SUSANNE PREDIGER, BIRTE PÖHLER-FRIEDRICH

Sicher und verständig rechnen jenseits des Ziffernzauberns

Zum aktuellen Kampf um die schriftliche Division

Ein heftiger Kampf tobt derzeit durch Zeitungen und andere Medien: *Führt die Streichung der schriftlichen Division aus Grundschul-Lehrplänen zum Absenken des Niveaus?* Eltern sind besorgt.

In der Fachdidaktik wurde bereits vor 30 Jahren ausargumentiert, warum die intensive Arbeit am halbschriftlichen Zahlenrechnen wichtiger ist als das schriftliche Ziffernrechnen: Sie kann das Niveau heben statt senken (Krauthausen, 1993). Die Bildungsstandards (KMK 2004) sind diesen Argumenten gefolgt und haben die schriftliche Division aus den Regelstandards für die Grundschule herausgenommen. Die ländergemeinsame Festlegung wird nun in den Ländern umgesetzt.

Die Beunruhigung der Öffentlichkeit beruht auf Missverständnissen, die wir hier ausräumen wollen. Und sie beruht auf Unkenntnis über die didaktischen Potentiale verständiger Rechenstrategien, die auch der Unterricht im Jahrgang 5 – 8 gezielter ausloten sollte. *Um was geht der Kampf?*

Schriftliche Verfahren, verständige Strategien

Schriftliche Rechenverfahren sind Algorithmen, die dafür optimiert sind, dass sie schnell und schematisch ablaufen können. Es muss also nicht darüber nachgedacht werden, warum die Schritte funktionieren und was die Ziffern überhaupt bedeuten: Ist die 2 in der 2480 aus der Beispielrechnung in Kasten 1 eine 20, eine 200 oder eine 2000? Die schematische Durchführbarkeit des Verfahrens war bis in die 1970er-Jahre hochrelevant, bevor Taschenrechner leicht verfügbar waren.

Kopfrechenstrategien dagegen arbeiten mit Zahlen. In der Beispielrechnung in **Kasten 1** fragt man zum Beispiel, wie oft die 40 in die 2480 passt. Dazu macht man erst zwei 40er-Sprünge

1 | Wissenswert: Streitobjekt: Wie sollen Kinder rechnen?

Schriftliches Ziffernrechnen
ohne Transparenz der Grundlagen

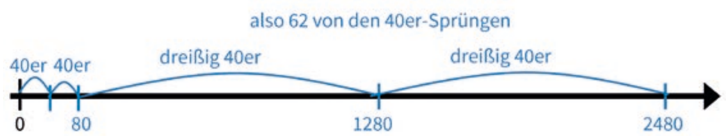
```
  2 4 8 0 : 4 0 = 6 2
–   0
  2 4 8
– 2 4 0
      8 0
    – 8 0
        0
```

Verständiges Zahlenrechnen
angeknüpft an Grundlagen

	$2480 : 40 = 2480 : 40$
Stellenwerte:	$= (2400 + 80) : 40$
In Zehnern denken:	$= (240\,Z + 8\,Z) : 4\,Z$
Distributivgesetz	$= 240 : 4 + 8 : 4$
	$= 60 + 2 = 62$

$2480 : 40 = 2 + 10 + 50 = 62$	
$80 : 40 = 2$	
$400 : 40 = 10$	Da 40 Z : 4Z = 10
$2000 : 40 = 50$	Da 200 Z : 4Z = 50

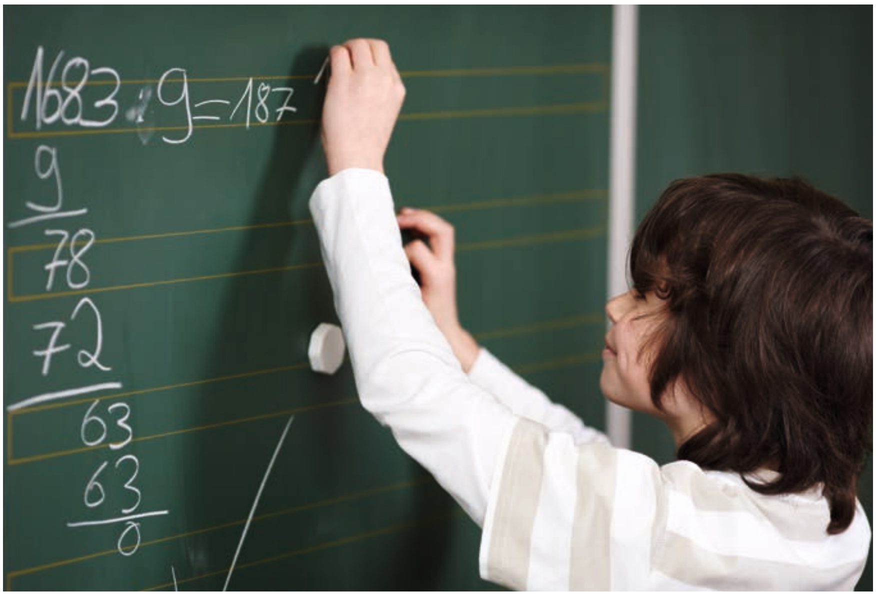
Kopfrechenstrategie (mit Zahlenstrahl im Kopf)



bis zur 80, dann dreißig 40er-Sprünge bis zur 1280 und dann nochmal dreißig. Zusammen sind das 62 40er-Sprünge (**Kasten 1** unten).

Als *halbschriftliche Strategien des Zahlenrechnens* werden Rechenwege bezeichnet, bei denen die Zahlen ebenfalls in kleinere Zahlen zerlegt, notiert und unter Rückgriff auf Bedeutungen flexibler verrechnet werden, Kasten 1 zeigt zwei Beispiele. In einer Studie gelang Kopfrechnen schlechter bei Kindern, die die schriftliche Division gelernt hatten als bei Kindern mit halbschriftlichen Strategien (Ehlert u. a. 2014).

Als *verständige Strategien* bezeichnen wir bei Kindern jene halbschriftlichen und Kopfrechenstrategien, deren Bedeutungen sie verstehen und deren Funktionieren sie begründen können (Prediger/ Goldschmidt, eingereicht).



Soll der Algorithmus der schriftlichen Division in der (Grund-)Schule vermittelt werden?

Kein „Verständnis vs. Rechnen“

Aktuell wird in der Öffentlichkeit ein Entweder-oder-Kampf geführt: Sind entweder Rechenfertigkeiten oder ist Verständnis wichtiger? Darf man Rechenfertigkeiten auslassen? Nein, sonst wäre die Verstehensorientierung falsch gedeutet! Solche Kämpfe wurden in der Mathematikdidaktik vor 25 Jahren bereits beendet (Kilpatrick u. a. 2001), denn Verständnis und Rechenfertigkeiten bedingen sich gegenseitig: Ohne Verständnis keine nachhaltigen Rechenfertigkeiten, aber ohne sichere Rechenfertigkeiten auch kein Verständnis in aufbauenden Themen.

Wohlverstandene Verstehensorientierung zielt auf

1. Verständnis für Konzepte,
2. Fertigkeiten für Strategien und Verfahren und
3. Verständnis für Strategien und Verfahren (Holzäpfel u. a. 2024).

Für die Division heißt das: Natürlich sollen alle Kinder und Erwachsenen Aufgaben wie 2480 : 40 im Kopf ohne Taschenrechner rechnen können. Dieses Ziel ist in den Bildungsstandards der Primarstufe und allen Lehrplänen verankert. In der Sekundarstufe sollte dieses Ziel aufrechterhalten werden. Es geht also nicht um *Rechnen können ja oder nein?*, sondern *Wie sollen wir rechnen und die Rechnungen begründen?*

Verständiges Rechnen im durchgängigen Curriculum

Die Bildungsstandards der Primarstufe verschieben den Fokus vom Ziffernrechnen auf das verständige Zahlenrechnen.

Große schrittweise Divisionen aufschreiben

Leonie möchte 1065 : 15 rechnen. Dazu überlegt sie schrittweise, wie oft 15 in die 1065 passt. Sie schreibt ihre Rechenschritte übersichtlich in eine Tabelle:

Was ist die größte Zahl, bei der ich weiß, wie oft 15 reinpasst?	Wie oft passt die 15 in diese Zahl?	Wie viel bleibt übrig? Und was kommt heraus?
		1065 : 15 = 40 + 20 + 10 + 1 = 71
600	= 40 · 15	– 600
		465
300	= 20 · 15	– 300
		165
150	= 10 · 15	– 150
		15
15	= 1 · 15	– 15
		0
	40 + 20 + 10 + 1 = 71	

Ich weiß direkt: In 600 passen vierzig 15er. Die 600 ziehe ich von 1065 ab. 465 bleiben übrig. Dann überlege ich für die 465, wie viele 15er reinpassen.

Abb. 1: Verständige Division (nach Selter u. a. 2025, S. N8 – 6)

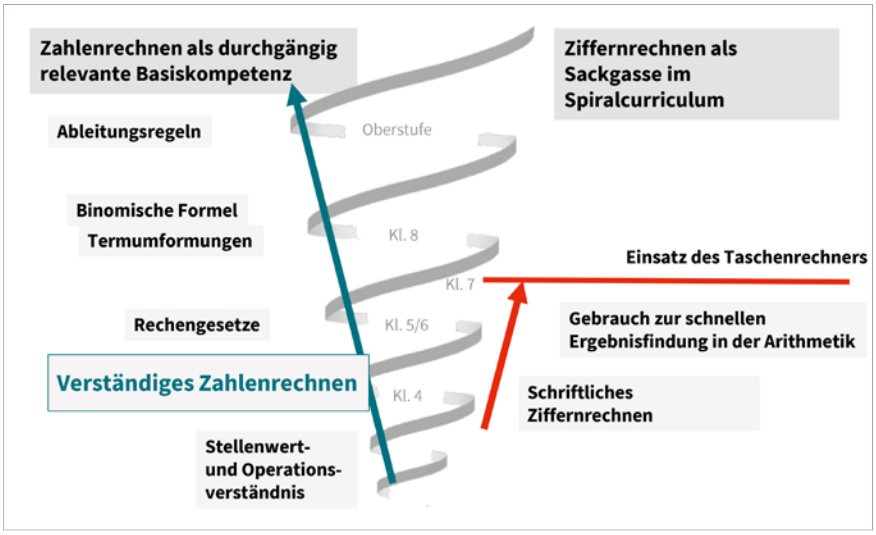


Abb. 2: Verständiges Rechnen im durchgängigen Curriculum

Auch im Jahrgang 5/6 sollte unseres Erachtens das verständige Rechnen ins Zentrum rücken, denn es bietet mehr Potentiale für ein durchgängiges Curriculum:

Anknüpfen an das Stellenwert- und Operationsverständnis

Beim Begründen von Rechenstrategien werden die Rechenschritte immer wieder an das zugrunde liegende Stellenwert- und Operationsverständnis angeknüpft: Auf die Grundvorstellung von Dividieren als Passen-In (Aufteilen) nehmen die Kinder Bezug, wenn sie 2480 : 40 übersetzen in die Frage: „Wie oft passt die 40 in die 2480?". (Das Passen-In als Grundvorstellung ist auch anschlussfähig an die Idee des Messens, etwa bei Flächeninhalten.)

Die additive Stellenwert-Eigenschaft erklären sie, wenn sie 2480 in 2400 + 80 zerlegen. Die multiplikative Stellenwert-Eigenschaft nutzen sie, um 2400 in Zehnern darzustellen und statt mit 40 Einern mit 4 Zehnern zu rechnen.

Diese Grundlagen sind dagegen im schriftlichen Verfahren kaum transparent. Es bleibt ein „Ziffernzaubern", wenn es nicht konsequent an das Zahlenrechnen angeknüpft wird.

Die Verstehensgrundlagen mit den Kindern immer wieder zu versprachlichen, ermöglicht eine gute integrierte Wiederholung des Stellenwert- und Operationsverständnisses. Mit dieser Verankerung können sich Lernende die Rechenstrategien auch besser merken. Anlässe für diese Anknüpfung an Verstehensgrundlagen bietet zum Beispiel das Mathe-sicher-können-Material (Selter u. a. 2025 bzw. https://fr-vlg.de/ml254mskn8) mit geeigneten Förderaufgaben. **Abb. 2** zeigt, wie in dem Material etwa die Division schließlich verständiger verschriftlicht wird.

Grundlage für Terme und Umformungen

Bislang viel zu wenig diskutiert ist die Rolle des verständigen Zahlenrechnens als Grundlage für spätere algebraische Terme und Termumformungen:

Wenn das Rechnen mit zerlegten Zahlen nicht so wie in den Grundschulschreibweisen (unten rechts in **Kasten 1**) notiert wird, sondern mit Rechenketten (wie oben rechts in **Kasten 1**), dann lassen sich daran wertvolle Erfahrungen sammeln für Termschreibweisen und Termumformungen, mit dem Distributiv-, Assoziativ- und Kommutativgesetz.

In unseren divomath-Lernumgebungen zum verständigen Rechnen im Jahrgang 5/6 lernen Kinder deshalb zuerst, ihre individuellen Rechenwege in Rechenketten zu notieren. Diese dienen dann als Anlass, um Rechengesetze auszuformulieren: Darf man das so zerlegen? Wieso rechnet man dann gerade so? Geht das immer?

Damit bietet das verständige Zahlenrechnen im Sinne des Durchgängigkeitsprinzips (Holzäpfel u. a. 2024) eine wichtige Grundlage, auf die der Algebraunterricht später aufbauen kann, ab Jahrgang 6/7, bis hin zu den Ableitungsregeln in der Oberstufe (vgl. **Abb. 2**).

Wer dagegen nur schriftliches Ziffernrechnen übt, der verpasst diese algebraischen Potentiale und manövriert die Lernenden in eine Sackgasse.

Fazit: Ansprüche werden gehoben statt gesenkt!

Die Sorgen einiger Eltern wären berechtigt, wenn die schriftliche Division ersatzlos gestrichen wäre. Dies wäre eine unverantwortbare Senkung der Ansprüche. Doch stattdessen wird das Ziffernrechnen durch die bessere Form des Zahlenrechnens ersetzt.

Wenn es im Unterricht gelingt, das Zahlenrechnen tatsächlich als verständiges Rechnen mit seinen Potentialen zum Anknüpfen an Verstehensgrundlagen und Vorbereiten der Algebra auszuloten, dann werden die Ansprüche gehoben, und nicht gesenkt. Im QuaMath-Programm gibt es dafür die passenden Fortbildungen. Melden Sie sich gerne an.

Links zu den genannten Materialien

QuaMath: quamath.de/fuer-schulen
Divomath: quamath.de/divomath-lite
Mathe sicher können:
mathe-sicher-koennen-dzlm.de/nz

Literatur

Ehlert, A./ Wolf, A./Koss, J./Fritz, A. (2014): Schülerkompetenzen zum Dividieren. – In: Empirische Pädagogik, 28(4), S. 319 – 337.

Holzäpfel, L. / Prediger, S. / Götze, D. / Rösken-Winter, B. / Selter, C. (2024). Fünf Prinzipien für qualitätsvollen Mathematikunterricht. – In: mathematik lehren 242, S. 2 – 9. https://fr-vlg.de/ml254quamath

Kilpatrick, J./Swafford, J./Findel, B. (2001): Adding it up. Helping children learn mathematics. Washington: National Academy.

KMK (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15. 10. 2004. Kultusministerkonferenz.

KMK (2022): Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich. – Kultusministerkonferenz der Länder, Bonn.

Krauthausen, G. (1993): Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner. – In: Journal für Mathematik-Didaktik, 14(3), S. 189 – 219.

Prediger, S./Goldschmidt, A. (eingereicht). Verständiges proportionales Denken. Manuskript.

Selter, C./Prediger, S./Nührenbörger, M./Hußmann, S. (Hrsg.) (2025): Mathe sicher können. Diagnose- und Förderbausteine N5 – N8. Cornelsen. Frei unter https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/material-sek/natuerliche-zahlen