

1. Verstehensbezogene und sprachliche Anforderungen identifizieren
2. Differenzierte Schwerpunkte setzen
3. Verstehensgrundlagen und Sprachmittel fokussiert fördern
4. Verstehensgrundlagen und Sprachmittel in gemeinsames Lernen einbringen

Verstehensbezogene und sprachliche Anforderungen identifizieren

Zunächst muss das Thema daraufhin analysiert werden, welche Verstehensgrundlagen für das Erreichen der Lernziele erforderlich sind, in unserem Fall das Begriffsverständnis von Quader und Volumen sowie die Grundvorstellungen und Sprachmittel zu multiplikativen Strukturen:

Dem Volumen-Konzept liegt die Idee des Messens zugrunde: Das Volumen eines Quaders gibt an, wie viel (Luft, Wasser …) in den Quader hineinpasst. Das Volumen eines Quaders in Kubikzentimetern zu messen, bedeutet zu fragen, wie viele Kubikzentimeter-Würfel in den Quader hineinpassen. Diesen Gedanken können alle Lernenden erfassen, auch wenn die Mittel, die Zahl der Würfel zu bestimmen, unterschiedlich sein werden:

- Würfeln separat zählen
- Würfel in Reihen und Schichten strukturiert zählen und addieren
- Würfel in Reihen und Schichten multiplikativ zählen
- Länge, Breite. Höhe multiplizieren

Um von der inhaltlichen Grundvorstellung des Ausmessens mit Würfeln zur kalkülhaften Volumenformel $V = h \cdot l \cdot t$ überzugehen, reicht es nicht,

Kasten wurde gegenüber Druckfassung korrigiert

die Variablen in der Formel benennen zu können („l ist die Länge, h ist die Höhe, t die Tiefe"). Stattdessen muss vor allem die Operation erarbeitet und erklärt werden: Warum gerade Multiplizieren statt Addieren oder Potenzieren?

Das *Begründen* der Formel durch Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen ist die anspruchsvollste Sprachhandlung, sie muss demgemäß durch mehrere andere Sprachhandlungen vorbereitet werden. In **Tab. 1** haben wir zusammengestellt, welches fachliche Teilziel mit welcher Sprachhandlung verbunden ist, und welche Sprachmittel dazu jeweils gebraucht werden.

Am kognitiv und sprachlich anspruchsvollsten ist dabei der Übergang vom handlungsgestützten Zählen in Reihen zum abstrakten Multiplizieren. Mehrfache Erprobungen im Unterricht haben dazu gezeigt, dass dieser Übergang durch Sprachmittel unterstützt werden kann, die die mentale Aktivität des Bündelns befördern: Der Satzbaustein „drei 4er-Reihen" unterstützt, dass die „4er" als neue Einheit gesehen werden, also den zentralen Schritt im Identifizieren der multiplikativen Bündel-Struktur.

Differenzierte Schwerpunkte setzen

Tab. 1 ist gleichsam die Landkarte, auf der man als Lehrkraft für die Erreichung der Lernziele navigieren kann, jedes fachliche Teilziel ist mit anderen Sprachhandlungen und Sprachmitteln verbunden, die sukzessive aufeinander aufbauen.

In einer inklusiven Klasse gilt es nun, für die einzelnen Lernenden bzgl. der Lernziele differenzierte Schwerpunkte zu setzen, diese werden in **Tab. 2** in der Übersicht gezeigt (Gruppeneinteilung ähnlich bei Wember 2013). Solche Tabellen werden zwar in der Praxis selten explizit ausgefüllt, aber sind als Denkmuster hilfreich.

Bei *Sarah und Paul* (den zwei Lernenden mit besonderen mathematischen Potentialen), können die Verstehensgrundlagen der vorangegangenen Klassen (Fachwort Quader und Multiplizieren als Zählen in Bündeln) vorausgesetzt werden, sie starten nach kurzer Einführung in das Konzept des Volumens direkt durch bis zur kombinatorischen Ausschöpfung. Sie finden eigenständige Sprachmittel, in denen sie sich die Ideen

Fachliches (Teil-)Lernziel	**Sprachhandlung und dazu notwendige Sprachmittel** *(wichtigste Satzbausteine kursiv gedruckt)*
Verstehensgrundlagen vorangehender Jahrgänge	
Fachwort Quader kennen	**Wort Quader erklären:** Ein Quader ist ein Körper, dessen Flächen alles Rechtecke sind. Er hat 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen.
Multiplikationen als Zählen in Bündeln	**Bedeutung der Multiplikation erklären:** 3 · 4, das sind zum Beispiel *drei 4er-Gruppen.* Ich zähle nicht alles einzeln, sondern ich zähle in Gruppen: *drei 4er-Gruppen, das sind 3 · 4*
Neuer Inhalt	
Konzept Volumen über die Idee des Messens verstehen	**Bedeutung von Volumen erklären:** Das Volumen/der Rauminhalt eines Quaders gibt an, *wie viel* (Luft, Wasser …) in den Quader *hineinpasst*. Um das Volumen in Kubikzentimetern zu messen, fragt man, wie viele Kubikzentimeter-Würfel *hineinpassen*.
Länge, Breite, Höhe mit Reihen und Schichten verknüpfen	**Quader formal beschreiben:** Der Quader ist 4 cm *lang*, 2 cm *breit* und 3 cm *hoch*. **Quader bedeutungsbezogen beschreiben:** Die untere Reihe ist 4 Würfel lang. Jede *Schicht* hat *zwei 4er-Reihen.* Der Quader hat 3 Schichten.
Mit Reihen und Schichten das Volumen bestimmen	**Erläutern des strukturierten Zählens unter Nutzen der multiplikativen Struktur:** In jeder Schicht sind *zwei 4er-Reihen, also 2 · 4* Würfel. Es sind 3 Schichten von je 2 · 4 Würfeln, also *drei 8er-Schichten*, d. h. 3 · 8 Würfel.
Volumenformel entdecken / nutzen Volumen = Höhe mal Breite mal Länge	**Konkreten Rechenweg erläutern:** Für den Quader mit 4 cm *Länge*, 2 cm *Breite* und 3 cm *Höhe* kann ich das Volumen berechnen durch Multiplizieren: $V = 3 \cdot 2 \cdot 4\,cm^3$. **Rechenweg allgemein erläutern:** Man kann das Volumen im Quader berechnen durch Länge mal Breite mal Höhe., also $V = h \cdot b \cdot l$ (bzw. Länge mal Breite mal Tiefe).
Volumenformel verstehen d. h. mit strukturiertem Zählen verknüpfen (Darstellungsvernetzung)	**Volumenformel inhaltlich begründen:** Man kann für das Volumen eines Quaders immer Länge mal Breite mal Höhe rechnen, denn die *Länge gibt an, wie viele Würfel in einer Reihe sind.* Die Breite gibt an, *wie viele Reihen die Grundschicht hat*, also z. B. *zwei 4er-Reihen*. Dann berechnet man die Grundschicht der zwei 4er-Reihen durch 2 · 4. Die Höhe gibt an, wie viele Schichten der Quader hat, wenn er z. B. 3 Schichten hat, rechnet man V = 3 · 2 · 4. Das geht genauso für jede beliebige Länge von Reihen und Anzahl von Reihen und Schichten.
Kombinatorische Ausschöpfung	**Vollständigkeit der gefundenen Quader begründen:** Alle Quader-Volumen berechnet man mit Länge der Reihen mal Zahl der Reihen mal Zahl der Schichten, das heißt, man sucht alle Malaufgaben zur 24 (s. rechts). Dazu kann man mit dem kleinsten Faktor anfangen und immer größer werden. Wenn man so systematisch vorgeht, gibt es keine weiteren Quader. 24 = 1 · 1 · 24 1 · 2 · 12 1 · 3 · 8 1 · 4 · 6 2 · 2 · 6 2 · 3 · 4

Tab. 1: Gestufte fachliche und sprachliche Lernziele bei der Volumenbestimmung des Quaders (aus Prediger/Ademmer 2019)

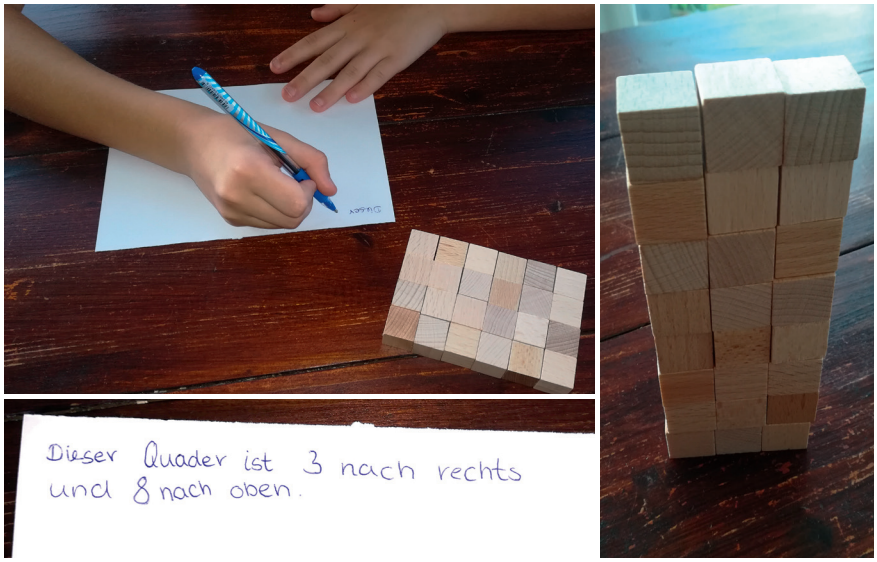


Abb. 1: Dokumentationen mit graphischen und verbalen Darstellungen

Tipp

Beschreibe deinen Quader so:
Die erste Reihe ist 4 Würfel lang.
In die Grundschicht passen acht 4er-Reihen.
Es sind 10 Schichten.

Abb. 2: Hilfestellung zur Notation für die Fördergruppe

zurechtlegen. Paul schreibt seine Ideen zwar nur nach mehrfacher Ermahnung auf, ihm gelingt jede Sprachhandlung dann jedoch ohne Hilfe.

Pia und Mesut (aus der vierköpfigen starken Gruppe) erfinden eigenständig, das Volumen durch Nutzung der multiplikativen Struktur zu bestimmen. Sie können es allein jedoch nicht so verbalisieren, dass sie daraus eine Begründung der Volumenformel ableiten können. Durch Bereitstellung der multiplikativen Sprachmittel „vier 3er-Reihen" gelingt es ihnen dann doch.

Für *Meike und Derek* (aus der siebenköpfigen Mittelgruppe) ist das Verstehen der Volumenformel das zentrale Lernziel, wenn sie die Begründung kollektiv mit erarbeiten können, ist dies ausreichend. Die multiplikativen Sprachmittel müssen dafür reaktiviert und für den neuen Kontext eingeübt werden.

Selim (Förderschwerpunkt Lernen) und Justin (mathematikschwacher Regelschüler) und sieben andere in der (bei uns so genannten) Fördergruppe haben zwar die Grundvorstellung der Multiplikation als Zählen in Bündeln schon einmal erarbeitet, müssen sie aber im neuen Kontext noch einmal erarbeiten. Dies dient dazu, diese zentrale Verstehensgrundlage zu festigen und zu vernetzen. Wenn sie dafür mehr Zeit aufbringen dürfen als der Rest der Klasse (z. B. durch Hinzuziehung der Förderstunden), dann können sie auch die Volumenformel als die schematisierte Fassung anbahnen.

Aaron (Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung), der im Zahlenraum bis 100 inzwischen addiert und subtrahiert, nutzt die Einheit, um sich dem Zählen in Bündeln anzunähern. Diese Verstehensgrundlage, die für die anderen Lernvoraussetzung ist, ist für ihn zentrales Lernziel der Einheit.

Die Auflistung macht deutlich, dass nicht nur die „*zieldifferent* unterrichteten Lernenden" individuelle Schwerpunktsetzungen in den Lernzielen benötigen, sondern auch die sogenannten „*zielgleich* unterrichteten Lernenden" im Regelspektrum der Heterogenität. Der schulorganisatorische Begriff der Zielgleichheit darf nämlich nicht als didaktischer Begriff missverstanden werden: Auch bei *gleichen Abschlusszielen* am Ende der Schullaufbahn können die *schwerpunktmäßigen* Lernziele in einer einzelnen Unterrichtseinheit unterschiedlich sein.

Verstehensgrundlagen und Sprachmittel gezielt fördern

Trotz individueller Schwerpunkte arbeiten zunächst alle Lernenden an demselben selbstdifferenzierenden Auftrag aus **Kasten 1**. Die vier Phasen der Aufgabe, *Bauphase, Dokumentationsphase, Vergleichsphase* und *Schematisierungsphase* erfordern dennoch unterschiedliche individuelle Impulse:

In der *Bauphase* sind nahezu keine individuellen Impulse notwendig. Allen Kindern (auch Aaron in **Abb. 1**, der kurz beim Nachbarn schielt) gelingt es, einfach loszubauen und dabei einen oder mehrere Quader zu finden. Nur Tom (Förderschwerpunkt Emotionale-Soziale Entwicklung), der mathematisch in der Mittelgruppe arbeitet, braucht eine Hilfe, um seine Aufmerksamkeit zu fokussieren. Damit er die Würfel nicht durch die Gegend schmeißt oder ziellos Türmchen baut, bekommt er zwei Karten, die mögliche Raster der Grundfläche vorgeben (also z. B. ein Rechteck mit 2×4 Kästchen in der Größe der Holzwürfel als Grundriss): „Tom, du baust zuerst die Quader, die hier drauf passen, nichts anderes, ok?"

In der *Dokumentationsphase* können viele Lernende mit der Offenheit nicht umgehen und hätten gern eine Anleitung. „Wie sollen wir denn notieren, Frau Ademmer?" Um die Vielfalt der Darstellung nicht einzuschränken, bleibt die Lehrerin jedoch vage, „Wie ihr wollt. Mathematikerinnen zeichnen gerne Bilder, beschrieben mit Worten oder mit Zahlen. Wichtig ist nur, dass ihr eure Quader damit auch unterscheiden könnt."

Nur Selim, Justin und den anderen aus der Fördergruppe (Lernenden mit FS Lernen und Mathematikschwäche) verschafft die Lehrerin schon in dieser Phase einen Startvorteil für die spätere Schematisierungsphase. Sie erhalten ein zusätzliches Kärtchen mit Satzbausteinen für das Beschreiben (**Abb. 2**). Mit dieser Vorgabe ist das Beschreiben zwar zunächst etwas aufwendiger, doch bereitet sie den nächsten Schritt für die Fördergruppe bereits vor: Für das Zählen in Bündeln und ihre Abkürzung durch multiplikative Strukturen muss das mentale Bündeln durch „vier 3er" sprachlich begleitet werden. Diese Sprachmittel werden für die Förderkinder bereits in der Dokumentationsphase häufiger eingeübt

Fotos: André Klemm

Gruppe mit Beispiel-Lernenden und Anzahl in der Klasse		**Differenzierte Schwerpunkte für verschiedene Lernendengruppen**				
		Potentialgruppe Sarah & Paul (2x)	Starke Gruppe Pia & Mesut (4x)	Mittelgruppe Maike & Derek (7x)	Fördergruppe Selim (FSL) & Justin (2x + 7x)	FS Geistige Entw. Aaron (1x)
Fachliches (Teil-)Lernziel	**Sprachhandlungen**					
Fachwort Quader kennen	**Wort Quader erklären**	(sicher beherrscht)	(sicher beherrscht)	(kurz reaktivieren)	reaktivieren	kann er mit Hilfe
Multiplikationen als Zählen in Bündeln	**Bedeutung der Multiplikation erklären**	(sicher beherrscht)	(kurz reaktivieren)	reaktivieren	wieder erarbeiten	**zentrales Lernziel** erarbeiten
Konzept Volumen über die Idee des Messens verstehen	**Bedeutung von Volumen erklären**	kurz einführen	kurz einführen	erarbeiten	erarbeiten	anbahnen
Länge, Breite, Höhe mit Reihen und Schichten verknüpfen	**Quader bedeutungs-bezogen beschreiben**	selbst entdecken	selbst entdecken	selbst entdecken	**zentrales Lernziel** mit Hilfe erarbeiten	
Mit Reihen und Schichten das Volumen bestimmen	**Erläutern des Zählens mit multiplikativer Struktur**	selbst entdecken & verbalisieren	selbst entdecken, mit Hilfe verbalisieren	mit Hilfe erarbeiten und verbalisieren	**zentrales Lernziel** mit Hilfe erarbeiten	
Volumenformel verstehen	**Volumenformel inhaltlich begründen**	selbst entdecken & verbalisieren	**zentrales Lernziel** erarbeiten	**zentrales Lernziel** erarbeiten	anbahnen	
Volumenformel entdecken/nutzen	**Rechenweg erläutern**	selbst entdecken & verallgemeinern	erarbeiten & verbalisieren	erarbeiten		
Kombinatorische Ausschöpfung	**Vollständigkeit der gefundenen Quader begründen**	selbst entdecken	nach Erarbeitung selbst entdecken	ggf. anbahnen		

Tab. 2: Differenzierte fachliche und sprachliche Lernziele für verschiedene Lernendengruppen setzen (FS = Förderschwerpunkt)

als bei den anderen, noch bevor eine Systematisierung erfolgt.

Während alle anderen Lernenden intensiv einzeln arbeiten, hat die Lehrerin Zeit für Aaron. Mit ihm übt sie während des Bauens das Zählen in 2er-Bündeln und 3er-Bündeln: „Es sind 2, 4, 6, 8, 10, 12 Würfel.“ und „Hier sind es 3, 6, 9, 12 Würfel.“ Daran kann in späteren Schritten auch für Aaron die Sprechweise von vier 3er-Reihen angeknüpft werden, auch wenn er noch länger brauchen wird, dies selbst zu formulieren.

Verstehensgrundlagen und Sprachmittel in gemeinsames Lernen einbringen

In der *Vergleichsphase* gilt es nun, die verschiedenen Lernniveaus aufeinander zu beziehen, so dass die Kinder von- und miteinander lernen, ohne dass sich die Stärkeren langweilen und die Schwachen überfordert sind. Einzelne Kinder präsentieren dazu ihre auf DIN-A6-Zetteln notierten Beschreibungen, die über Dokumentenkamera und Beamer vergrößert werden. Handlungsbegleitend wird die jeweilige Notation mit Worten erklärt. Der Rest der Klasse muss aufgrund der mündlich vorgetragenen Beschreibungen prüfen, ob sie denselben Quader gefunden haben. Diese Höranforderung ist anspruchsvoll auch für die Starken, weil sie mentale Rotationen zum Prüfen der Passung zu den eigenen Quadern erfordert. Um auch die kognitiv schwächeren Lernenden mit in den Vergleichsprozess einzubinden, wird nun das Foto des beschriebenen Quaders unter die Notiz gehangen. Wieder wird gefragt: Wer hat den gleichen Quader gebaut? Durch die

Lehrerin: Wie viele Würfel hat dieser Quader?
Maike: Ich zähle wieder eine Reihe und dann die nächste: 4+4, also ….
Pia: … [fällt ihr ins Wort] du brauchst gar nicht zu zählen, denn du weißt ja, wie viele Würfel es sind. Genauso viel, wie in der ersten Platte.
Mesut: Das ist die erste Etage.
Lehrerin: Wir nennen es Schicht. Wie viele Schichten hat der Quader?

Selim zählt die Schichten anhand des Quaders auf dem Foto und markiert diese mit einem Post-It.

Lehrerin: OK. Vier drei Schichten. Wie viele Würfel hat die Schicht? [An die Förderkinder gewandt]
Justin: Vier Würfel in der Reihe und zwei Reihen.
Selim: Zwei Viererreihen.
Lehrerin: Welche Aufgabe passt dann dazu?
Derek: 2·4 Würfel.
Tafelbild: Würfel in der ersten Schicht Anzahl der Schichten
Lehrerin: Was machen wir mit den Zahlen 2 4 3 ?
Mehrere Kinder: Malnehmen!
Lehrerin: Warum malnehmen?
…
Abschluss:
L: Was wissen wir jetzt als Mathematiker?
Pia: Den Rauminhalt. Beim Flächeninhalt haben wir geguckt, was in eine Fläche passt, deswegen muss das jetzt der Rauminhalt sein. Sie haben uns 24 Würfel gegeben und die passen in den Quader, den wir gebaut haben.
Paul: Das ist das Volumen: Länge mal Breite mal Höhe. Das wusste ich schon vorher. Der Mathematiker weiß aber jetzt: Die Länge ist die Zahl der Würfel in einer Reihe, die Breite ist die Anzahl der Reihen und die Höhe ist die Anzahl der Schichten.
Lehrerin: Gibt es sonst noch etwas, was der Mathematiker weiß?
Selim: Dass mein Quader 24 Würfel hat.
Justin: ... und es gibt mehrere Quader.
Paul: Verschiedene Quader, die alle aus 24 Würfel sind. Das ist der Rauminhalt: 24 Würfel.

Abb. 3: Auszug aus dem Klassengespräch

visuelle Orientierung ist es nun allen Lernenden möglich, sich aktiv in den Vergleichsprozess einzubringen. So erfolgt eine mündliche Stufendifferenzierung innerhalb der Vergleichsphase.

In dieser Phase ringen die Kinder um Wörter, die für die Erklärung notwendig sind: Etagen, lange Reihe, Reihe nach oben … Selim und Justin sind stolz, durch den Startvorteil die Beschreibung mit Reihen und Schichten (aus **Abb. 3**) in das Klassengespräch einbringen zu können. Denn diese ist für alle Kinder relevant für die Systematisierungsphase.

Die *Systematisierungsphase* beginnt, indem ein Quader, der durch das Foto ausgewählt wurde, nachgebaut wird. In der ersten Schicht zählt Aaron in 2er-Schritten die Grundschicht des Quaders. Dann beschreibt Selim: „*Die erste Reihe ist 4 Würfel lang. Es gibt zwei 4er-Reihen.*“ Und Tom entdeckt plötzlich, „*Cool, also 4·2, müssen wir ja nur die Reihen zählen!*“ Durch Aarons Zählen in Schritten und Selims Beschreibung hat er die multiplikative Struktur entdeckt, die er vorher übersehen hatte. Zur Verdeutlichung der entdeckten Bündel-Struktur ersetzt die Lehrerin die losen Würfel durch (geklebte) Würfelreihen.

Das daran ansetzende systematisierende Klassengespräch ermöglicht, viele Kinder auf ihrem jeweiligen Niveau zu beteiligen, wie der Dialog (**Abb. 3**) zeigt.

Fazit

Ein Auftrag, und automatisch lernt jeder auf seinem Niveau? So einfach ist es nicht, aber wenn Lehrkräfte die Anforderungen gut identifiziert haben (**Tab. 1**) und differenzierte Schwerpunkte für unterschiedliche Lernendengruppen setzen (**Tab. 2**), dann ist sowohl individuelle Förderung möglich als auch, die verschiedenen Lernstufen aufeinander zu beziehen. Wenn die Förderkinder ihren Fokus auf die Verstehensgrundlagen in das gemeinsame Klassengespräch immer wieder einbringen können, dann nutzt das allen, denn die Stärkeren verlieren so die Grundlagen nicht aus dem Blick und lernen die Verknüpfung zum Neugelernten. Dies ist für inhaltliches Begründen essentiell.

Anmerkung
Die Materialien und Konzepte sind entstanden im Rahmen des Projekts SIMA-Thüringen (gefördert durch das Thüringer Ministerium für Bildung, Jugend und Sport) und dem BMBF-Projekt Matilda: Mathematik inklusiv lehren lernen (Förderkennzeichen 01NV1704, Projektleitung S. Prediger, J. Kuhl).

Literatur
Häsel-Weide, U./Nührenbörger, M. (2013): Mathematiklernen im Spiegel von Heterogenität und Inklusion. – In: Mathematik differenziert, 4(2), S. 6–8.
Prediger, S. (2009): Quader bauen aus 24 Würfeln – Kinder auf dem Weg zur Volumenformel. – In: Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht. Primar, 1(1), S. 8-12.
Prediger, S./Ademmer. C. (2019, i. Dr.): Sprachbildender Vorstellungsaufbau zu Flächeninhalt und Volumen in Klasse 5/6. – In: Prediger, S. (Hrsg.). Sprachbildender Mathematikunterricht – Ein forschungsbasiertes Praxisbuch. Cornelsen: Berlin.
Prediger, S./Strucksberg, J./Ademmer, C./ Pöhler, B./Kuhl, J. u.a. (2019): Matilda-Handreichung zum inklusiven Prozente-Unterricht. Open Educational Ressource aus dem Projekt Mathematik inklusiv lehren lernen. Dortmund: Technische Universität / DZLM.
Rolka, K./Albersmann, N. (2019): Lernen am gemeinsamen Gegenstand. Die Aktivität »Quader bauen« für Schüler/innen mit dem Förderschwerpunkt Lernen. – In: MNU Journal.
Scherer, P. (2017): Gemeinsames Lernen oder Einzelförderung? – Grenzen und Möglichkeiten eines inklusiven Mathematikunterrichts. – In: Hellmich, F./Blumberg, E. (Hrsg.): Inklusiver Unterricht in der Grundschule. Stuttgart: Kohlhammer. S. 194–212.
Wember, F. (2013): Herausforderung Inklusion: Ein präventiv orientiertes Modell schulischen Lernens und vier zentrale Bedingungen inklusiver Unterrichtsentwicklung. – In: Zeitschrift für Heilpädagogik, 64(10), S. 380–388.