

Exkurs: Konvexe Menge, Polytope und polyedrische Mengen

Zugrundegelegt wird ein beliebiger (endlich-dimensionaler) reeller Vektorraum V . (Ein Skalarprodukt auf V wird im folgenden nicht benutzt.) Eine *Strecke* in V ist eine Teilmenge der Form $[a, b] := \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$, wobei $a, b \in V$ beliebige Punkte aus V sind mit $a \neq b$, die *Endpunkte* der Strecke. (Für $a = b$ ist $[a, a] = \{a\}$ eine “entartete Strecke”.) Eine Teilmenge $C \subseteq V$ heißt bekanntlich *konvex* wenn für je zwei Punkte $a, b \in C$ die gesamte Strecke $[a, b]$ in C enthalten ist. Die *konvexe Hülle* $\text{conv } X$ einer beliebigen Teilmenge $X \subseteq V$ kann definiert werden als der Schnitt aller X umfassenden konvexen Mengen; das ist die (notwendig eindeutig bestimmte) kleinste, X enthaltende konvexe Menge. Sie kann konstruktiv beschrieben werden als die Menge aller *Konvexkombinationen* $\sum_{i=1}^m t_i a_i$, dabei die $t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\sum t_i = 1$, von endlich vielen (beliebigen) Punkten $a_1, a_2, \dots, a_m \in X$. Sie liegt in der *affinen Hülle* $\text{aff } X$, die entsprechend aus allen *Affinkombinationen* (affinen Linearkombinationen) $\sum_{i=1}^m t_i a_i$, $t_i \in \mathbb{R}$, $\sum t_i = 1$ von je endlich vielen Punkten aus X besteht. Die *Dimension* einer konvexen Menge ist definitionsgemäß gleich der Dimension ihrer affinen Hülle (die wiederum definiert ist als die Dimension des zum affinen Raum zugehörigen Untervektorraumes von V). Z.B. ist die Dimension eines Punktes (genauer einer einpunktigen Menge) gleich Null und die Dimension einer Strecke gleich Eins.

Eine *Hyperebene* in V ist ein affiner Unterraum H der Codimension Eins (also der Dimension $\dim V - 1$; praktisch durchgängig benutzt wird die Beschreibung $H = f^{-1}(\alpha)$ mit einer von Null verschiedenen Linearform $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Darstellung ist nicht eindeutig, aber die Linearform durch H bis auf Vielfache eindeutig bestimmt. Zu jeder Hyperebene H gehören zwei (abgeschlossene) *Halbräume* H^+ und H^- , die bei obiger Beschreibung von H gegeben sind als $H^+ = f^{-1}([\alpha, \infty))$ und $H^- = f^{-1}((-\infty, \alpha])$. Gelegentlich braucht man auch die offenen Halbräume, die durch $H^+ \setminus H = f^{-1}((\alpha, \infty))$ und $H^- \setminus H$ gegeben sind. Welcher der beiden Halbräume H^+ und welcher H^- ist, hängt von der Wahl der Linearform f ab, die Menge $\{H^+, H^-\}$ ist jedoch durch H eindeutig definiert: die offenen Halbräume zu H sind die Zusammenhangskomponenten von $V \setminus H$, und der jeweilige abgeschlossene Halbraum ist der offene vereinigt mit H , oder auch der topologische Abschluss davon.

Ein Punkt x einer konvexen Menge K heißt *Extremalpunkt* von K , falls x nicht im Inneren einer ganz in K verlaufenden Strecke liegt:

$$x = (1-t)y + tz, \quad y, z \in K, \quad 0 < t < 1 \implies x = y = z.$$

Wenn man eine konvexe Menge als konvexe Hülle einer Teilmenge darstellt (erzeugt), $C = \text{conv } X$, dann muss X alle Extremalpunkte enthalten. (Tatsächlich sind für kompakte konvexe Mengen keine weiteren “Erzeuger” erforderlich. Diesen bekannten Satz werden wir jedoch nicht benötigen.)

Sehr wichtig (auch für unsere Anwendung der Konvexitätstheorie) ist der Begriff der *Stützhyperebene* an eine konvexe Menge C : das ist eine Hyperebene

H mit $H \cap \bar{C} \neq \emptyset$ und $C \subseteq H^+$ bzw. $H \subseteq H^-$. Hier ist $\bar{C}$ der topologische Abschluss von C , er ist wiederum konvex. Eine *Seite* einer abgeschlossenen konvexen Menge C ist eine Teilmenge $A \subseteq C$, für die folgendes gilt: Es existiert eine Stützhyperebene H für P , deren Durchschnitt mit P genau A ist: $A = P \cap H$.

Ein *Polytop* ist eine Teilmenge $P \subset V$, die als konvexe Hülle endlich vieler Punkte dargestellt werden kann: es gibt eine endliche Menge $X \subset V$ mit $P = \text{conv } X$. Es gibt dann eine (trivialerweise eindeutig bestimmte) kleinste Menge $X = X_P$ mit $\text{conv } X = P$; ihre Elemente heißen *Ecken* von P . Die Ecken eines Polytops sind genau seine Extrempunkte. (Das folgt nicht unmittelbar aus den Definitionen, ist aber nicht schwer zu beweisen.)

Eine *polyedrische Menge* ist eine Teilmenge $P \subset V$, die als endlicher Durchschnitt von Halbräumen H^+ dargestellt werden kann. Auch hier gibt es eine eindeutige minimale solche Darstellung: wenn wir ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass P nicht-leeres Inneres hat, dann sind Hyperebenen H zu den Halbräumen H^+ einer minimalen Darstellung alle Stützhyperebenen an P , und zwar derart, dass die zugehörigen Seiten $P \cap H$ die Codimension 1 haben (sogenannte *Wände* oder *Facetten* von P .)

Hauptsatz Eine Teilmenge eines Vektorraumes ist genau dann ein Polytop, wenn sie eine beschränkte polyedrische Menge ist.

Für polyedrische Mengen P gibt es noch eine weitere Kennzeichnung der Seiten $A \subset P$. Eine "Seite" in diesem neuen Sinn ist eine (konvexe) Teilmenge $A \subset P$, die folgendes erfüllt: Wenn eine Strecke $[y, z] \subseteq P$ einen Punkt $a \in A$ als inneren Punkt enthält, dann muß die gesamte Strecke in A enthalten sein:

$$a \in [y, z], \quad y \neq a \neq z, \quad y, z \in P \quad \implies \quad y, z \in A.$$

Diese Definition ist so zu lesen, dass die nulldimensionalen "Seiten" genau die Extrempunkte sind (für die es eine solche Strecke überhaupt nicht gibt).

Ein *polyedrischer Kegel* (mit Spitze im Nullpunkt) ist ein endlicher Durchschnitt von Halbräumen, deren Hyperebenen alle durch Null gehen. Das ist also erstens ein konvexer Kegel wie früher definiert, und zweitens eine polyedrische Menge.