Oberflächenübersetzung oder tiefgehende Darstellungsvernetzung? Digitale Diagnosen zum Multiplikationsverständnis von Kindern

Susanne Prediger, Corinna Hankeln & Lea Voss, Dortmund / Berlin

Quelle: Prediger, Susanne, Hankeln, Corinna & Voß, Lea (2025). Oberflächenübersetzung oder tiefgehende Darstellungsvernetzung? Digitale Diagnosen zum Multiplikationsverständnis von Kindern. In Bernadette Thöne, Anna Körner, Jonathan von Ostrowski, Roland Rink, Johanna Scharlau & Daniel Walter (Hrsg.), „Was hast du dir dazu überlegt?" Denkwege von Kindern und Inhalte gleichermaßen in den Blick nehmen. Festschrift für Dagmar Bönig (S. 55–65). Münster: wtm.

Zusammenfassung: Operationsverständnis von Kindern lässt sich durch Darstellungswechsel-Aufgaben diagnostizieren. Als typische Schwierigkeit untersuchen wir Oberflächenübersetzungen (d.h. wenn Zahlen isoliert übersetzt, aber nicht die multiplikative Struktur vernetzt wird). Der Beitrag berichtet aus digital gestützten Diagnosen zum Multiplikationsverständnis von n = 238 Kindern der Klasse 5/6. Oberflächenübersetzungen tauchen insgesamt bei 92 % der Kinder mindestens einmal auf, und zwar in unterschiedlichen Darstellungen und Antwortformaten. Je häufiger Kinder Oberflächenübersetzungen durchführen, desto geringer ist ihre Gesamtpunktzahl im Test (r = - .67**). Oberflächenübersetzungen sagen auch andere Fehler voraus.

Abstract. Students' understanding of arithmetic operations can be assessed with diagnostic tasks asking for translating multiple representations. As a typical error, we investigate surface translations (i.e., when both numbers are translated separately, yet without connecting the multiplication structure). The paper reports from a digital assessment of n = 238 students in Grade 5/6. Surface translations were conducted by 92% of the students at least once, in different representations and different answer formats. The more often they show surface translations, the lower the total score in the test (r = -0.67**). Surface translations also predict other errors.

1. Einleitung: Multiplikationsverständnis revisited

Bereits vor 30 Jahren dokumentierte Bönig (1995) in einer Interviewstudie das fragile Operationsverständnis vieler Kinder zur Multiplikation und Division und empfahl zur Förderung u.a., immer wieder flexible Darstellungswechsel zu vollziehen. Zwar wird inzwischen z.B. der Wechsel von symbolischer Multiplikation und Punktefeld in vielen Schulbüchern thematisiert, doch zeigen viele Lernende beim Übergang in die Sekundarstufe weiterhin eher Oberflächenwissen als ein tiefgehendes Operationsverständnis (Prediger, 2019), was für das Weiterlernen in der Sekundarstufe deutlich zu wenig Grundlage bietet (Moser Opitz, 2007). In diesem Beitrag dokumentieren wir am Beispiel der relevantesten Schwierigkeit, der Oberflächenübersetzung nur sichtbarer Zahlen, wie weit verbreitet rein oberflächliches Wissen zur Multiplikation und den Darstellungswechseln noch immer ist. Zur Optimierung der Tests wird auch untersucht, welche Diagnose-Items dies am besten erfassen.

2. Forschungsstand zu Multiplikationsverständnis und Übersetzungsschwierigkeiten

2.1 Darstellungswechsel für die Diagnose von Operationsverständnis

Das Operationsverständnis von Lernenden zielt auf die Kenntnis der Bedeutungen der jeweiligen Operation und kann (unter anderem) an ihrer Fähigkeit erfasst werden, zwischen unterschiedlichen Darstellungen, z.B. symbolischen Termen, bildlichen Darstellungen und verbalen Darstellungen, d.h. Versprachlichungen der Term- und Bild-Strukturen (Lesh, 1979; Bönig, 1995, S. 59; Kuhnke, 2013). Abbildung 1 zeigt Beispiele mit zwei Darstellungswechselrichtungen, von bildlicher zu symbolischer Darstellung (Item 4) und umgekehrt (Item 12). Auch Rechengeschichten (als Wechsel vom Symbolischen zum Verbalen) erweisen sich als informativ (De Corte & Verschaffel, 1996; Prediger, 2019): geringere Lösungsquoten als bei den umgekehrten Textaufgaben zeigen, dass Darstellungswechselrichtungen unterschiedlich schwierig sein können. Bönig (1995) erklärt die Inkonsistenz der Entscheidungen von Kindern zum Darstellungswechsel zwischen unterschiedlichen Darstellungen zum einen mit einer darstellungsbezogenen Bereichsspezifität (Darstellungswechselrichtungen als bereichsspezifische Frames, deren Verknüpfungen erst aktiv hergestellt werden müssen), zum anderen mit unterschiedlichen Situationstypen, die im deutschsprachigen Raum als Grundvorstellungen gefasst werden:

Für das Multiplikationsverständnis werden Situationstypen nach unterschiedlichen Systematiken unterschieden (vgl. Bönig, 1995, S. 33, für einen internationalen Forschungsüberblick). Im deutschsprachigen Raum wird nach wie vor häufig zwischen der räumlich-simultanen Grundvorstellung (z.B. in Rechteck- oder Punktefeldern wie in Item 4 in Abbildung 1) und der zeitlich-sukzessiven Grundvorstellung (wie am Zahlenstrahlbild in Item 12) unterschieden (Padberg & Benz, 2021), obwohl beiden Grundvorstellungen die gleiche *Grundbedeutung der Multiplikation als Zählen in Bündeln* zugrundeliegt (Prediger, 2019). Diese wird international viel stärker betont (Clark & Kamii, 1996; Siemon et al., 2019) und bildet daher auch den Fokus unseres Diagnose- und Förderbausteins in Mathe sicher können (Selter et al., 2014).

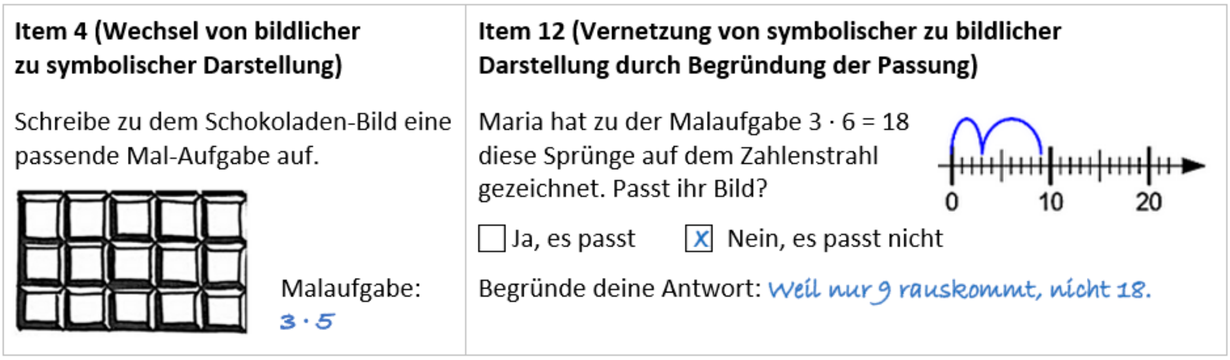

Abbildung 1: Diagnose-Items zu Darstellungswechsel und tiefergehende Darstellungsvernetzung

2.2 Oberflächenübersetzung als häufiger, doch oft undiagnostizierter Fehler

Viele Untersuchungen (Bönig, 1995; Clark & Kamii, 1996; Kuhnke, 2013; Prediger, 2019) dokumentieren für das Multiplikationsverständnis zahlreiche Übersetzungsschwierigkeiten zwischen Darstellungen. Dabei ist eine wiederkehrende Fehlerursache, nur die Zahlen selbst in die andere Darstellung zu übersetzen, aber nicht die multiplikative Struktur (Bönig 1995, S. 65, 129, 147, 166), wie bei dem Zahlenstrahlbild der fiktiven Schülerin Maria in Item 12 (Abbildung 1). Dieses bei Textaufgaben als “direct translation” bezeichnete Phänomen (Hegarty et al., 1995) kann in vielen Darstellungswechselrichtungen auftreten (Kuhnke, 2013; Prediger, 2019), auch bei oberflächlich richtigen Übersetzungen: Item 4 (Abbildung 1) z.B. beantworten viele Lernende in Designexperimenten richtig, die lediglich dazu erklären, “Hier ist die 3 und hier ist die 5” (Prediger, 2019). Ebenso lösen Lernende Textaufgaben trotz fehlender Durchdringung vielfach korrekt, solange die mathematischen Strukturen in erwartungsgemäßer (d.h. sprachlich einfacher und direkter) Weise darin formuliert sind (Hegarty et al., 1995). Daher bezeichnen wir das Vorgehen, nur die Zahlen selbst in die andere Darstellung zu übersetzen, aber nicht die multiplikative Struktur, als *Oberflächenübersetzung* und zeigen in diesem Artikel, dass oberflächlich richtige Wechsel (trotz falscher Begründungen) einen der

Hauptgründe bilden, warum fragiles Multiplikationsverständnis bei vielen Kindern nach wie vor undiagnostiziert bleibt, wenn nicht auch das explizite Erklären der multiplikativen Struktur eingefordert wird.

Das Phänomen steht exemplarisch für andere Studien, in denen ebenfalls der Wechsel von Darstellungen nur oberflächlich vollzogen wird, ohne dass die zugrundeliegende Struktur berücksichtigt wird (Renkl et al., 2013; Post & Prediger, 2022). In Abgrenzung zu oberflächlichen Darstellungswechseln bezeichnen wird als tiefgehende Darstellungsvernetzung daher nur solche Übersetzungsaktivitäten, in denen die zugrundeliegende Struktur berücksichtigt und möglichst explizit versprachlicht werden können (Post & Prediger, 2022). Dass die Verbalisierung relevant ist, zeigt exemplarisch die in blau eingefügte Bearbeitung in Item 12 der Abbildung 1: Sie konstatiert zwar die Nicht-Passung korrekt, doch greift die Begründung nur auf das Ergebnis der Aufgabe zurück, nicht auf die Grundbedeutung des Multiplizierens als Zählen in Bündeln, das eher durch drei 6er-Schritte auf dem Zahlenstrahl visualisiert und verbalisiert werden sollte (Prediger, 2019).

2.3 Optimierung eines Diagnose-Tests als übergreifendes Entwicklungsziel und Forschungsfrage der vorliegenden Studie

Tiefgehendes Operationsverständnis in gelungenen Darstellungsvernetzungen lässt sich damit am besten in Gesprächen mit Kindern diagnostizieren und fördern (Bönig, 1995; Kuhnke, 2013; Prediger, 2019). Da diese im Unterrichtsalltag nicht mit allen Kindern einzeln durchführbar sind, werden im Projekt Mathe sicher können (MSK) diagnostisch aufschlussreiche Aufgaben entwickelt, die Fehlvorstellungen und Oberflächenübersetzungen aufdecken sollen (Selter et al., 2014), um entsprechend anschließende Förderungen passgenau zu gestalten. Ihre Digitalisierung im MSK-Online-Check ermöglicht nun, auch größere Stichproben zu untersuchen (Hankeln et al., eingereicht), wie in der vorliegenden Studie.

Auch wenn die Digitalisierung der Items die Erhebung für Lehrkräfte vereinfacht, ist Testzeit immer noch so gering wie möglich zu halten, um der anschließenden Förderung möglichst viel Raum geben zu können. Zudem stellt sich in Bezug auf den Auswertungsaufwand die Frage, inwiefern offene Items, in denen Lernende Bilder erstellen oder Texte schreiben, durch geschlossene Items mit geeigneten Distraktoren ersetzt werden können, die automatisch auswertbar wären.

Die in qualitativen Studien (Bönig, 1995; Kuhnke, 2013) identifizierten Unterschiede in den Schwierigkeiten bei Darstellungswechseln in verschiedenen Richtungen sind relevant für unser Ziel, die Items auf möglichst wenige einzuengen. Daraus leitet sich die Fragestellung ab, inwiefern die wichtigste Fehlerursache, die Oberflächenübersetzung, über die Darstellungswechselrichtungen und Antwortformate hinweg konsistent auftreten, so dass man mit weniger Items auskommt ohne Informativität einzubüßen. Daher wird ausgehend vom dargestellten Forschungsstand in der Studie folgende Forschungsfrage verfolgt:

Wie häufig und wie konsistent zeigen Lernende in Items zur Multiplikation Oberflächenübersetzungen, bei denen sie nur die sichtbaren Zahlen fokussieren?

Die Frage nach der Häufigkeit soll die Notwendigkeit von Förderung ermitteln, die das Multiplikationsverständnis aufarbeiten und mit prozeduralen Rechenfertigkeiten in Verbindung bringen. Die Frage nach der Konsistenz ist auch für die Optimierung des Diagnosetests interessant, denn wenn sich bestimmte Antwortformate oder Darstellungswechselrichtungen als besonders indikativ für herausstellen, könnte der Test auf diese Items gekürzt werden.

3. Methoden der Datenerhebung und Datenauswertung

3.1 Datenerhebung mit dem Mathe sicher können – Online-Check

Bearbeitet wurde die Forschungsfrage in einer Studie mit dem digitalen Diagnosetool MSK-Online-Check (Hankeln et al., eingereicht). Hier werden die Bearbeitungen zu insgesamt 13 Items zur Diagnose des Multiplikationsverständnisses analysiert (davon sieben abgebildet in den Abb. 1, 4, 6), basierend auf dem MSK-Diagnose- und Förderbaustein N4A (Selter et al., 2014). Acht offene Items fragten Darstellungswechsel ab, drei von bildlichen zu symbolischen Darstellungen, vier von symbolischen zu bildlichen Darstellungen, und eine von symbolischen in verbale Darstellungen beim Schreiben einer Rechengeschichte. Um zu sondieren, inwiefern die offenen Items durch geschlossene Items ersetzt werden können, wurden fünf Items ergänzt, die die Bewertung der Passung zweier Darstellungen zueinander verlangten, drei zwischen symbolischem Term und Rechengeschichten von fiktiven Kindern, zwei zwischen Zahlenstrahlbild und symbolischem Term. Die Antwortformate variierten von Multiple-Choice (zur Auswahl passender Darstellungen) und Nennung eines Terms über Erstellen bildlicher Darstellungen per Drag-and-Drop (Zahlenstrahl und Würfelbilder) zu Texten (Rechengeschichte und Begründung der (Nicht-)Passung).

Das Sample bestand aus n = 238 Lernenden aus Klassenstufe 5/6 aus nicht-gymnasialen Schulformen in Hessen, die von März bis Juli 2023 den Online-Check bearbeiteten. Es handelt sich also um Jahrgänge, die während der pandemiebedingten Schulschließungen ihr Multiplikationsverständnis hätten erwerben und vertiefen sollen. Sie erhielten zunächst eine kurze Einführung in die Eingabe der Antwortformate und arbeiteten im Anschluss eigenständig.

3.2 Methoden der Datenauswertung

Die Bearbeitungen der Lernenden wurden von geschulten Ratern kodiert, dabei wurden unklare Fälle diskutiert, bis ein Konsens erreicht und das Kodiermanual ausgeschärft wurde. Dabei wurden nicht nur richtige Antworten mit jeweils einem Punkt bewertet sondern auch typische Fehlermuster kodiert. Die Analyse in diesem Beitrag fokussiert auf die Oberflächenübersetzungen, bei denen Lernende nur die Zahlen übersetzten, nicht aber die multiplikative Struktur vernetzten. Berichtet werden Häufigkeitsverteilungen und Kontingenztabellen, um die Konsistenz über mehrere Items hinweg zu untersuchen.

4. Empirische Einsichten in Verständnis und Oberflächenwechsel

4.1 Gesamtpunktzahl als Indikator für das Multiplikationsverständnis

Insgesamt zeigt sich, dass die 13 Items für die Lernenden in dieser Stichprobe herausfordernd sind: Von maximal 13 Punkten erreichen sie nur einen Mittelwert von 4,17 (SD = 2,52), mit bemerkenswerter Verteilung. 10–13 Punkte erreichen nur 3 % der Lernenden, 7–9 Punkte 11 %, 3–6 Punkte 58 % und 0–2 Punkte 28 %. Dies zeigt, dass über die Hälfte der Lernenden über geringe (aber nicht keine) Fähigkeiten zum Darstellungswechsel bei der Multiplikation verfügen. Diese geringen Fähigkeiten werden im Weiteren genauer untersucht um aufzuzeigen, dass diese oft auf Oberflächenübersetzungen beruhen.

4.2 Lösungsquoten der Items je nach Übersetzungsrichtung und Antwortformat

Die Lösungsquoten der einzelnen Items schwanken zwischen 81 % und 8 %. Am leichtesten fällt den Lernenden in Item 4 aus Abbildung 1 die Übersetzung einer bildlichen Darstellung (Schokoladentafel) in einen Term, d.h. 81 % der Lernenden haben zumindest Oberflächenwissen zum Wechsel von Rechteckfeldern und Multiplikation erworben. Am schwierigsten ist Item 12 aus Abbildung 1, bei dem nur 8 % die Nicht-Passung des Zahlenstrahlbilds zur Multiplikation richtig begründeten.

Abbildung 2 zeigt die Lösungsquoten differenziert nach Art der Darstellungen und Antwortformat. Es zeigt sich, dass den Lernenden weder ein bestimmtes Antwortformat (erkennbar am Muster der Balken in Abbildung 1) noch eine bestimmte Darstellungswechselrichtung systematisch leichter fällt. Multiple-Choice-Formate (bei denen Lernenden nur die Passung beurteilen), sind nicht häufiger richtig als offene Text- oder Bildformate. Dies liegt vermutlich an den sorgfältig konstruierten Distraktoren, die gezielt typische Fehlvorstellungen ansprechen (siehe unten). Umgekehrt werden Items, die umfassendere Antworten erfordern, nicht weniger erfolgreich bearbeitet. Im Hinblick auf verschiedene Darstellungswechselrichtung (erkennbar an den Farben in Abbildung 1) zeigt sich ebenfalls ein durchmischtes Bild, sodass kein Zusammenhang zwischen zwei bestimmten Darstellungen als besonders herausfordernd abgeleitet werden kann.

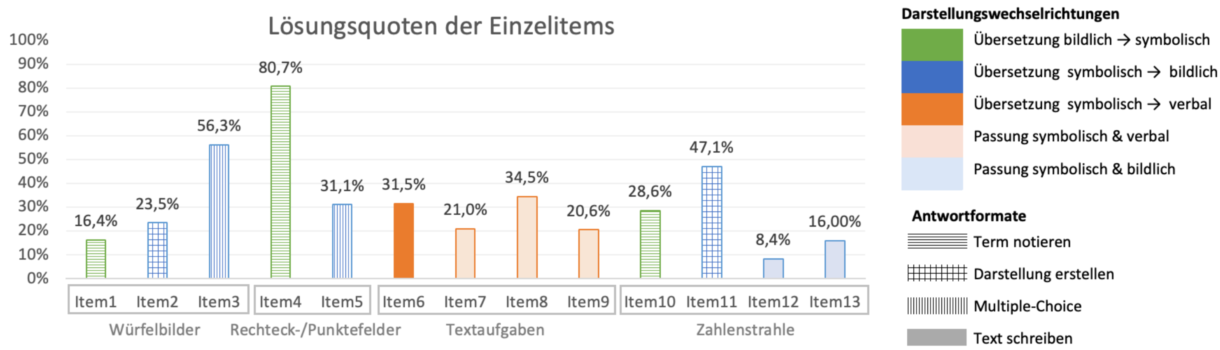

Abbildung 2: Lösungsquoten der 13 Items, differenziert nach Darstellungswechselrichtungen und Antwortformaten

4.3 Oberflächenübersetzung der Zahlen ohne Fokus auf multiplikative Struktur

In allen 13 Items waren Oberflächenübersetzungen theoretisch anwendbar, d.h. nur die Zahlen zu übersetzen, ohne die multiplikative Struktur zu vernetzen. In unserer Stichprobe nehmen 92 % der Lernenden mindestens in einem Item eine Oberflächenübersetzung vor, d.h. nur 8 % in keinem Item. 34 % der Lernenden zeigen diesen Fehler mindestens fünfmal (mind. neunmal: 2 %). Die meisten Lernenden zeigen den Fehler ein bis vier Mal (jeweils zwischen 13 % und 18 %). Dabei ist die Häufigkeit des Vorkommens der Oberflächenübersetzung hoch signifikant und durchaus stark negativ mit der Gesamtpunktzahl korreliert, also auch für weitere Fehler prädiktiv zu sein scheint ($r = -0.67$, $p<.001$). Dies wurde auch gesondert berechnet: Eine starke Ausprägung der Oberflächenübersetzung korreliert in einigen Items hoch signifikant mit dem Auftreten anderer Fehler ($r=.22^{**}$ in Item 10; $r=.20^{**}$ Item 8), d.h. die Oberflächenübersetzung sagt in der Tat auch andere Fehler voraus.

4.4 Verteilung der Oberflächenübersetzung über Darstellungswechselrichtungen und Antwortformate

Um diejenigen Items zu identifizieren, in denen sich die Oberflächenübersetzung als Fehlerursache am häufigsten zeigt, werden in Abbildung 3 die jeweiligen Anteile dieses spezifischen Fehlertyps an allen falschen Bearbeitungen abgedruckt, sie schwanken zwischen 8 % und 94 % an allen Fehlern.

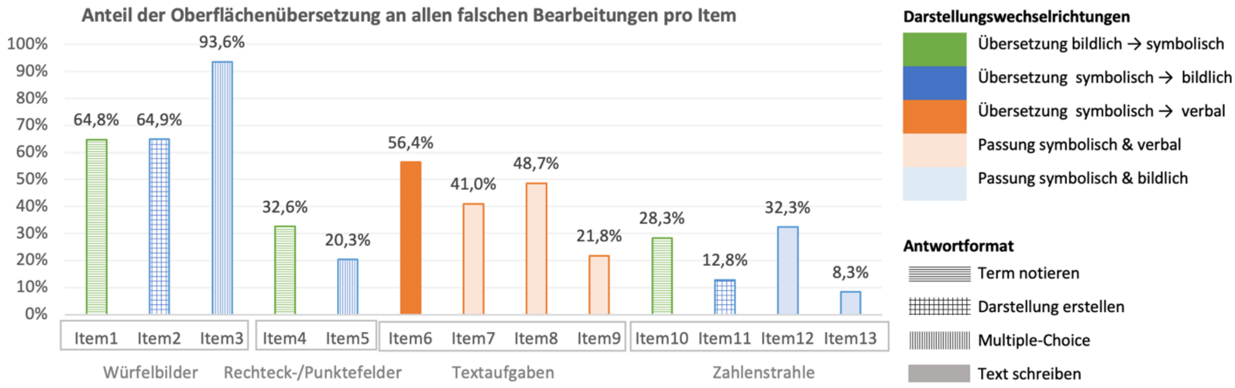

Abbildung 3: Oberflächenübersetzung als Fehlerursache in verschiedenen Antwortformaten und Darstellungswechselrichtungen

Auch bzgl. des Fehlers Oberflächenübersetzung sticht keine Darstellungswechselrichtung und kein Antwortformat beim Auftreten heraus. Das bedeutet, dass zur tiefergehenden Diagnose dieser Fehlvorstellung eine gewisse Bandbreite verschiedener Darstellungen betrachtet werden muss. Dass verschiedene Antwortformate zusätzlich informativ sind, zeigt die folgende Analyse einzelner Items:

In dem Multiple-Choice-Item 3 (abgedruckt in Abbildung 4) bildet die Oberflächenübersetzung die mit Abstand häufigste Fehlerursache. Wenn Kinder zu einer Mal-Aufgabe nicht-passende Würfelbilder auswählen, sind 94 % der falschen Antworten auf Oberflächenübersetzungen mit reinem Fokus auf Zahlen zurückzuführen, nur 8 % wählen dabei auch oder ausschließlich vier Vierer-Würfel. 33 % aller Lernenden wählen nur den gezielt gesetzten Distraktor für die Oberflächenübersetzung aus (ein Vierer-Würfel und ein Dreier-Würfel), weitere 7 % der Lernenden wählten diesen zusätzlich zur korrekten Antwort aus.

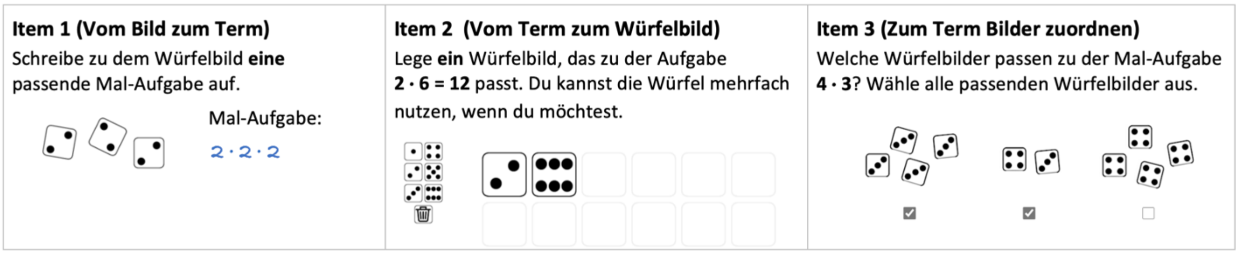

Abbildung 4: Drei Items zu Würfelbildern in unterschiedlichen Formaten und exemplarische Fehler mit Ursache Oberflächenübersetzung

Insgesamt erweist sich die Darstellung mit Würfelbildern als informativ. Als gruppierte Zahldarstellung verdeutlicht sie (wenn sie richtig verstanden werden) besonders stark das Denken in Bündeln, da viele Kinder Erfahrung mit Dreier-Würfeln und dem Zählen in Bündeln haben. Doch zeigt Abbildung 4 Beispielantworten, die jeweils nur Oberflächenübersetzungen ohne Berücksichtigung der multiplikativen Bündelstruktur vornehmen.

In Bezug auf die Konsistenz-Frage haben wir untersucht, wie konsistent Lernende innerhalb dieser drei Items Oberflächenübersetzungen zeigen (dabei durften sie nicht von einem Item zum vorherigen zurückblättern, d.h. in Item 3 möglicherweise erzielte Einsichten konnten nicht in Item 1 und 2 genutzt werden). Die Analyse ergab, dass 22 % der Lernenden in allen drei Items eine Oberflächenübersetzungen vornehmen, 27 % zweimal, 27 % einmal und 25 % keinmal. Es ist also fast eine gleichmäßige Verteilung auf alle vier möglichen Ausprägungen (kein bis drei Mal) zu erkennen. Von denjenigen, die den Fehler nur einmal zeigen, zeigen ihn 46 % im Item 1, 33 % im Item 2 und 21 % im Item 3. Von denjenigen, die die Oberflächenübersetzung zweimal zeigen, zeigen ihn 48 % in Item 1 und 2, sowie 30 % in Item 1 und 3, und 23 % in Item 2 und 3. Also scheinen besonders die ersten beiden Items, bei denen den Lernenden nicht die korrekte Lösung als Option angeboten wird, die Fehlvorstellung sichtbar zu machen.

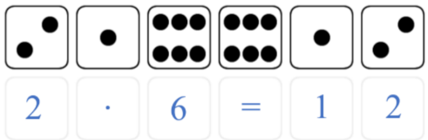

Abbildung 5: Falsche Antwort zu Item 2: Würfel als Symbole

In ergänzenden qualitativen Interviewstudien ließen sich die Interpretationen der Fehlerursachen bestätigen: So legte ein Kind in Item 2 eine auf den ersten Blick unverständliche Würfelfolge (Abbildung 5), um die Aufgabe $2 \cdot 6 = 12$ darzustellen. Auf Nachfrage, wie es zu seiner Lösung kommt, erklärte es sinngemäß: „Na ja, ich hatte keine Rechenzeichen, darum habe ich hier eben 2 und 6 und dann 1 und 2 für die 12 und den einen Punkt hier als Mal und die 6 sieht ja etwas aus wie ein gleich-Zeichen, darum habe ich die 6 als „Gleich" genommen." Hier wird die Interpretation der Würfel als Repräsentanten für einzeln Ziffern und Symbole sehr konsequent umgesetzt.

Hoch informativ ist auch Item 6, in dem eine Rechengeschichte zu schreiben ist: Der in Abbildung 3 aufgeführte Anteil von 57 %, der Oberflächenübersetzungen zeigt, lässt sich für Item 6 weiter ausdifferenzieren. 12 % der Lernenden kopieren z.B. die Struktur der exemplarisch gegebenen Subtraktionsgeschichte. 11 % erstellen eine Rechengeschichte, die nur oberflächlich gesehen eine situative Darstellung ist, weil z.B. geschrieben wird „Lara möchte 6 mal 5 ausrechnen weil ihr Lehrer ihr die Aufgabe gegeben hat. Was kommt raus?" 12 % der Lernenden antworten mit einer nicht-multiplikativen Rechengeschichte, davon sind bei 7 % die Rechengeschichte und die notierte Rechnung nicht stimmig zueinander (etwa, weil unreflektiert einfach die gegebene Rechenaufgabe notiert wurde). Bei 5 % sind Rechengeschichte und notierte Aufgabe nicht multiplikativ, aber passen zueinander. Besonders deutlich wird die Oberflächenstrategie bei einem Kind, das folgende Rechengeschichte notiert: „Tim ist 6 Jahre alt und hat 5 Sammelbilder. Wie viele Sammelbilder braucht Tim noch? $6 \cdot 5 = 30$; Antwort: 30." In dieser Bearbeitung ist klar erkennbar, dass nur Wert daraufgelegt wurde, dass die geforderten Zahlen im Aufgabentext vorkommen, die eigentlich notwendige Ausformulierung der multiplikativen Strukturen fehlt völlig. Dazu stimmig antwortet dieses Kind im Übrigen auch in Item 7 (Abbildung 6), dass die vorgeschlagene Rechengeschichte unpassend ist, gibt jedoch keine Begründung an.

Aus Sicht der Test-Optimierung gilt ein besonderes Interesse auch den geschlossenen Multiple-Choice-Items, in denen Lernenden explizit mit Fehlantworten konfrontiert werden, denen Oberflächenübersetzungen zugrunde liegen, da diese für einen automatisch auswertbaren Test leichter zu handeln sind als die offenen Antwortformate (Abbildung 6).

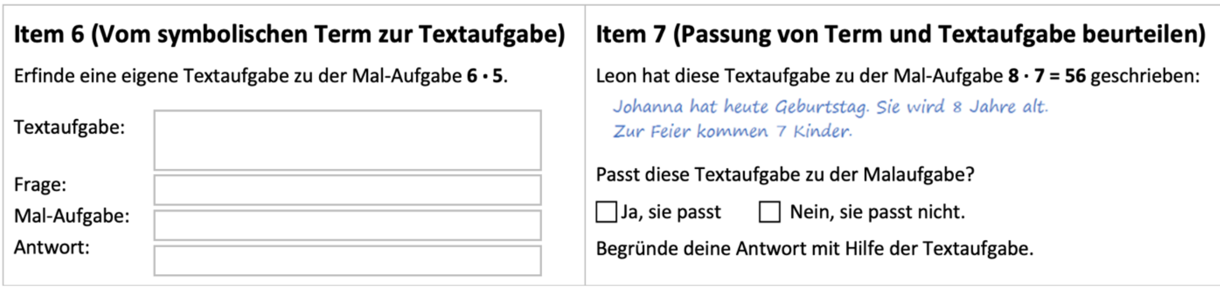

Abbildung 6: Items zur Übersetzung / Passung zwischen symbolischer und verbaler Darstellung

In Item 7 kreuzen zwar 73 % der Lernenden korrekt die Nicht-Passung an, doch wird die nur von 21 % der Lernenden auch korrekt begründet. In Item 12 (aus Abbildung 1) kreuzen 60 % korrekt die Nicht-Passung an, richtig begründen können sie hingegen nur 8 %. Bei den falschen Antworten in Item 7 ist bei 41 % eine Oberflächenstrategie erkennbar, in Item 12 sind es 32 %. Betrachtet man den Zusammenhang der beiden Items, so ist erkennbar, dass 13 % der Lernenden Oberflächenübersetzungen in beiden Items zeigen, 34 % jedoch nur in einem von beiden Items. Auch hier ist also keine Konsistenz der Fehlvorstellung zu beobachten, stattdessen werden bereichsspezifische Frames aktiviert, die in diesem Fall vermutlich auf den Wechsel der Grundvorstellung zurückzuführen sind. Dies zeigt sich auch in den Nuancen der Antworten: In Item 12 nehmen 20 Kinder in ihren Begründungen darauf Bezug, dass das Ergebnis 18 nicht in der Darstellung erkennbar ist bzw. 19 Kinder in Item 7, dass die 56 nicht in der Aufgabe enthalten ist. Jedoch begründen nur 4 dieser Kinder auch ähnlich in dem zweiten Item.

5. Diskussion

Auch 30 Jahre nach Dagmar Bönigs (1995) Dissertation ist das Multiplikationsverständnis vieler (nicht-gymnasialer) Kinder weiterhin fragil. Zwar zeigen 80 % ein Oberflächenwissen zum Darstellungswechsel vom Rechteckfeld zur symbolischen Mal-Aufgabe (Item 4 in Abbildung 2), doch nehmen 92 % mindestens einmal eine reine Oberflächenübersetzung vor, in der nur die Zahlen fokussiert werden, nicht jedoch die multiplikative Struktur. In dieser Diskrepanz zeigt sich, wie leicht (z.B. bei ausschließlicher Nutzung eines Standard-Items wie das Item 4) das fragile Multiplikationsverständnis undiagnostiziert bleiben kann, obwohl bei der Nutzung von anderen Items die reine Oberflächenübersetzung bei so vielen Lernenden die Notwendigkeit der Vertiefung des Verständnisses anzeigt.

In vielen Aufgaben zeigt sich die bereits von Bönig (1995) aufgezeigte Dominanz der symbolischen Darstellungsform, wenn die symbolischen Rechenzeichen sogar in bildliche Elemente hineingesehen werden (Abbildung 5). Gleichwohl bleiben durch die Inkonsistenzen im Antwortverhalten der Kinder Items mit mehreren Darstellungswechselrichtungen notwendig, um die Oberflächendarstellungswechsel bei allen Lernenden aufzudecken. Insbesondere löst sich die Hoffnung nicht ein, allein durch Multiple-Choice-items mit guten Distraktoren bereits die Oberflächenwechsel zu entlarven, denn viele Kinder schätzen die falschen Distraktoren als unpassend ein und formulieren dennoch eine Begründung, die nicht auf die multiplikativen Bündelstrukturen zurückgreift. Aus diesem Grund wird der Diagnosetest auch in Zukunft mehrere Items und offene Antwortformate enthalten müssen, weil diese informativer sind. Daher lohnt es sich, in Zukunft automatische Auswertungsoptionen auch für offene Antwortformate auszuloten.

Dank: Als ich (Susi Prediger) in 2006 an die Universität Bremen kam, war Dagmar Bönig die wichtigste Ansprechpartnerin, die mich in viele Gepflogenheiten der Lehre und Uni-Organisation eingeführt hat. Für die vielen tollen Mensa-Gespräche bin ich immer noch dankbar!

Förderung und Kooperation: Die Daten wurden erhoben mit dem Mathe sicher können – Online-Check im Rahmen des Projekts SchuMaS (gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung mit Kz. SchumaS-SMS2101L-01PR2101C an S. Prediger). Wir danken Ulf Kroehne und Sebastian Groß für die Zusammenarbeit.

Literatur

Bönig, D. (1995). Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschülern. Waxmann.

Clark, F. B. & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in Grades 1-5. Journal for Research in Mathematics Education, 27(1), 41–51.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. Learning and Instruction, 6(3), 219–242.

Hankeln, C., Kroehne, U., Voss, L., Gross, S. & Prediger, S. (eingereicht). Developing digital formative assessment for deep conceptual learning goals: Which topic-specific research gaps need to be closed? Eingereichtes Manuskript.

Hegarty, M., Mayer, R. E. & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. Journal of Educational Psychology, 87(1), 18–32.

Kuhnke, K. (2013). Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel: Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr. Springer.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities. In R. Lesh, D. Mierkiewicz & M. Kantowski (Hrsg.), Applied Mathematical Problem Solving (S. 111–180). Ericismeac.

Moser Opitz, E. (2007). Rechenschwäche/Dyskalkulie: Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Haupt.

Padberg, F., & Benz, C. (2021). Didaktik der Arithmetik (5. Auflage). Springer Spektrum.

Post, M. & Prediger, S. (2022, online first). Teaching practices for unfolding information and connecting multiple representations. Mathematics Education Research Journal. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00431-z

Prediger, S. (2019). Mathematische und sprachliche Lernschwierigkeiten: Empirische Befunde und Förderansätze am Beispiel des Multiplikationskonzepts. Lernen und Lernstörungen, 8(4), 247–260.

Renkl, A., Berthold, K., Große, C. S. & Schwonke, R. (2013). Making better use of multiple representations: How fostering metacognition can help. In R. Azevedo & V. Aleven (Hrsg.), International Handbook of Metacognition and Learning Technologies (S. 397–408). Springer.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). Mathe sicher können – Natürliche Zahlen. Diagnose- und Förderbausteine zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Cornelsen. Frei verfügbar unter http://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/nz#n4.

Siemon, D., Banks, N., & Prasad, S. (2019). Multiplicative thinking: A necessary stem foundation. In D. Siemon, T. Barkatsas & R. Seah (Hrsg.), Researching and Using Progressions (Trajectories) in Mathematics Education (S. 74–100). Brill.