1.4 Die Packungsdichte und die Hermite-Zahl eines Gitters

Unter einer Kugelpackung in einem euklidischen Vektorraum V verstehen wir eine Menge von gleich großen Kugeln

$$B(v,r) = \{x \in V \mid \|x-v\| < r\}, \text{ dabei } v \in V,\ r \in \mathbb{R}_{>0},$$

die paarweise höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Die Vereinigungsmenge dieser Kugeln wird ebenfalls als Kugelpackung bezeichnet. Eine Kugelpackung $\mathcal{K}$ wird also spezifiziert durch die Menge D der Kugelmittelpunkte sowie durch einen gemeinsamen Radius r:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{v \in D} B(v,r)\,.$$

In dieser Vorlesung wird D meistens ein Gitter sein, es sind aber auch allgemeinere Mengen geeignet. In der folgenden Definition sammeln wir einige hierfür relevante Begriffe.

Definition 1.4.1 Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heißt *diskret*, wenn zu jedem Punkt $x \in V$ eine Umgebung $U \subseteq V$ existiert mit $U \cap D \subseteq \{x\}$. Der *Minimalabstand* von D wird definiert als

$$\mathrm{d}_{\min}(D) = \inf\{\|v-w\| \mid v,w \in D, v \neq w\}.$$

Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heißt *gleichmäßig diskret*, falls $\mathrm{d}_{\min}(D) > 0$ ist.

Damit eine Menge D für eine Kugelpackung geeignet ist, muß sie offenbar gleichmäßig diskret sein. Die optimale, d.h. größtmögliche Wahl des gemeinsamen Radius aller Kugeln ist dann $r := \mathrm{d}_{\min}(D)/2$.

Für die Diskretheit reicht zu fordern, dass jeder Punkt $x \in V$ eine Umgebung U besitzt derart, dass $U \cap D$ endlich ist. Wenn wir nämlich U als offene Kugel $B^\circ(x,\varepsilon)$ nehmen, so können wir dann durch Verkleinern von ε die gewünschte Bedingung $B^\circ(x,\varepsilon) \cap D \subseteq \{x\}$ erreichen.

Aus dieser Bemerkung folgt insbesondere, dass jede gleichmäßig diskrete Menge wirklich diskret ist. Denn die offene Kugel $B^\circ(x,\varepsilon)$ mit Radius $\varepsilon := \mathrm{d}_{\min}(D)/2$ kann höchstens einen Punkt aus D enthalten.

Es reicht nicht, die Forderung in der Definition der Diskretheit nur für $x \in D$ zu stellen. Als Beispiel für eine solche Situation betrachte man in $V = \mathbb{R}$ die Menge $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, die nach unserer Definition nicht diskret ist.

Nach Proposition 1.2.10 ist jedes Gitter gleichmäßig diskret; in der Tat ist die Wurzel der in Definition 1.2.11 definierten positiven Zahl $\min L$ gleich dem eben für allgemeinere Mengen definierten Minimalabstand: $\mathrm{d}_{\min}(L) = \sqrt{\min L}$. Dieses folgt einfach daraus, dass der Abstand $d(v,w)$ zweier Gitterpunkte die Länge des Differenzvektors $\|v-w\|$ ist, und dass dieser Vektor wieder in L liegt.

Wir betrachten im folgenden nur Kugelpackungen, bei denen D unendlich ist und sogar „in alle Richtungen"des Raumes ausgedehnt ist. Es soll „überall" ein gewisser Prozentsatz des Raumes durch Kugeln überdeckt sein. Das Problem der dichtesten Kugelpackungen fragt nun nach Packungen mit größtmöglicher Dichte, wobei die Dichte anschaulich der Prozentsatz des überdeckten Raumes ist.

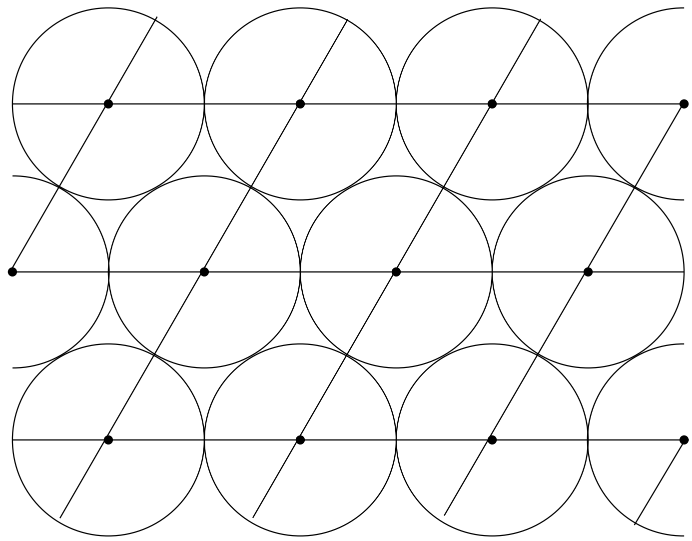

Abb. 1.4.1: Die Kreispackung zum hexagonalen Gitter

So zeigt etwa für $n = 2$ die obenstehende Zeichnung die bestmögliche Packung von Kreisen in der Ebene: etwa 90 % der Ebene (siehe Tabelle 1.4.1) sind durch die Vereinigung der Kreisscheiben überdeckt. Die Mittelpunktsmenge der gezeigten Kreispackung ist ein Gitter, nämlich das früher (siehe Beispiel 1.3.1) besprochene hexagonale Gitter mit zwei gleich langen Basisvektoren im Winkel von 60°.

Die genaue Definition der Dichte ist wie folgt:

Definition 1.4.2 Die *untere Dichte* einer Kugelpackung $\mathcal{K}$ ist definiert durch

$$\Delta^-(\mathcal{K}) = \liminf_{t\to\infty} \frac{\operatorname{vol}(B(0,t)\cap\mathcal{K})}{\operatorname{vol} B(0,t)}\,.$$

Man sagt, dass $\mathcal{K}$ eine Dichte besitzt, falls $\lim\limits_{t\to\infty}$ der rechten Seite existiert. In diesem Fall wird diese Zahl als *Dichte* $\Delta(\mathcal{K})$ bezeichnet.

Wenn $\mathcal{K} = \mathcal{K}_D$ durch eine gleichmäßig diskrete Punktmenge D gegeben ist (mit dem halben Minimalabstand als Kugelradius), so sprechen wir auch von der (unteren) Dichte von D und schreiben $\Delta^-(D)$ bzw. $\Delta(D)$. Der Deutlichkeit halber bezeichnen wir diese Zahl manchmal auch als *Packungsdichte* von D.

Die Packungsdichte ist zu unterscheiden von der gewissermaßen dual definierten *Überdeckungsdichte*, oft mit $\vartheta(D)$ bezeichnet. Für deren Definition wird der Kugelradius R minimal so gewählt, dass die Kugeln um die Punkte aus D den Raum überdecken; dann wird die Summe der Volumina aller Kugeln in einem gegen unendlich gehenden Bereich geteilt durch das Volumen dieses Bereichs. Man erhält im Limes (oder zumindest im Limes Inferior) eine Zahl ≥ 1; je näher diese bei 1 liegt, umso ökonomischer ist die Überdeckung durch die Kugeln.

Wir wollen nun eine einfache hinreichende Bedingung an eine gleichmäßig diskrete Menge D angeben, die garantiert, dass überall im Raum „genügend viele" Punkte aus D liegen, also die zugehörige Kugelpackung eine positive untere Dichte hat.

Definition 1.4.3 Eine Teilmenge $D \cap V$ heißt *gleichmäßig ausgedehnt*, [3] falls eine Konstante R existiert, so dass zu jedem Punkt $x \in V$ ein $v \in D$ existiert mit $d(x, v) \leq R$.

Mit anderen Worten, es soll $d(x, D) \leq R$ sein, wobei wie üblich der Abstand $d(x, D)$ vom Punkt x zur Teilmenge D definiert ist als $d(x, D) := \inf_{v \in D} d(x, v)$.

Wenn D ein Gitter ist, so folgt aus der Existenz eines kompakten Fundamentalbereichs F für D sofort, dass D gleichmäßig ausgedehnt ist. Man nehme nämlich $R := \max_{y \in F} \|y\|$. Wenn $x \in V$ beliebig ist, so folgt mit $x = v + y,\ v \in D,\ y \in F$, dass $d(x, v) = \|y\| \leq R$ ist.

Der folgende Satz ist nicht schwer zu beweisen.

Proposition 1.4.4 *Jede gleichmäßig diskrete und gleichmäßig ausgedehnte Teilmenge $D \subset V$ hat eine positive untere Packungsdichte: $\Delta^-(D) > 0$.*

Insbesondere besitzt jedes Gitter eine positive untere Dichte. Dieses Resultat wird im folgenden Satz verschärft und präzisiert.

Satz 1.4.5 *Jedes Gitter L besitzt eine Packungsdichte. Diese ist gegeben durch*

$$\Delta(L) = \omega_n \frac{(\min L)^{n/2}}{2^n \sqrt{\det L}}.$$

Hierbei bezeichnet ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel.

Beweis: Man benutzt einen Fundamentalbereich (siehe 1.2.8), z.B. den durch eine Basis definierten Quader Q. Man überlegt sich dann (diesen analytischen Teil des Beweises führen wir nicht aus), dass die Packungsdichte existiert und einfach durch den Quotienten $\mathrm{vol}(\mathcal{K}_L \cap Q)/\mathrm{vol}\, Q$ geben ist. D.h. man kann die Dichte, wie zu erwarten, als Anteil des überdeckten Raumes innerhalb des Fundamentalbereiches berechnen. Das Volumen von $\mathcal{K}_L \cap Q$ ist aber genau gleich dem Volumen <u>einer</u> Kugel, also $\omega_n r^n$, wobei $r = \sqrt{\min L}/2$ ist.

[3] in der englischsprachigen Literatur *uniformely dense*, also „gleichmäßig dicht", was mir weniger treffend erscheint

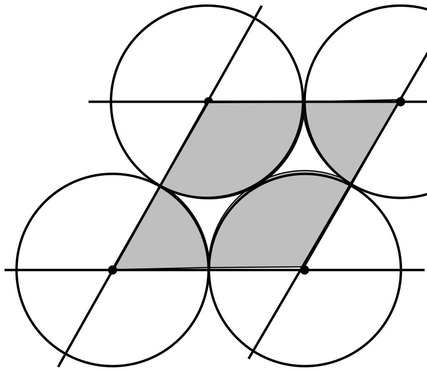

Abb. 1.4.2: Bestimmung der Dichte des hexagonalen Gitters innerhalb eines Fundamentalbereiches

Dieses folgt daraus, dass alle anderen Kugeln aus einer Kugel durch Translation um Gittervektoren hervorgehen, und aus der Definition eines Fundamentalbereichs. Die in Q enhaltenen Teilstücke der Kugel (an den verschiedenen Ecken von Q) setzen sich bis auf Randpunkte genau zu einer Vollkugel zusammen, wie die obige Zeichnung 1.4.2 in der Ebene illustriert. $\square$

Aus der mehrdimensionalen Analysis (Integrationstheorie) bzw. der Geometrie ist bekannt, wie man das Volumen der Einheitskugel ω_n berechnet (Gamma-Funktion). Insbesondere weiß man, dass ω_n für $n \to \infty$ gegen Null geht. Dieses ist bereits ein Hinweis darauf, dass auch die bestmögliche Kugelpackungsdichte Δ_n im n-dimensionalen euklidischen Raum mit wachsender Dimension gegen Null geht, ein klassisches Resultat, das wir später beweisen werden. Neben der Packungsdichte gemäß Satz 1.4.5 betrachtet man die sogenannte *Zentrumsdichte* bzw. *center density*

$$\delta(L) := \frac{(\min L)^{n/2}}{2^n \sqrt{\det L}} \qquad \textbf{Zentrums-Dichte} \tag{1.4.1}$$

eines Gitters L (wie immer mit $n = \dim L$), also den gleichen Ausdruck, jedoch ohne den dimensionsabhängigen Faktor ω_n. Wenn man den Kugelradius auf 1 normiert, ist die Zentrumsdichte die (ungefähre) Anzahl von Zentren (Gitterpunkten) pro Volumeneinheit.

Wir notieren eine einfache, aber weitreichende Folgerung des Dichtekonzeptes:

Bemerkung und Definition 1.4.6

a) Für jede Dimension n gibt es eine Konstante C_n so, dass

$$\min L \leq C_n (\det L)^{\frac{1}{n}} \tag{1.4.2}$$

für alle Gitter L mit $\dim L = n$ gilt. Die kleinste solche Konstante heißt auch *Hermite-Konstante* γ_n in der Dimension n.

b) Die *Hermite-Zahl* eines Gitters L der Dimension n ist definiert als

$$\gamma(L) := \frac{\min L}{(\det L)^{1/n}}. \tag{1.4.3}$$

Die Hermite-Konstante γ_n ist also das Supremum (in der Tat: Maximum) der Hermite-Zahlen $\gamma(L)$, wobei L alle Gitter der Dimension n durchläuft.

Beweis: Da die Dichte einer Packung definitionsgemäß ≤ 1 ist, folgt aus Satz 1.4.5 unmittelbar durch Umstellen die Ungleichung

$$\min L \leq \frac{4}{\omega^{2/n}} (\det L)^{1/n} \tag{1.4.4}$$

für jedes Gitter L, und weiter die Abschätzung

$$\gamma_n \leq \frac{4}{\omega^{2/n}} \qquad \textbf{(Minkowski)} \tag{1.4.5}$$

für die Hermite-Konstante in Dimension n. □

Wir haben diese Abschätzung Minkowski zugeschrieben, weil sie (ohne explizite Benutzung des Konzeptes der Dichte, aber mit der gleichen Grundidee) auch aus dem später zu behandelnden Minkowski'schen Gitterpunktsatz folgt. Sobald man eine Abschätzung für die in Dimension n maximal erreichbare Packungsdichte hat, resultiert hieraus eine entsprechende Verbesserung der eben gegebenen Abschätzung für die Hermite-Konstante γ_n. Die folgende klassiche Abschätzung von Hermite[4] wird auf mehr algebraische Weise unabhängig von Dichten bewiesen. Sie ist nur für $n \leq 8$ besser als die Minkowski-Schranke, hat allerdings den Vorteil, dass sie auch für indefinite Formen gilt.

Satz 1.4.7 (Hermite) *Für das Minimum eines Gitters L vom Rang n in einem euklidischen Vektorraum gilt die Abschätzung*

$$\min L \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \det L^{1/n} \, .$$

Der Beweis wird durch Induktion nach der Dimension geführt und beruht auf folgendem allgemeinen Hilfssatz.

Lemma 1.4.8 Es sei L ein Gitter vom Rang n in einem euklidischen Vektorraum V, $v \in L \smallsetminus \{0\}$ ein primitiver Vektor und pr die orthogonale Projektion auf $V' := v^{\perp}$. Dann ist $L' := \mathrm{pr}(L)$ ein Gitter in V' und $\det L = \langle v, v\rangle \det L'$.

[4] Charles Hermite, 1822-1901

Beweisskizze: Ergänze $v_1 := v$ zu einer Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von L. Dann wird einerseits L' offensichtlich von $\operatorname{pr} v_2, \ldots, \operatorname{pr} v_n$ erzeugt, andererseits bilden diese Vektoren eine Basis von V'. Somit ist L' ein Gitter auf V'. Wenn wir mit G' die Gram-Matrix von $\operatorname{pr} v_2, \ldots, \operatorname{pr} v_n$ bezeichnen, so ist nun das Ziel, die Gram-Matrix G der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf eine Blockgestalt

$$\begin{pmatrix} \langle v, v\rangle & 0 \\ 0 & G' \end{pmatrix}$$

zu bringen, woraus sich dann die Behauptung unmittelbar ergibt. Hierzu benutzt man die explizite Beschreibung der orthogonalen Projektion:

$$\operatorname{pr} x = x - \frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v.$$

Die Details über lassen wir als Übungsaufgabe. □

Beweis von 1.4.7 durch Induktion nach n. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar. Für $n > 1$ wähle ein $v \in \operatorname{Min} L$. Sei $x' \in L'$ zunächst beliebig und $x \in L$ ein Urbild bezüglich der Projektion pr. D.h. es ist $x - x' \in \mathbb{R}v$. Wir können x um ein ganzzahliges Vielfaches von v so abändern, daß immer noch $x \in L$ und $x = x' + tv$ mit $|t| \le \frac{1}{2}$ ist. Wähle nun speziell $x' \in \operatorname{Min} L'$. Schreibe kurz $m := \min L,\ m' := \min L'$. Dann ist

$$\langle x, x\rangle = \langle x', x'\rangle + t^2 \cdot \langle v, v\rangle\,,$$

also

$$m \le \langle x, x\rangle \le m' + \frac{1}{4} m\,,$$

also $m \le \frac{4}{3} m'$. Aus der Induktionsannahme

$$m' \le \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}} (\det L')^{\frac{1}{n-1}}$$

und dem Lemma 1.4.8 folgt

$$m \le \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\det L}{m}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Wenn man die $(n-1)$-erste Potenz bildet und anschließend noch mit m erweitert, erhält man

$$m^n \le \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det L,$$

schließlich

$$m \le \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} (\det L)^{\frac{1}{n}}.$$

□

Die folgende Tabelle enthält die wichtigsten Daten der „besten" Gitter bis zur Dimension 8. Es handelt sich um die Gitter mit der beweisbar größten Packungsdichte (für Gitter, nicht unbedingt für beliebige Kugelpackungen) in der jeweiligen Dimension. Die Gitter E_8, E_7 und E_6 werden im folgenden Unterkapitel 1.6 eingeführt.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
L	A_1	A_2	A_3	D_4	D_5	E_6	E_7	E_8
$\min L$	2	2	2	2	2	2	2	2
$\det L$	2	3	4	4	4	3	2	1
$\gamma(L)$	1	$\sqrt{4/3}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[4]{4}$	$\sqrt[5]{8}$	$\sqrt[6]{64/3}$	$\sqrt[7]{64}$	2
$\gamma(L)$	1	1.155	1.260	1.414	1.516	1.665	1.811	2
$\delta(L)$	$1/2$	$1/2\sqrt{3}$	$1/4\sqrt{2}$	$1/8$	$1/8\sqrt{2}$	$1/8\sqrt{3}$	$1/16$	$1/16$
$\delta(L)$	.5	.289	.177	.125	.088	.072	.0625	.0625
$\Delta(L)$	1	.907	.740	.617	.465	.373	.295	.254

Tabelle 1.4.1: Die dichtesten Gitter bis zur Dimension 8:
Hermite-Zahlen, Zentrumsdichten und Dichten

Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.4

Aufgabe 1.4.1

a) Man gebe eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ an, die diskret, aber nicht abgeschlossen ist.

b) Man gebe eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ an, die diskret und abgeschlossen, aber nicht gleichmäßig diskret ist.

Aufgabe 1.4.2

Wie viele Tischtennisbälle passen (gut durchgerüttelt) in einen großen würfelförmigen Container der Kantenlänge 1 m?

Aufgabe 1.4.3

Man führe den Beweis von Lemma 1.4.8 im Detail aus.

Aufgabe 1.4.4

Das kartesische Produkt bzw. die direkte Summe zweier euklidischer Vektorräume (V_1, b_1) und (V_2, b_2) ist mit dem natürlichen Skalarprodukt $b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := b_1(x_1, y_1) + b_2(x_2, y_2),\ x_i, y_i \in V_i$ ein euklidischer Vektoraum; in diesem Sinne ist das kartesische Produkt $L_1 \times L_2$ von zwei Gittern der Dimensionen n_1 und n_2 ein Gitter der Dimension $n = n_1 + n_2$.

a) Was ist $\det(L_1 \times L_2)$?

b) Wie sieht die Isometriegruppe des dreidimensionalen Gitters $A_2 \times A_1$ aus (Ordnung und Struktur)?

c) Warum könnte man das Gitter $A_2 \times A_1$ als das „hexagonal-zylindrische" Gitter bezeichnen?

Aufgabe 1.4.5 „*Direkte Produkte sind geometrisch suboptimal*"

a) Um wie viel Prozent ist die Packungsdichte Δ von A_3 größer als die von $A_2 \times A_1$?

b) In der Situation von Aufgabe 1.4.3 sei zusätzlich $\min L_1 = \min L_2$. Wie bestimmt man $\Delta(L_1 \times L_2)$ aus den beiden einzelnen Dichten $\Delta(L_1)$ und $\Delta(L_2)$?

c) Man vergleiche die Dichte des besten 6-dimensionalen Gitters E_6 mit der größtmöglichen Dichte eines als Produkt zerlegbaren 6-dimensionalen Gitters.

Aufgabe 1.4.6
Für ungerades n ist D_n^+, wie es in Definition 1.3.4 definiert wurde, ein Obergitter von I_n, hat also das Minimum 1. Deswegen modifizieren wir die Definition zu $D_n^+ := D_n \,\dot\cup\, (\mathbf{u} + D_n)$, dabei $\mathbf{u}$ wie früher.

a) Zeige, dass für $n \geq 9$ die Punktmenge D_n^+ den Minimalabstand $\sqrt{2}$ hat.

b) Berechne alle Daten aus Tabelle 1.4.1 für D_9^+ und D_{10}^+.

c) Ergänze Tabelle 1.4.1 um die oberen Abschätzungen für γ_n nach Minkowski und nach Hermite.

Aufgabe 1.4.7 „*Wie viel Überlappung hat eine optimale lückenlose Pflasterung mit runden Kacheln?*":
Bestimme die Überdeckungsdichte $\vartheta(A_2)$ des hexagonalen Gitters.

Anmerkungen und Literaturhinweise

Der beste Überblick über Kugelpackungen ist vermutlich immer noch Kapitel 1 *Sphere Packings and Kissing Numbers* von Conway und Sloane aus ihrem bekannten Buch SpLaG. Dort viele weitere Zeichnungen, Diagramme und Tabellen.

Sehr klar, kompakt und flüssig geschrieben ist auch Chapter II, §7, *The Packing of Equal Balls in* $\mathbf{R}^n$ aus dem Klassiker

> John Milnor, Dale Husemoller: *Symmetric Bilinear Forms*, Springer-Verlag 1973.

Dort wird auch die (oben nur angedeutete) Tatsache bewiesen, dass dichteste Gitter tatsächlich exitieren (d.h. das Supremum der Hermite-Zahlen wird angenommen). Diese Tatsache ergibt sich im weiteren Verlauf unserer Vorlesung aus der Reduktionstheorie. Der Beweis von Milnor und Husemoller ist nicht wirklich anders.

Ab Dimension sind die dichtesten Gitter bzw. periodischen Packungen (vergleiche Aufgabe 1.4.6) nicht mehr (beweisbar) bekannt. Die besten Kandidaten bis zur Dimension 24 werden wir nach und nach in dieser Vorlesung kennenlernen. in den nächsten Dimensionen 9 und 10 benötigen wir die sog. *geschichteten Gitter* bzw. *Laminated Lattices.*