1.3 Wichtige Beispiele von Gittern

Wir besprechen zunächst ein wichtiges, nämlich in mehrfacher Hinsicht „optimales“ Gitter in der Dimension 2.

Beispiel 1.3.1 (Das hexagonale Gitter) Es sei $A = \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w$. wobei $\langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle =: \mu$, $\langle v, w\rangle = \mu/2$. D.h., L besitzt zwei gleich lange Basisvektoren im Winkel von 60°. Dann gilt

$\min L = \mu$

$\operatorname{Min} L = \{\pm v, \pm w, \pm(v - w)\}$

$s(L) = 6.$

Der Beweis ergibt sich leicht mittels der Formel

$$||xv + yw||^2 = \mu(x^2 + xy + y^2) = \mu((x + \tfrac{1}{2}y)^2 + \tfrac{3}{4}y^2). \tag{1.3.1}$$

Der letzte Ausdruck kann nämlich für ganzahliges x und y offenbar nicht kleiner als μ sein, und man sieht schnell, welche Paare (x, y) genau zu μ führen. Wir werden diese Umformung, die sogenannte Dreieckszerlegung einer quadratischen Form[2], später in allgemeiner Form besprechen.

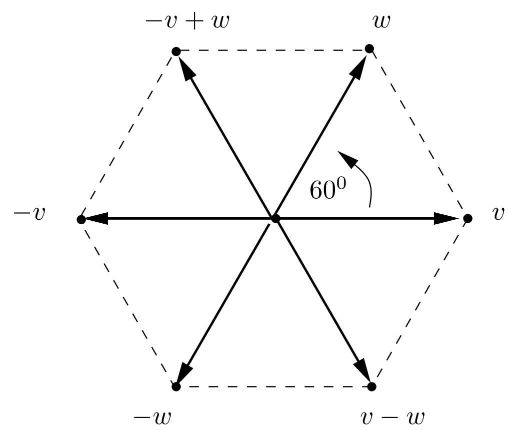

Abb. 1.3.1: Die Minimalvektoren des hexagonalen Gitters

Die Minimalvektoren von A bilden ein reguläres Sechseck; daher die Bezeichnung „hexagonales Gitter“. Die Anzahl der Minimalvektoren eines zweidimensionalen Gitters kann nicht größer als 6 sein. Das zeigt die folgende elementargeometrische Überlegung, die nicht mehr viel mit Gittern zu tun hat: Die Minimalvektoren $v_1, \dots, v_k$ liegen alle auf einem Kreis von Radius $\mu = \sqrt{\min L}$; sie seien zyklisch durchnummeriert. Da $v_{i+1} - v_i$ im Gitter liegt, also mindestens die Länge μ hat, muß der Winkel zwischen v_i und v_{i+1} mindestens 60° sein. Hieraus folgt sofort $k \leq 6$.

[2]Die entsprehende Zerlegung einer symmetrischen Matrix ist in der Numerischen Mathematik auch als Cholesky-Zerlegung bekannt

Im Fall $s(L) = 6$ ist die Konfiguration der Minimalvektoren im Wesentlichen eindeutig bestimmt; wir werden später sehen (das ist nicht schwer), dass das Gitter von seinen Minimalvektoren erzeugt wird. Das gilt für alle zweidimensionalen Gitter, die überhaupt zwei linear unabhängige Minimalvektoren enthalten. Somit ist das hexagonale Gitter das im wesentlichen eindeutig bestimmte Gitter in der Ebene mit 6 Minimalvektoren.

Die Gitter aus dem folgenden Beispiel sind ganzzahlig und besitzen eine Basis aus „kurzen" Vektoren, nämlich Vektoren der Quadratlänge 1 oder 2. Mehr über solche Gitter (sog. Wurzelgitter) erfahren wir in Abschnitt 1.6.

Beispiel 1.3.2 Die Wurzelgitter von Typ $\mathbf{A_n}$ und $\mathbf{D_n}$

a) $I_n := \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt,

   $I_n = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbb{Z}\mathbf{e}_n, \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$;

   Gram-Matix ist die Einheitsmatrix

   I_n ist „unimodular" : $\det I_n = 1$.

   $\min I_n = 1$

   $\operatorname{Min} I_n = \{\pm\mathbf{e}_1, \dots, \pm\mathbf{e}_n\}$

b) $D_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in I_n \mid \sum x_i \equiv 0(2)\}$

   eine Basis von D_n ist z.B. $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_{n-1} - \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n$ Gram-Matrix hierzu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 & \\ & -1 & 2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 2 & -1 & -1 \\ & 0 & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   $\min D_n = 2$

   $\operatorname{Min} D_n = \{\pm\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j \mid 1 \le i, j \le n\}$

   D_n ist gerade: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\mathbf{x} \in D_n$;

   $\det D_n = 4$.

c) $A_n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I_{n+1} \mid \sum x_i = 0\}$ ist ein Gitter der Dimension n im $\mathbb{R}^{n+1}$. Eine Basis von A_n ist z.B. $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{n+1}$

Gram-Matrix hierzu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & \\ & -1 & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A_n = n + 1$

$\min A_n = 2$

$\operatorname{Min} A_n = \{\pm(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) \mid 1 \leq i < j \leq n+1\}$

A_n ist gerade: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\mathbf{x} \in A_n$;

Das Gitter I_3 wird aus naheliegenden Gründen als *kubisches Gitter* bezeichnet, entsprechend I_n, $n \geq 4$ als *hyperkubisch.* Die behaupteten Eigenschaften der angegebenen Gitter sind recht leicht nachzuprüfen: Zunächst einmal überlegt man sich, daß die angegebenen Vektoren in der Tat eine Basis des Gitters bilden. Die Lineare Unabhängigkeit bewegt sich im bekannten Rahmen der elementaren Linearen Algebra; für die Erzeugenden-Eigenschaft muss man dann zeigen, daß die Koeffizienten von Gittervektoren bzgl. der angegebenen Vektoren (Vektorraum-Basis) wirklich ganze Zahlen sind. Die Determinante von A_n und D_n berechnet man dann aus der angegebenen Gram-Matrix durch Induktion. Für D_n werden wir in Kürze noch eine andere Methode kennenlernen, die darauf beruht, daß D_n ein Teilgitter in I_n ist, dessen Determinante trivialerweise bekannt ist. Es handelt sich um die sogenannte Determinanten-Index-Formel, siehe 1.5.2. Die Bestimmung des Minimums und aller Minimalvektoren der Gitter aus 1.3.2 ist offensichtlich, da wir im $\mathbb{Z}^n$ mit dem Standardskalarprodukt arbeiten. Die Details einiger Behauptungen werden unten noch einmal als Übungsaufgaben formuliert.

Das gerade Teilgitter eines Gitters. Das Teilgitter D_n war in $I_n = \mathbb{Z}^n$ durch eine lineare Kongruenz modulo 2 definiert worden. Wir wollen diese Konstruktion noch etwas anders interpretieren. Für $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum x_i^2 \equiv \left(\sum x_i\right)^2 \bmod 2.$$

Das Teilgitter D_n besteht also aus allen denjenigen Vektoren $\mathbf{x}$ von I_n, die eine gerade Quadratlänge haben: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \equiv 0 \bmod 2$. Diese Konstruktion von D_n aus I_n wird im folgenden Satz verallgemeinert.

Bemerkung 1.3.3 Es sei L ein ganzzahliges Gitter. Setze

$$L^0 := \{x \in L \mid \langle x, x \rangle \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Dann ist L^0 ein Teilgitter von L, das *gerade Teilgitter* von L. Falls L nicht selbst gerade ist, ist $[L : L^0] = 2$ und $\det L^0 = 4 \det L$.

Zum Beweis stellt man fest, daß die Abbildung $L \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ v \mapsto \langle v, v\rangle + 2\mathbb{Z}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. (Das klappt modulo keiner anderen Zahl als modulo 2, und nur für ganzzahlige Gitter.) L_0 ist der Kern dieses Homomorphismus, also eine Untergruppe, und zwar vom Index 1 oder 2, und man kann wieder die schon erwähnte Determinanten-Index-Formel benutzen.

Wir wollen nun noch ein weiteres Gitter mit Determinante 1 kennen lernen, außer dem offensichtlichen I_n. Es existiert in jeder geraden Dimension, ist jedoch nur in den durch 4 teilbaren Dimensionen ganzzahlig. Es wird später noch mehrfach, in unterschiedlichen Zusammenhängen auftauchen.

Beispiel 1.3.4 (Die Erweiterung D_n^+ des Wurzelgitters D_n)

$D_n^+ := D_n + \mathbb{Z}\mathbf{u}$, wobei $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n)$

$\det D_n^+ = 1$, wenn $n \equiv 0 \pmod 2$ ist;

D_n^+ ist ganzzahlig genau dann, wenn $n \equiv 0 \pmod 4$ ist;

D_n^+ ist gerade genau dann, wenn $n \equiv 0 \pmod 8$ ist;

$\min D_n^+ = 2$ für $n \geq 4$, $n \equiv 0 \pmod 2$.

Der Beweis aller Behauptungen beruht im wesentlichen darauf, daß für $n \equiv 0 \pmod 2$ der Index $[D_n^+ : D_n]$ von D_n^+ über D_n gleich 2 ist (wegen $2\mathbf{u} \in D_n$), sowie der daraus resultierenden Zerlegung $D_n^+ = D_n \,\dot\cup\, (\mathbf{u}+D_n)$. Näheres überlassen wir wiederum den Übungen.

Für die folgenden Beispiele kehrem wir zu der früher erläuterten Möglichkeit zurück, ein Gitter bzw. einen quadratischen Modul bis auf Isometrie direkt durch Angabe einer Matrix $G \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ (symmetrisch, positiv definit) zu spezifizieren, die dann als Gram-Matrix fungiert. D.h. es ist dann $L = \mathbb{Z}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_G = \mathbf{x}^t G\mathbf{y}$. Man würde gern möglichst viele Eigenschaften des Gitters direkt an dieser Matrix ablesen können, insbesondere sein Minimum. (Das sollte nämlich das kleinste, o.B.d.A. erste Diagonalelement sein.) Eine solche Gram-Matrix existiert immer:

Bemerkung 1.3.5 Jeder kürzeste Vektor $v \in \operatorname{Min} L$ eines Gitters L kann als (erster) Vektor einer Basis von L benutzt werden.

Nach der Theorie freier abelscher Gruppen reicht es hierzu, dass v ein *primitiver* Vektor von L ist, also kein echtes Vielfaches $v = cv_0,\ c \in \mathbb{N}, c > 1$ eines Vektors $v_0 \in L$. Dann wäre aber v_0 ein kürzer Gittervektor als v. □

Wir klären die angesprochene Frage der "optimalen" Gram-Matrizen zunächst in der Dimension 2.

Beispiel 1.3.6 (Binäre Gitter)

a) Das binäre (zweidimensionale) Gitter L sei durch eine symmetrische positiv definite (2×2)-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ mit } 2|b| \leq a \leq c \qquad (\text{sog. } \textit{reduzierte} \text{ Matrix}) \tag{1.3.2}$$

gegeben. Dann gilt $\min L = a$ und

$$|\operatorname{Min} L| = \begin{cases} 2, & \text{falls } a < c, \\ 4, & \text{falls } 2|b| < a = c, \\ 6, & \text{falls } 2|b| = a = c. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

b) Jedes binäre Gitter besitzt eine Basis, deren Gram-Matrix den unter a) aufgeführten Ungleichungen genügt. Man nennt eine solche Basis auch *reduzierte Basis.*

Für den Beweis von a) benutzt man die Umformung

$$\langle v, v\rangle^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + (c - \frac{b^2}{a})y^2, \tag{1.3.4}$$

(vergleiche Formel 1.3.1) für jeden Spaltenvektor $v = \binom{x}{y} \in \mathbb{Z}^2$. In den ersten beiden Fällen von 1.3.3 ist klar, welches die 2 bzw. 4 Minimalvektoren sind; im dritten Fall hat man das hexagonale Gitter (siehe Beispiel 1.3.1) mit seinen bereits bekannten 6 Minimalvektoren.

Für den Beweis von b) wählt man zunächst $v_1 \in \operatorname{Min} L$. Dann ergänzt man nach Bemerkung 1.3.5 v_1 zu einer Basis v_1, v von L. Dann ist auch v_1, v_2 eine Basis für jeden Vektor v_2 der Gestalt $v_2 = v + tv_1,\ t \in \mathbb{Z}$. Wähle t so, dass $\|v_2\|$ kleinstmöglich ist. Dann gilt $\|v_2\| \leq \|v_2 + tv_1\|$ für alle $t \in \mathbb{Z}$. Für die Gram-Matrix bzgl. v_1, v_2 liefert das mit wenig Rechnung die zweite gewünschte Ungleichung $2|b| \leq a$. □

Einige Gitter mit Minimum 3. Wir haben oben ganzzahlige Gitter kennengelernt, die das Minimum 2 haben und eine Basis aus Vektoren der Quadratlänge 2 besitzen. Im dem abschließenden Beispiel dieses Abschnittes wollen wir direkt auf der Ebene der Gram-Matrizen dieses Beispiel so variieren, dass wir eine Basis aus Vektoren der Quadratlänge 3 erhalten und 3 auch tatsächlich das Minimum ist.

Wir betrachten also positive symmetrische Matrizen G mit Diagonalelementen $g_{ii} = 3$ für alle i. Wir schreiben kurz $\min G$ und $\operatorname{Min} G \subset \mathbb{Z}^n$ für das Minimum und die Minimalvektoren des zugehörigen Gitters. Wie können die Nebendiagonalelemente g_{ij} aussehen? Da die (2×2)-Minoren ebenfalls positive Determinante haben. muss $|g_{ij}| < 3$ sein, wegen der Ganzzahligkeit also $g_{ij} \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

(Dieses folgt genauso gut natürlich aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung.) Unsere Annahme $\min G = 3$ impliziert nun eine weitere Einschränkung: der Fall $g_{ij} = \pm 2$ kann nämlich nicht auftreten. Dieses wissen wir aus der Analyse der Dimension 2. (Der Gittervektor $v = v_1 \mp v_2$ hätte nämlich die Quadratlänge $g_{ii} \mp 2g_{ij} + g_{jj} = 3 - 2 \cdot 2 + 3 = 2$.) Es ist eine diffizile Frage, ob und wann eine symmetrische Matrix mit Diagonale konstant 3 und Nebendiagonalelementen $0, 1, -1$ positiv definit ist und wirklich das Minimum 3 hat. Wir beschränken uns deshalb auf die Dimension 3. Hier prüft man die gewünschten Eigenschaften mit der schon angesprochenen Dreieckszerlegung direkt nach.

Wir benutzen hier und im Folgenden die Notation $L \cong G$, wenn das Gitter L (genauer sein Skalarprodukt) wie oben durch die Matrix G gegeben ist.

Beispiel 1.3.7 (Ternäre Gitter mit Minimum 3) Die folgenden dreidimensionalen Gitter haben das Minimum 3 und die Determinante $21, 20, 16$. Die Anzahl der Minimalvektoren ist $6, 6, 8$.

$$T_1 \cong \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_2 \cong \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_3 \cong \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die orthogonale Gruppe eines Gitters. Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem kleinen Nachtrag zu den Grundlagen (Abschnitt 1.2):

Definition 1.3.8 Wenn L ein Gitter in einem euklidischen Vektorraum ist, so ist die Menge aller bijektiven Isometrien $\varphi : L \to L$ eine Gruppe, die sogenannte orthogonale Gruppe von L, bezeichnet mit $\mathrm{O}(L)$.

Falls L ein Gitter auf V ist, also $\langle L \rangle_{\mathbb{R}} = V$, so können wir wie vor Bemerkung 1.2.5 erläutert, $\mathrm{O}(L)$ als Untergruppe von $\mathrm{O}(V)$ auffassen:

$$\mathrm{O}(L) \cong \mathrm{O}(V, L) := \{\psi \in \mathrm{O}(V) \mid \psi(L) = L\}.$$

Wir haben in Bemerkung 1.2.12 im Prinzip alle Isometrien eines Gitters L auf ein Gitter M bestimmt, was für $L = M$ den Fall der orthogonalen Gruppe einschließt. Insbesondere haben wir gesehen:

Satz 1.3.9 *Die orthogonale Gruppe* $\mathrm{O}(L)$ *eines Gitters ist endlich.*

Beweis (Wiederholung): Wähle eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von L, setze λ gleich dem Maximum der Werte $\langle v_i, v_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n\}$. Nach Lemma 1.2.9 gibt es nur endlich viele Vektoren $v \in L$ mit $\langle v, v \rangle \leq \lambda$. Also gibt es für die Bilder $\varphi(v_i)$ der Basisvektoren unter einer gegebenen Isometrie nur endlich viele Möglichkeiten und damit auch für φ nur endliche Möglichkeiten. $\square$

Bemerkung In der Definition der orthogonalen Gruppe reicht es, $\varphi(L) \subseteq L$ zu fordern. Denn dann ist $\varphi(L)$ ein Teilgitter mit der gleichen Determinante wie L, also nach der verschiedentlich erwähnten Determinanten-Index-Formel gleich L. Siehe unten Folgerung 1.5.3.

Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.3

Aufgabe 1.3.1

a) Zeige, daß die Vektoren $e_1 - e_2$, $e_2 - e_3, \ldots, e_n - e_{n+1}$ eine Basis von A_n bilden.

b) Berechne aus der zugehörigen Gram-Matrix mittels Induktion über n die Determinante von A_n.

Aufgabe 1.3.2

a) Setze für den Augenblick

$$E_n := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},\ x_i - x_j \in \mathbb{Z},\ \sum x_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Zeige, daß $E_n = D_n^+$ ist.

b) Bestimme alle Vektoren der Norm (Quadratlänge) 2 in A_n, D_n, D_n^+.

(Beachte: Die Fälle $n = 4, 8$ für D_n^+ sind Sonderfälle.)

Aufgabe 1.3.3

a) Zeige, dass die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(I_2)$ des Quadrate-Gitters I_2 isomorph zur Diedergruppe Di_4 der Ordnung 8 ist (und zwar in deren kanonischer zweidimensionaler Realisierung).

b) Bestimme entsprechend die orthogonale Gruppe des hexagonalen Gitters (siehe auch Aufg. 1.3.4 a)).

c)* Bestimme die orthogonalen Gruppen aller anderen binären Gitter. (Die Fallunterscheidung aus Formel 1.3.3 muss hierzu etwas verfeinert werden, da es nicht nur auf die Minimalvektoren, sondern auch auf die kürzesten hierzu linear unabhängigen Vektoren ankommt.)

Aufgabe 1.3.4
Zeige die folgenden Gitter Isometrien von Gittern:

a) $A_2 \cong A$ (hexagonales Gitter)

b) $A_3 \cong D_3$.

c) $I_4 \cong D_4^+$

In der Literatur wird D_3 oft als das *flächenzentrierte kubische Gitter* bezeichnet. Warum?

Aufgabe 1.3.5

a) Beweise alle in Beispiel 1.3.4 aufgestellten Behauptungen über das Gitter D_n^+.

b) Zeige, daß die Vektoren

$$e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ \ldots, e_{n-2} - e_{n-1},\ e_{n-2} + e_{n-1},\ u = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i$$

eine Basis von D_n^+ bilden.

Aufgabe 1.3.6
Für diese Aufgabe benutzt man zweckmäßigerweise die Funktion `qfminim` aus PARI).

a) Bestimme die Menge der Minimalvektoren $\mathrm{Min}(T_i)$ für die drei Gram-Matrizen aus Beispiel 1.3.7.

b) Überprüfe für die entpsrechenden 4×4-Matrizen (symmetrisch, 3 auf der Diagonale), welche hiervon positiv definit sind, und bestimme die Isometrieklassen, die Determinante, das Minimum und Minimalvektoren der zugehörigen Gitter.

Anmerkungen und Literaturhinweise

Für die Berechnung von orthogonalen Gruppen von Gittern (Erzeuger und Gruppenordnung) und für den Isometrietest gibt es effiziente und implementierte Algorithmen, insbesondere von Bernd Souvignier (Universiteit Nijmegen, Referenzen auf seiner Homepage). Die derzeit besten Implementierungen findet man in Magma.

Die orthogonalen Gruppen von Gittern werden in der Kristallographie als Punktgruppen bezeichnet. Die volle Symmetriegruppe eines Gitters ist das semidirekte Produkt seiner Punktgruppe mit seiner Translationsgruppe. (Nicht alle kristallographischen Gruppen besitzen eine solche relativ einfache Strukur als semidirektes Produkt). Gemäß der affinen Konjugationsklasse ihrer Symmetriegruppen werden Gitter in sogenannte *Bravais-Klassen* eingeteilt, die die Klassifizierung nach Punktgruppen wesentlich verfeinern. Für eine ausführliche Einführung in diese Thematik siehe mein Vorlesungsskript *Diskrete Geometrie*, Dortmund 2007.

Die orthogonalen Gruppen der Gitter I_n und A_n kann man ohne weiteres auch in beliebiger Dimension bestimmen. Es handelt sich um sogenannte *Coxeter-Gruppen*, die (in der gegebenen geometrischen Realisierung) von Spiegelungen an Hyperebenen erzeugt werden. Eng verwandt ist der Begriff des *Wurzelsystems*.