Seminar zur „Algebraischen Zahlentheorie”

Vorkenntnisse: Algebra I, insbesondere Körper- und Galoistheorie, Algebra II: der Teil über kommutative Algebra, insbesondere die „ganzen Ringerweiterungen”, ferner: Moduln über Hauptidealringen

Literatur

B-S S. Borevich, I. Shafarevich: Zahlentheorie (Übersetzung: H. Koch, Birkhäuser 1966)

Ko Helmut Koch, *Zahlentheorie*, Vieweg 1997

Ma Daniel A. Marcus, *Number Fields*, Springer 1977

La Serge Lang, *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley 1970, Springer 200x

Rib Paulo Ribenboim, *Classical Theory of Algebraic Numbers*, Springer 2001

Rin Claus-Michael Ringel, Skript Uni Bielefeld 1982 (Ausarbeitung: Heinz Haake); Webseite Ringel Sommer 2007

Schm Alexander Schmidt: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer 2007

Vortragsthemen

1. *Diskriminante und Ganzheitsbasis*: Die Spurabbildung, die Diskriminante eines Moduls relativ zu einer Bilinearform, die Diskriminante eines Polynoms, Existenz einer „Ganzheitsbasis” ($\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{o}_K$) aus $n = [K : \mathbb{Q}]$ Elementen

2. *Dedekind-Ringe*: Definition, ganzer Abschluss in separablen Erweiterungen, die Gruppe der gebrochenen Ideale

3. *Zerlegung von Primidealen in Körpererweiterungen*: Definition von Trägheitsgrad f_i und Verzweigungsindex e_i eines Primideals, die Norm eines Ideals, die Formel $\sum e_i f_i = n$, Beweisvariante mit Lokalisierung

4. *Endlichkeit der Klassenzahl*: die Klassengruppe eines Dedekindrings, die Endlichkeit im Zahlkörperfall, die Abschätzung von Minkowski, Beispiele für Klassengruppen (benutzt den Minkowski'schen Gitterpunktsatz aus der Geometrie der Zahlen)

5. *Dirichlet'scher Einheitensatz*: der Satz beinhaltet die Existenz von „Grundeinheiten”, die eine Basis einer freien abelschen Gruppe bilden; Beweis hierzu (benutzt den Minkowski'schen Gitterpunktsatz aus der Geometrie der Zahlen), Beispiele;

6. *Grundeinheiten in Körpern vom Grad* ≤ 4: möglichst erschöpfende Behandlung der Einheitengruppe dieser Körper; insbesondere Körper der Form $\mathbb{Q}[\sqrt{k}, \sqrt{\ell}]$;

7. *Kreisteilungskörper I*: Ganzheitsbasis und Zerlegungsgesetze

8. *Kreisteilungskörper II*: Gauß'sche Summen, quadratische Teilkörper, quadratisches Reziprozitätsgesetz

9. *Einige Spezialfälle des Fermat'schen Problems*: nach [B-S] oder [Ma], Einleitungskapitel

10. *Zerlegungsgesetze in Galoiserweiterungen*: Trägheits- und Verzweigungsgruppe, Satz von Hilbert

11. *Der Dedekind'sche Verzweigungssatz*: Satz: genau die Teiler der Diskriminante sind verzweigt; Beweisvarianten ohne und mit Lokalisierung

12. *Die Differente*, Begriff der Differente, Zusammenhang zu Relativdiskrimanten, der zugehörige Verzweigungssatz

13. *Diskrete Bewertungen und lokale Körper*: diskrete Bewertungsringe,Absolutbeträge auf Körpern, Vervollständigung, Zusammenhang mit Zahlkörpern

14. *Kreisteilungskörper III*: der maximale totalrelle Teilkörper, Zerlegung der Klassenzahl

15. *Idele und die Idelklassengruppe*

16. *Reziprozitätsgesetze*

Die Themen 1-13 bilden einen kompakten Grundkurs in Algebraischer Zahlentheorie; der Schwierigkeitsgrad ist nicht grundsätzlich höher als in der Galoistheorie oder der Algebra II; allerdings sind einige Themen relativ vollgepackt; eine Ausarbeitung wird i.d. Regel erwartet; ggf. dann kleine Kürzungen im mündlichen Vortrag. Die letzten drei Themen sind optional und vermutlich im Sommersemester nicht zu schaffen (könnten im Oberseminar im Winter 2009/10 nachgetragen werden).