Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). Beiträge
zum Mathematikunterricht 2020. Münster: WTM, 2020. S. 213-216.

Alexandra DOHLE & Susanne PREDIGER, Dortmund

Umstrukturierungsgleichheit von Termen – eine Brücken-Vorstellung zwischen bildlicher und symbolischer Darstellung

Der Übergang von der Arithmetik zur Algebra stellt eine zentrale Herausforderung in der Sekundarstufe 1 dar. In vielen Fällen findet die Einführung der Algebra dabei statt, ohne sie ausreichend mit den arithmetischen Vorerfahrungen der Lernenden in Beziehung zu setzen (Bills et al., 2003). Ein bedeutender Aspekt dieses Übergangs liegt in einem Perspektivwechsel von einem reinen Blick auf Rechenoperationen und Ergebnissen, hin zu einem Fokus auf Gleichungen, Beziehungen und mathematischen Strukturen in der Algebra (Steinweg, 2013). Ein Ziel unseres Entwicklungsforschungsprojekts MuM-Präalgebra ist es, diesen Übergang durch geeignete Lernumgebungen in der Klasse 5/6 zugänglicher zu machen, und zwar mit Fokus auf Terme und Gleichwertigkeit von Termen, noch bevor die Variablen eingeführt werden. Dieser Kurzbeitrag schlägt vor, eine weitere Vorstellung zur Gleichwertigkeit von Termen einzuführen, mit der an die Vorerfahrungen besser angeknüpft werden kann. Er leistet damit einen Beitrag zur Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstands Gleichwertigkeit von Termen.

Drei klassische Vorstellungen zur Gleichwertigkeit von Termen

Zur Gleichwertigkeit von arithmetischen und algebraischen Termen (d.h. ohne und mit Variablen) erweisen sich in der Literatur drei Vorstellungen als bedeutsam (Malle 1993, Prediger 2009,), die in drei algebraische Sichtweisen eingeordnet werden können (Kieran 2004)

- *Ergebnis- bzw. Einsetzungsgleichheit in operationaler Sicht:* Zwei Terme sind gleichwertig, wenn sie das gleiche Ergebnis haben bzw. bei Variablentermen für alle eingesetzten Zahlen den gleichen Wert haben.
- *Beschreibungsgleichheit in relationaler Sicht:* Zwei Terme sind gleichwertig, wenn sie dieselbe Situation / dasselbe Bild beschreiben.
- *Umformungsgleichheit in transformationaler Sicht:* Zwei Terme sind gleich wertig, wenn sie durch Anwendung algebraischer Umformungsregeln ineinander umgeformt werden können.

Seit vielen Jahrzehnten wird kritisiert, dass der Arithmetikunterricht oft einseitig die operationale Sicht betont (historischer Überblick in Kieran 2004). Die Beschreibungsgleichheit in relationaler Sicht dagegen ist nach dem Prinzip der Fortsetzbarkeit in der Algebra tragfähiger, auch weil sie die inhaltliche Begründung für die Gültigkeit der Termumformungsregeln bieten kann.

Analyse der Vorstellungen und Verortung einer Lücke

Malle (1993) schlägt als Lernpfad vor, von Ergebnis- zur Beschreibungs- und dann zur Umformungsgleichheit voranzuschreiten. Der Übergang von Beschreibungsgleichheit zur Umformungsgleichheit erweist sich allerdings für viele Lernende als herausfordernd. Die Ursachen werden durch die Zusammenhänge in Abb. 1 erklärbar (Dohle & Prediger 2020):

Für (die hier fokussierten) Terme ohne Variablen unterscheiden sich die drei Vorstellungen in der Darstellungsform und der Art des Vergleichs: Ergebnis- und Beschreibungsgleichheit verlangen einen statischen Vergleich (d.h. werden zum Ergebnis oder Bild/Situation in Bezug gesetzt). Die Umformungsgleichheit dagegen verlangt einen dynamischen Vergleich, bei dem der eine Term in den anderen überführt wird. Beim Übergang von der Beschreibungs- zur Umformungsgleichheit muss also nicht nur die Darstellungsform gewechselt und damit der Übergang von Inhalt zu Kalkül vollzogen werden (Prediger 2009), sondern gleichzeitig der Übergang von statischem zu dynamischem Vergleich, der meist implizit bleibt (Dohle & Prediger 2020).

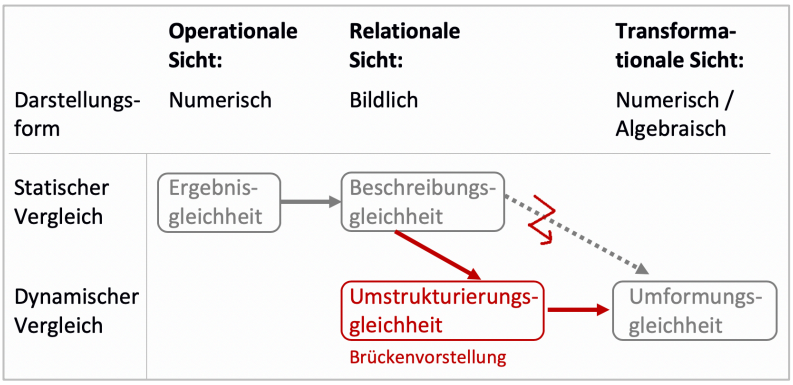

Abb. 1: Lernpfad zwischen den Vorstellungen durch Brückenvorstellung vereinfachen

Um den zweigliedrigen Übergang zu erleichtern, haben wir im Lernpfad eine Brückenvorstellung eingefügt, mit der der Übergang zu einer dynamischen Vergleichsvorstellung innerhalb der relationalen Sicht erleichtert werden kann. Der Bezug auf die bildliche Darstellung bleibt dabei zunächst bestehen:

Als Umstrukturierungsgleichheit bezeichnen wir die Deutung, dass zwei Terme gleichwertig sind, wenn die (durch sie beschriebenen) Strukturen im Bild ineinander überführt werden können. Die Transformationen zwischen Termen werden so zunächst durch (konkrete oder vorgestellte) Bild-/Materialhandlung gestützt. Eine Umformung des Terms $8 \cdot 12$ zum Term $24 \cdot 4$ entspräche etwa der Unterteilung der acht 12er- Gruppen in jeweils drei 4er

(Abb. 2, Bild 1 → Bild 2) und einer anschließenden Umbündelung der entstandenen 4er-Gruppen in eine Struktur aus 8 · 3 (Abb. 2, Bild 2 → Bild 3).

Am Beispiel der Fünftklässlerin Viktoria wird deutlich, wie die zunächst inhaltliche Vorstellung der Umstrukturierung im Bild sukzessive weiterentwickelt und mit der Symbolsprache, d.h. mit der Veränderung im Term, verknüpft werden kann.

Viktoria und ihr Mitschülerin Mira beschreiben zunächst den Veränderungsprozess zwischen Bild 1 und Bild 2 (vgl. Abb. 2). Das Vokabular ihrer Alltagssprache (durchbrechen, teilen, ausschneiden) nutzen sie dabei erfolgreich, um die Dynamik der Veränderung auszudrücken.

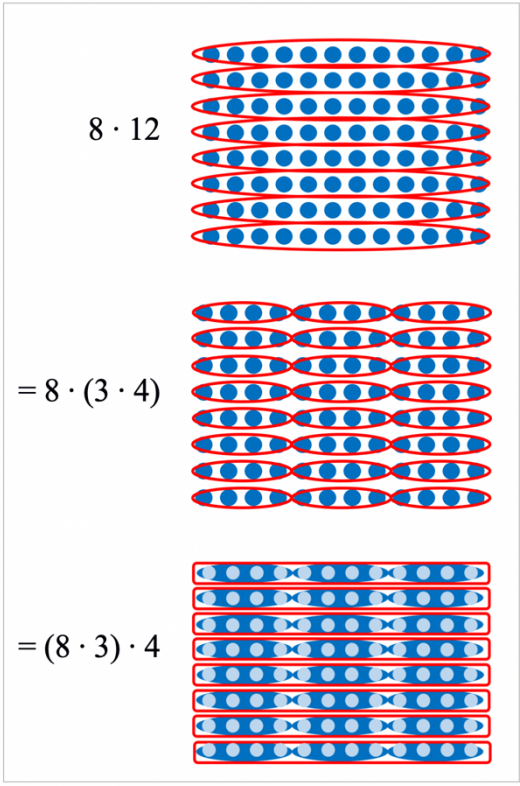

Abb. 2: Umstrukturierung Bild und Term

15	Viktoria	Der hat das hier durchgebrochen.
16	Mira	Immer durch drei geteilt
17	Viktoria	Ja also das sind drei Reihen dann. Also zum Beispiel hat er es ausgeschnitten hier und das ist das zusammen [*deutet auf eine Spalte mit acht Vierern]* und hier hat er es auch geschnitten. Sonst weiß ich es nicht.

Diese vorhandenen inhaltlichen Vorstellungen kann Viktoria im Verlauf der Förderung nutzen. Auf gezielte Nachfragen der Lehrkraft (Was passiert dann im Term? Wie kann man das auch im Term sehen?) erklärt sie die Umformung im Symbolischen.

32	Viktoria	Also Zeynep hat die zwölf geteilt in Malaufgabe dann hat sie sich ähm die acht- die acht hat sie sich das – das hat sie gelassen. Dann hat sie die zwölf durchgebrochen also zur Malaufgabe und hat sie einfach drei mal vier weil drei mal vier ist zwölf dann hat sie es so aufgeschrieben.

Das von Viktoria zuvor zum Beschreiben der Umstrukturierung genutzte Sprachmittel *durchbrechen* wird dabei aufgegriffen und für das Erklären der Termumformung genutzt. Die Analogie der verwendeten Sprachmittel ist ein Indiz dafür, wie die Vorstellung der Termumformung an die materialbasierte

inhaltliche Vorstellung der Umstrukturierung geknüpft ist. Das Beispiel deutet an, wie allgemeine Umformungsregeln aufbauend auf inhaltliche Vorstellungen entwickelt und etabliert werden können, bevor Termumformungen im Algebraunterricht kalkülhaft durchgeführt werden (vgl. Prediger 2009).

Fazit und Ausblick

Zusammenfassend eröffnet sich durch das herausgearbeitete Konzept der Umstrukturierungsgleichheit eine Möglichkeit Termumformungen inhaltlich zu erarbeiten. Das dargestellte Beispiel deutet an, wie der Schritt von der statischen Beschreibungsgleichheit auf ikonischer Ebene zur dynamischen Umformungsgleichheit auf Symbolebene durch den Zwischenschritt der dynamischen aber weiterhin ikonisch gestützten Umstrukturierungsgleichheit möglicherweise überbrückt werden kann.

Im weiteren Verlauf des Projektes muss die Frage beantwortet werden, wie diese Idee in einer Lernumgebung möglichst effektiv realisiert werden kann. Zu untersuchen bleibt außerdem, welche typischen Lernprozesse und Lernpfade Schülerinnen und Schüler bei der Vorstellungsentwicklung von der Umstrukturierungsgleichheit zur Umformungsgleichheit durchlaufen.

Dank. Das Projekt MuM Präalgebra wird im Rahmen des Projekts SiMa in Mathe sicher können durchgeführt und finanziell unterstützt von der Deutschen Telekom Stiftung.

Literatur

Bills, L., Ainley, J. & Wilson, K. (2003). Particular and General in Early Symbolic Manipulation. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Ziliox (Hrsg.), *Proceedings of* PME XXVII (Bd. 2, S. 105–112). Honolulu: PME.

Dohle, A. & Prediger, S. (2020, im Druck). Disentangling discourse practices and language means for developing conceptual understanding. Erscheint in *Proceedings of ETC 7: Language in the Mathematics Classroom.* Montpellier: ERME.

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In K.Stacey, H. Chick & M. Kendal (Hrsg.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra - The 12th ICMI Study* (S. 21–33). Dordrecht: Kluwer.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I.* (S. 213–234). Weinheim: Beltz.

Steinweg, S. (2013). *Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen – Gleichungen – funktionale Beziehungen*. Berlin: Springer Spektrum.