

In der Tiefe vernetzen statt oberflächlich übersetzen: Wie gelingen verstehensförderliche Darstellungswechsel?

Susanne Prediger

Zusammenfassung. Darstellungsverknüpfungen können beitragen zum Aufbau von Verständnis. Dazu müssen graphische, symbolische, verbale und tabellarische Darstellungen tiefgehend vernetzt werden, indem Lernende die fachlichen Strukturen in den Darstellungen erkennen und aktiv erklären sollen, wie diese zusammenpassen. Dieser Beitrag gibt Beispiele aus mehreren mathematischen Themengebieten für diese durchgängige Gelingensbedingung und beschreibt empirische Befunde über typische Schwierigkeiten bei reinen Oberflächenübersetzungen.

Quelle: Autorinnenfassung des ML-Artikels: Prediger, Susanne (2025): In der Tiefe vernetzen statt oberflächlich übersetzen: Wie gelingen verstehensförderliche Darstellungswechsel? *Mathematik Lehren, Heft 250*, 42–45.

Wozu ist das Verknüpfen von Darstellungen wichtig?

Nach dem klassischen Prinzip des Darstellungswechsels können Lernende durch das Übersetzen zwischen haptischen, graphischen, symbolischen, verbalen und tabellarischen Darstellungen Verständnis für abstrakte Konzepte, Operationen und Formeln aufbauen (Bruner 1966, Lesh 1979). Doch gelingt dies nicht automatisch, sondern nur, wenn eine wichtige Gelingensbedingung erfüllt ist: Darstellungen müssen tiefgehend vernetzt werden (und dürfen nicht nur oberflächlich nebeneinandergestellt werden). Das bedeutet, Lernende (und nicht nur Lehrkräfte) erklären die Passung der Darstellungen, indem sie die für die Konzepte und Operationen relevanten fachlichen Strukturen in den jeweiligen Darstellungen beschreiben.

Immer wieder werden Lernende im Mathematikunterricht aufgefordert, verschiedene Darstellungen zu nutzen. Hierbei wechseln sie zwischen haptischen, graphischen, symbolischen, verbalen und ggf. tabellarischen oder kontextuellen Darstellungen, um Begriffe und Konzepte zu erarbeiten.

In den unteren Jahrgängen dienen Darstellungswechsel oft dem Verständnisaufbau, indem abstrakte Konzepte und Operationen veranschaulicht werden (Bruner 1966; Lesh 1979). Zum Beispiel sollen sich Lernende unter der Multiplikation $3 \cdot 4$ ein Punkterfeld mit drei 4er-Reihen vorstellen können (Oehl 1962; 2019) oder unter dem Bruch $\frac{3}{4}$ einen Bruchstreifen mit 3 von 4 markierten Feldern (Padberg & Wartha 2017), um Operationsverständnis zur Multiplikation bzw. Zahlverständnis zu Brüchen aufzubauen. Der Aufbau mentaler Vorstellungsbilder kann auch durch haptische Erfahrungen an Arbeitsmitteln unterstützt werden (Dienes 1969).

In den oberen Jahrgängen werden die Darstellungswechsel selbst zur wichtigen mathematischen Tätigkeit, denn die gesamte Analytische Geometrie basiert auf der fundamentalen Idee, geometrische Zusammenhänge algebraisch beschreibbar und damit berechenbar zu machen (Tietze et al. 2000). Zum Beispiel kann der Schnitt zweier Geraden durch algebraisches Auflösen der gleichgesetzten Geradengleichungen bestimmt oder die Drehung eines Objekts durch Matrizenmultiplikation gefasst werden. Diese Darstellungswechsel sind grundlegend für 3D-Repräsentationen in Computerspielen oder Küchenplanern.

Lernen, relevante Strukturen in Darstellungen hineinzusehen

Zahlreiche empirische Studien zeigen allerdings, dass graphische Darstellungen für Lernende nicht immer selbsterklärend sind (Lesh 1979). Damit sie zum Lern- und Denkmedium werden können, müssen Lernende

die Chance erhalten, die themenrelevanten Strukturen in die gewählten Darstellungen hineinsehen zu lernen, sonst bleibt der Umgang mit ihnen bedeutungslos, wie folgendes Beispiel verdeutlicht.

Das Beispiel in Abbildung 1 stammt von drei Lernenden, die aufgefordert wurden, zwei gleichwertige Brüche miteinander zu vergleichen und ihre Ergebnisse zu begründen. Es konnte beobachtet werden, dass alle drei zu den beiden Brüchen korrekte Bruchstreifen zeichnen konnten, jedoch erfassten sie in diesen neuen Darstellungen die relevanten Strukturen nur teilweise (Prediger 2013).

Paula zeichnet zwar oberflächlich korrekt, doch hält sie $\frac{9}{12}$ fälschlich für größer als $\frac{3}{4}$. Sie begründet ihre Lösung über die Anzahl der Felder im blauen Streifen. Hierbei sieht sie im Bruchstreifen nur die Anzahl der Felder, nicht jedoch die Teil-Ganzes-Strukturen, die Brüche eigentlich beschreiben.

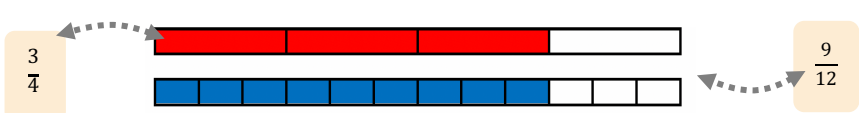
Simon sieht bereits Teil-Ganzes-Strukturen in den Bruchstreifen hinein, verbalisiert diese Struktur jedoch noch nicht explizit. Er verbindet Teil und Ganzes lediglich mit „und“ in „4 Felder und 3 rote“. Die Gleichwertigkeit beider Brüche macht er an der gleichen Länge der farbigen Streifen fest. Dies ist korrekt, doch folgen daraus noch keine begründbare Rechenregeln für das Erweitern der Brüche. Es fehlt das Hineinsehen der Verfeinerungsstruktur in die Situation.

Zeynep kann bereits die Teil-Ganzes-Strukturen in die graphische Darstellung der Bruchstreifen hineinsehen und verbalisiert sie durch „Teil 3 vom Ganzen 4“. Für die Gleichwertigkeit beider Brüche erkennt sie zudem die Verfeinerungsstruktur: „jedes Feld wurde in drei verfeinert“. Damit bleibt das Verhältnis zwischen Teil und Ganzem gleich. Diese Begründung der Gleichwertigkeit gelingt auch ohne Bild und ist ausbaufähig zu einer Begründung der Erweiterungsregel.

Nicht allen Lernenden gelingt es also ohne Weiteres, die mathematisch relevanten Strukturen in einer graphischen (oder symbolischen oder tabellarischen) Darstellung zu sehen, denn diese muss nicht nur *herausgelesen* werden, sondern ist aktiv *hineinzusehen*. *Hineinsehen von Strukturen* ist also ein aktiver mentaler Akt, der spezifische mathematische Denkmuster (wie hier die Teil-Ganzes-Struktur) an eine Darstellung koppelt und diese dadurch strukturiert (beschrieben bei Lesh 1979, als „imposing structures“). Darstellungsvernetzung ist für den Aufbau von Verständnis besonders bedeutsam, denn dabei werden die mathematisch relevanten Strukturen in den verschiedenen Darstellungen expliziert und zueinander in Bezug gesetzt.

Ob Lernende wirklich die relevanten Strukturen in eine Darstellung hineinsehen, lässt sich am besten feststellen, wenn sie diese versprachlichen. Bei Simons Formulierung „4 Felder und 3 rote“ gibt es zumindest weiteren Explikationsbedarf, weil „und“ noch kein geeigneter Konnektor für die Teil-Ganzes-Struktur ist. Hingegen wäre „4, davon 3“ oder „3 von 4“ bedeutungstragend.

Beispiel Brüche: Darstellungen wechseln und relevante Strukturen hineinsehen



Paula: $\frac{9}{12}$ ist größer als $\frac{3}{4}$, weil es mehr Teile hat.

Simon: $\frac{3}{4}$ und $\frac{9}{12}$ sind gleichwertig, denn der eine Streifen hat 4 Felder und 3 rote, der andere hat 8 Felder und 6 blaue, und man sieht, beide Streifen sind gleich lang.

Zeynep: $\frac{3}{4}$ und $\frac{9}{12}$ sind gleichwertig, denn sie beschreiben denselben Anteil: Wird der Teil 3 vom Ganzen 4 wird feiner eingeteilt, ist er immer noch gleich groß wie bei 9 von 12. Denn jedes Feld wurde in drei verfeinert, also bleibt die Teil-Ganzes-Beziehung (d.h. der Anteil) gleich.

Abb. 1: Brüche vergleichen erfordert tiefgehende Darstellungsvernetzung

Wiederkehrendes Problem der Oberflächenübersetzungen

Auch wenn Lernende Darstellungen erfolgreich wechseln, sollte daher geprüft werden, ob sie die Passung zwischen diesen Darstellungen auch mithilfe der relevanten Strukturen erklären können.

- Als *Oberflächenübersetzungen* bezeichnen wir Darstellungswechsel, bei denen zwei Darstellungen nebeneinander gestellt werden mit ausschließlichen Fokus auf die Zahlen und Buchstaben, nicht jedoch auf den zugrundeliegenden Strukturen (Hankeln & Prediger 2025).
- Als *tiefgehende Darstellungsvernetzung* bezeichnen wir dagegen Darstellungswechsel, bei denen explizit versprochen wird, wie die zugrundeliegenden Strukturen in den Darstellungen sichtbar werden (Hankeln & Prediger 2025; Lesh 1979).

Der Extremfall der Oberflächenübersetzung zwischen Textaufgaben und symbolischen Termen ist als „direct translation“ oft dokumentiert worden (Hegarty et al. 1995): Viele Lernende picken aus Textaufgaben lediglich die Zahlen heraus und verknüpfen sie oberflächlich mit derjenigen Operation, die in der Unterrichtsstunde thematisiert wird, ohne darüber nachzudenken, inwiefern die Struktur der Situation zu der Operation passt. Wenn die Textaufgaben stets Standardformate haben, ist man mit Oberflächenübersetzungen sogar erfolgreich (Verschaffel et al. 2000). Doch haben Lernende, die häufig Oberflächenübersetzung vornehmen, insgesamt schwächere Textaufgabenlöse-Häufigkeiten (Hegarty et al. 1995).

Beispielthema und zugrundeliegende Struktur	Oberflächenübersetzungen mit reinem Fokus auf Zahlen und Buchstaben	Tiefgehende Darstellungsvernetzung: Verbalisieren der Struktur der Operationen
Multiplikationsverständnis Bündelungsstruktur (Oehl 1962; Prediger 2019; Hankeln & Prediger 2025)	$3 \cdot 4$ passt zum Punktefeld, denn hier sind 4 und hier sind 3 	$3 \cdot 4$ passt zum Punktefeld, denn ich sehe drei 4er-Reihen
Gleichwertigkeit von Brüchen Teil-Ganzes-Struktur Verfeinerungsstruktur (Padberg & Wartha 2017)	$\frac{3}{4}$ und $\frac{9}{12}$ sind gleichwertig, denn der eine Streifen hat 4 Felder und 3 rote, der andere hat 12 Felder und 9 blaue, und man sieht, beide Streifen sind gleich lang. 	$\frac{3}{4}$ und $\frac{9}{12}$ sind gleichwertig, denn sie beschreiben denselben Anteil: Wird der Teil 3 vom Ganzen 4 feiner eingeteilt, ist er immer noch gleich groß wie bei 9 von 12. Denn jedes Feld wurde in drei verfeinert, also bleibt die Teil-Ganzes-Beziehung [d.h. der Anteil] gleich.
Steigungsformel Verhältnis von Abständen (Usiskin 2008)	Die Steigung zu einer Geraden findet man mit zwei Punkten (x_1/y_1) und (x_2/y_2) . x_2 und x_1 sind die x-Werte und y_2 und y_1 sind die y-Werte der Punkte. 	Will man die Steigung zur Gerade finden, nimmt man 2 Punkte (x_1/y_1) und (x_2/y_2) . Dabei werden die Abstände $y_2 - y_1$ und $x_2 - x_1$ ins Verhältnis (Bruch) gesetzt. Ist z.B. der y-Abstand 1,5-fach so groß, wird der x-Wert in der Funktionsgleichung dann ver-1,5-facht.
Parametergleichung von Geraden Skalieren und Zusammenfügen von Vektoren Variable als Veränderliche (Wittmann 1999)	Die Geradengleichung beschreibt die Gerade, denn $\vec{p}$ ist der Ortsvektor und $\vec{u}$ ist der Richtungsvektor. 	Die Geradengleichung beschreibt die Gerade, denn Addieren von Vektoren heißt, sie hintereinander zu legen. Multiplizieren mit den jeweiligen Faktoren s streckt oder staucht den Richtungsvektor $\vec{u}$ zu vielen Vektoren $s \cdot \vec{u}$. Zur Gerade gehören alle Punkte, die zu erreichen sind, wenn man an den Ortsvektor $\vec{p}$ die gestreckten oder gestauchten Vektoren $s \cdot \vec{u}$ dranhängt (für jedes s ergibt sich ein anderer Punkt).

Abb. 2: Vier Beispiele zu Oberflächenübersetzungen und tiefgehenden Darstellungsvernetzungen

Oberflächenübersetzungen mit dem isolierten Fokus auf Zahlen und Buchstaben sind auch für Wechsel zwischen symbolischen und graphischen Darstellungen in verschiedenen Themengebieten bereits dokumentiert:

Zum Beispiel vollziehen Oberstufenlernende oft nur Oberflächenübersetzungen zwischen der *Parametergleichung* und Geraden, indem sie zur Begründung der Passung lediglich Orts- und Richtungsvektor adressieren (Wittmann 1999). Diese Lernenden sind allerdings nicht in der Lage, mit der Gleichung verständig umzugehen, z.B. die Zugehörigkeit von Punkten zur Geraden durch Einsetzen zu prüfen. Eine tiefgehende Vernetzung würde hingegen erfordern, auch darauf einzugehen, was der Skalar und die Operationen zwischen den Vektoren bedeuten (Vorschlag für eine explizite Erklärung in Abb. 2). Die relevanten Strukturen sind in diesem Beispiel das Skalieren und Zusammenfügen von Vektoren sowie die Variable als Veränderliche, und wer diese versprachlichen kann, wird auch seltener Fehler mit der Geradengleichung machen (z.B. den Parameter für den Ortsvektor zu schreiben statt vor den Richtungsvektor).

Oberflächenübersetzungen durch alleinige Fokussierung auf die Deutung der Zahlen und Buchstaben ist typisch für den Umgang vieler Lernender mit Formeln (Schou & Bikner-Ahsbahr 2022). Tiefgehende Darstellungsnetzungen ermöglichen dagegen einen verständigeren Umgang mit Formeln: Zum Beispiel kann die *Steigungsformel* für lineare Funktionen begriffen werden als Quotient zweier Differenzen, bei der die Differenzen als Abstände und der Quotient als Verhältnis erklärt werden können (vgl. Erklärung in Abb. 2). Wer dazu fähig ist, braucht keine Formel mehr auswendig lernen und versteht, warum die Steigung linearer Funktionen invariant gegenüber der Größe des Steigungsdreiecks ist.

Bei Darstellungswechseln zum *Multiplikationsverständnis* zeigte sich in einem schriftlichen Test, dass 92 % der 238 teilnehmenden Kinder aus Klasse 5/6 in mindestens einer von 13 Darstellungswechseln eine Oberflächenübersetzung vornahmen. Je häufiger Kinder Oberflächenübersetzungen durchführten, desto geringer war ihre Gesamtpunktzahl im Test ($r = -.67^{**}$). Die Fähigkeit, die multiplikativen Bündelstrukturen zu versprachlichen („ $3 \cdot 4$, das sind drei 4er-Reihen“, vgl. Abb. 2), war dagegen prädiktiv für eine hohe Testleistung insgesamt (Hankeln & Prediger 2025).

Anforderungen an Darstellungsvernetzung frühzeitig und immer wieder thematisieren

Insgesamt illustrieren die vorgestellten Beispiele, dass Oberflächenübersetzungen

- häufig und in vielen Themengebieten vorkommen und bei ungünstig gestellten Diagnoseaufgaben sogar unentdeckt bleiben (z.B., wenn Darstellungswechsel nicht erklärt werden müssen);
- den verständigen Umgang mit Darstellungen und damit den Grundvorstellungsaufbau behindern können;
- aufgedeckt und überwunden werden können, wenn Lernende explizit erklären, wie die mathematisch relevanten Strukturen in den verschiedenen Darstellungen sichtbar und zueinander in Bezug stehen.

Das Thema Operationsverständnis zur Multiplikation ist in der Regel das erste Thema der Sekundarstufe 1, an dem Oberflächenübersetzungen zutage treten. Dann lohnt es sich unbedingt, mit den Lernenden auch auf der Meta-Ebene darüber zu sprechen, warum es nicht ausreicht, nur Zahlen (oder Buchstaben) in einer neuen Darstellung wiederzufinden, sondern auch darüber zu sprechen, was zu leisten ist, um tatsächlich die Vernetzung von (Passung zwischen) Darstellungen zu erklären, z.B. so: „Wir wollen nicht nur die Zahlen in der anderen Darstellung wiederfinden, sondern auch die Operationen selbst. Wie sehe ich denn die Multiplikation / den Bruch / die Gleichwertigkeit von Brüchen / die Differenz / den Quotienten / die skalare Multiplikation) hier in dem Bild genau?“.

Auf dieser Basis können sich Lernende im Laufe der Schulzeit immer wieder ähnliches als durchgängiges Verständnis erarbeiten:

- Wo immer es um Multiplikation geht, wird irgendwas in Gruppen gezählt, wir müssen nur die Gruppen wiederfinden. Dazu sollt ihr mir immer zeigen, wo die Gruppen sind (in Punktefeldern z.B. in den drei 4er- Reihen).
- Wo immer es um Brüche geht, werden Teile und Ganze in Beziehung gesetzt, diese Beziehung nennen wir Anteil. Daher sollt ihr immer dazu sagen, was genau der Teil und was das Ganze ist und die Beziehung des Teils zum Ganzen beschreiben.
- Wo immer es um gleichwertige Brüche geht, werden die gleichen Anteile unterschiedlich beschrieben. Wir müssen nur herausfinden, wie Teile und Ganzes feiner oder gröber eingeteilt werden, und was das für die Anteile bedeutet.
- Wo immer wir eine Parametergleichung erklären, sagen wir auch dazu, was die Addition bedeutet und dass der Parameter für eine veränderliche Skalierung steht, der den Vektor streckt und staucht.
- Wo immer wir eine Formel erklären, wollen wir nicht nur die Zahlen und Buchstaben erklären, sondern auch die Rechenzeichen dazwischen. Dazu sagt genau dazu, was die Rechenzeichen eigentlich beschreiben.

Nur wenn die generelle Anforderung an eine Darstellungsvernetzung begriffen ist, können Lernende sich auf die Suche machen nach einer Deutung der Operationen. Damit können sie die Verstehensangebote, die Lehrkräfte und Schulbücher ihnen durch zusätzliche Darstellungen machen, tatsächlich verstehensförderlich nutzen.

Vernetzen lernen: Bedeutungsbezogene Satzbausteine unterstützen Beschreiben relevanter Strukturen

Damit die Versprachlichung der Strukturen beim Darstellungsvernetzen gelingt, hat es sich bewährt, den Lernenden dafür entsprechende Satzbausteine anzubieten (Prediger 2020), die es ermöglichen, über die Strukturen präzise und explizit, aber noch nicht formal, zu sprechen, z.B.

- „Drei 4er-Gruppen“ oder „drei 4er-Reihen“ zum Verbalisieren der multiplikativen Bündelungsstrukturen ist wichtiger als „1. Faktor“, „2. Faktor“.
- „3 von 4“, „Teil vom Ganzen“, „feiner eingeteilt“ zum Verbalisieren der Teil-Ganzes- und Verfeinerungsstrukturen ist wichtiger als „Zähler“, „Nenner“, erweitern.
- usw.

Diese Satzbausteine können anknüpfend an die ersten Erklärversuche der Lernenden eingeführt und dann immer wieder eingefordert und eingeübt werden, auch das hilft, das Hineinsehen von Strukturen zu lernen.

Insgesamt haben wir an vielen Beispielen gute Erfahrungen damit gemacht, am Anfang eines neuen Themas Zeit in die Darstellungsvernetzung und den Aufbau einer bedeutungsbezogener Sprachmittel zum Beschreiben der Strukturen zu investieren. Diese Investition rentiert sich später, wenn Lernende mit den gelernten Konzepten, Operationen und Formeln verständig umgehen und diese nachhaltig behalten können.

Dank. Der Artikel ist entstanden im Projekt QuaMath, das durch die Kultusministerkonferenz finanziert wird. Ich denke allen Netzwerkangehörigen, Redakteurinnen und Multiplizierenden, die mit mir die Beispiele diskutiert haben, um die Gedanken klar zu formulieren, insbesondere Claudia Ademmer und Anne Tester.

Literatur

- Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- Dienes, Z. P. (1969). *Building up mathematics*. Hutchinson Educational.
- Hankeln, C. & Prediger, S. (2025, online first). Language is essential for avoiding surface translations: Associations of students' spontaneous use of meaning-related phrases for explicating structures with conceptual understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-025-10414-z>
- Hegarty, M., Mayer, R. E. & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: a comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87(1), 18–32. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18>
- Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M. Kantowski (Eds.), *Applied mathematical problem solving* (pp. 111–180). Ericismeac.
- Oehl, W. (1962): Der Rechenunterricht in der Grundschule. Schroedel, Hannover.
- Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer Spektrum.
- Prediger, S. (2019). Mathematische und sprachliche Lernschwierigkeiten: Empirische Befunde und Förderansätze am Beispiel des Multiplikationskonzepts. *Lernen und Lernstörungen*, 8(4), 247-260. <https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000268>
- Prediger, S. (2020). *Sprachbildender Mathematikunterricht in der Sekundarstufe - ein forschungsbasiertes Praxisbuch*. Cornelsen.
- Schou, M. H. & Bikner-Ahsbals, A. (2022). Unpacking hidden views: seven ways to treat your formula. *Educational Studies in Mathematics*, 109(3), 639–659. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10092-7>
- Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II – Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Springer.
- Usiskin, Z. (2008). The arithmetic curriculum and the real world. In D. D. Bock, B. D. Søndergaard, B. A. Gómez, & C. C. L. Cheng (Hrsg.), *Proceedings of ICME-11 – Topic Study Group 10, Research and Development of Number Systems and Arithmetic* (S. 9–16). ICMI.
- Wittmann, G. (1999). Schülerkonzepte zur geometrischen Deutung der Parametergleichung: Eine Fallstudie zur analytischen Geometrie. *Mathematica Didactica*, 22(1), 23–36.