3.4 Der Raum der reduzierten quadratischen Formen

Wenn man die in den vorangegangenen Abschnitten entwickelte Theorie der reduzierten Basen für die Klassifikation von Gittern oder das Kugelpackungsproblem nutzen möchte, ist es nützlich, das entsprechende Konzept auch für positiv definite symmetrische Matrizen (die Gram-Matrizen der Gitter) zur Verfügung zu haben. Hierzu dient die folgende Definition. (Wir bezeichnen die symmetrische Matrix wieder als „quadratische Form", um ihren wesentlichen Aspekt zu betonen.)

Definition und Bemerkung 3.4.1 Eine positiv definite quadratische Form $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *reduziert* (im Sinne von Minkowski), falls $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ eine reduzierte Basis von $\mathbb{Z}^n$ bezüglich der von F induzierten euklidischen Norm ist: Für jedes $k = 1, \ldots, n$ gilt

$$(\mathrm{MR}_k) \qquad f_{kk} \le F[\mathbf{s}] \text{ für alle } \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^n \text{ mit } \operatorname{ggT}(s_k, s_{k+1}, \ldots, s_n) = 1\,.$$

Jede quadratische Form ist äquivalent zu einer reduzierten quadratischen Form.

Die genanne Bedingung an den ggT drückt tatsächlich genau die Tatsache aus, dass $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{s}$ sich zu einer Basis von $\mathbb{Z}^n$ ergänzen lassen. Mit MR_k bezeichnen wir wie angegeben die Gesamtheit der Bedingungen an f_{kk}, während $\mathrm{MR}_k(\mathbf{s})$ die zu einem bestimmtem $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^n$ gehörige Bedingung „$f_{kk} \le F[\mathbf{s}]$" bezeichnet. Wegen $F[\mathbf{s}] = \sum f_{ij}s_is_j$ hat diese Bedingung die Gestalt einer linearen Ungleichung an die Koeffizienten der Matrix F. Wir notieren zunächst einige dieser Ungleichungen explizit:

Proposition 3.4.2 *Sei $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reduzierte positiv definite quadratische Form. Dann gilt:*

a) $0 < f_{11} \le f_{22} \le \ldots \le f_{nn}$

b) $|f_{ij}| \le \frac{1}{2} f_{ii}$ *für* $i < j$

c) $\varepsilon f_{ij} + \delta f_{ik} - \varepsilon\delta f_{ik} \le \frac{1}{2}(f_{ii} + f_{jj})$ *für* $i < j < k$ *und* $\varepsilon, \delta = \pm 1$.

Beweis:

a) Für i, j mit $i < j$ benutzen wir die Reduktionsbedingung $\mathrm{MR}_k(\mathbf{s})$ mit $k := i$ und $\mathbf{s} := \mathbf{e}_j$. Es ergibt sich $f_{ii} \le f_{jj}$.

b) Betrachte die Reduktionsbedingung $\mathrm{MR}_k(\mathbf{s})$ für $k := j$ und $\mathbf{s} = \pm\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j$. Es folgt $f_{jj} \le F[\mathbf{s}] = f_{ii} + f_{jj} \pm 2f_{ij}$, also $2|f_{ij}| \le f_{ii}$.

c) Nimm $\mathbf{s} := \mathbf{e}_i - \varepsilon\mathbf{e}_j - \delta\mathbf{e}_k$. □

Hauptziel der folgenden Diskussion[7] ist die Beschreibung der „geometrischen Gestalt" der Teilmenge der reduzierten quadratischen Formen im Vektorraum aller quadratischen Formen. Es wird sich ein konvexer Kegel mit endlich vielen „Erzeugern" ergeben.

Zunächst einige Bezeichnungen:

$$\mathcal{S} := \{F \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid F = F^t\}$$

sei der Vektorraum aller reellen symmetrischen $n \times n$-Matrizen (quadratischen Formen); $\mathcal{S}$ hat die Dimension $n(n+1)/2$. Wir setzen weiter

$$\mathcal{S}_{>0} = \{F \in \mathcal{S} \mid F \text{ positiv definit}\}\,.$$

Das ist selbstverständlich kein Vektorraum, jedoch überzeugt man sich leicht davon, dass $\mathcal{S}_{>0}$ *konvex* ist. Denn wenn $F, G \in \mathcal{S}_{>0}$ sind und $0 \le t \le 1$, $F_t := (1-t)F + tG$, ferner $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, so ist $F_t[\mathbf{x}] = (1-t)F[\mathbf{x}] + tG[\mathbf{x}] > 0$; also ist auch F_t wieder positiv definit. Die Menge $\mathcal{S}_{>0}$ ist sogar ein konvexer Kegel. Dabei ist ein *Kegel* (mit Spitze im Nullpunkt) eine Teilmenge C eines Vektorraumes derart, dass $\lambda\mathbf{x} \in C$ für alle $\mathbf{x} \in C$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Ein Kegel besteht also aus von einem festen Punkt (hier: von Null) ausgehenden Strahlen (Halbgeraden). Unter einem *konvexen Kegel* verstehen wir einfach eine Teilmenge C eines reellen Vektorraumes, die gleichzeitig konvex und ein Kegel ist. Ein konvexer Kegel ist durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet:

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C,\;\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\ge 0} \Longrightarrow \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in C \cup \{0\}\,. \tag{3.4.1}$$

Die größere Teilmenge

$$\mathcal{S}_{\ge 0} := \{F \in \mathcal{S} \mid F \text{ positiv semidefinit}\}$$

ist mit völlig analoger Begründung ebenfalls ein konvexer Kegel.

Die Menge $\mathcal{S}_{>0}$ ist offen in $\mathcal{S}$, denn sie ist nach dem Hurwitz-Kriterium dadurch gekennzeichnet, dass n stetige Funktionen, nämlich die Determinanten der Hauptminoren einer Matrix $F \in \mathcal{S}$, echt größer als Null sind. Mit ähnlicher Begründung ist $\mathcal{S}_{\ge 0}$ abgeschlossen: eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv semi-definit, wenn alle Determinanten von Hauptminoren ≥ 0 sind. Es ist sogar $\mathcal{S}_{\ge 0}$ der Abschluss von $\mathcal{S}_{>0}$. Es sei schließlich

$$\mathcal{R}_{>0} := \{F \in \mathcal{S}_{>0} \mid F \text{ reduziert}\}$$

die Menge der reduzierten, positiv definiten Formen. Ein Element F aus $\mathcal{S}$ liegt definitionsgemäß in $\mathcal{R}$, wenn es sämtliche Reduktionsbedingungen $\mathrm{MR}_k(\mathbf{s})$ erfüllt.

[7] Wir orientieren uns weiterhin an der Darstellung von B.L. van der Waerden in *Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen*, Acta Mathematica, Vol. 96 (1956).

Wir schreiben das etwas anders, indem wir für jedes Paar $(k, \mathbf{s})$ (natürlich mit $\mathrm{ggT}(s_k, \ldots, s_n) = 1$ und $\mathbf{s} \neq \mathbf{e}_k$) die Linearform

$$b_{k,\mathbf{s}} : \mathcal{S} \to \mathbb{R},\ b_{k,\mathbf{s}}(F) = F[\mathbf{s}] - f_{kk} \tag{3.4.2}$$

betrachten. Eine einzelne Reduktionsbedingung schreibt sich dann als

$$\mathrm{MR}_k(\mathbf{s}) : \quad b_{k,\mathbf{s}}(F) \geq 0\,, \text{ dabei } \mathrm{ggT}(s_k, \ldots, s_n) = 1,\ \mathbf{s} \neq \pm\mathbf{e}_k. \tag{3.4.3}$$

Die Teilmenge von $\mathcal{S}$ derjenigen F, die eine einzelne Reduktionsbedingung erfüllen, ist also ein Halbraum. Somit ist die Menge $\mathcal{R}_{>0}$ der reduzierten Formen ein Durchschnitt von Halbräumen, geschnitten mit $\mathcal{S}_{>0}$. Insbesondere ist $\mathcal{R}_{>0}$ konvex.

Lokal-endliche Hyperebenen-Systeme. Wir abstrahieren von der eben beschriebene Situation und beweisen ein wichtiges Resulat (Proposition 3.4.6 unten) in allgemeiner Form. Es seien

$\mathcal{S}$	ein $\mathbb{R}$-Vektorraum
$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$	eine offene, konvexe Teilmenge
$B \subset \mathcal{S}^* \smallsetminus \{0\}$	eine Menge von Linearformen.

Setze für $b \in B$

$H_b = \{F \in \mathcal{S} \mid b(F) = 0\}$	eine Hyperebene
$H_b^{>0} = \{F \in \mathcal{S} \mid b(F) > 0\}$	ein offener Halbraum
$H_b^{\geq 0} = \{F \in \mathcal{S} \mid b(F) \geq 0\}$	ein abgeschlossener Halbraum
$\mathcal{R}_B := \mathcal{R} := \bigcap_{b \in B} H_b^{\geq 0}$	ein abgeschlossener konvexer Kegel.

Definition 3.4.3 Das Hyperebenen-System $\{H_b \mid b \in B\}$, bzw. die Linearformenmenge B heißt *lokal-endlich für $\mathcal{C}$,* falls für jede kompakte Menge $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ gilt

$$\mathcal{K} \cap H_b \neq \emptyset \text{ für nur endlich viele } b \in B\,.$$

Ein Durchschnitt über die Halbräume eines lokal-endliches Hyperebenen-System verhält sich in einer beschränkte Menge wie ein endlicher Durchschnitt. Dieses erscheint jedenfalls plausibel und wird im folgenden Lemma präzisiert:

Lemma 3.4.4 Es seien $\mathcal{S}, \mathcal{C}$ und B wie oben, B sei lokal-endlich für $\mathcal{C}$. Dann ist die Menge $\mathcal{R}' := \bigcap_{b \in B} H_b^{>0} \cap \mathcal{C}$ offen.

Definition 3.4.5 Es seien $\mathcal{S}, \mathcal{C}$, B wie oben. Ein $b \in B$ heißt *wesentlich,* falls ein $F \in \mathcal{R} \cap \mathcal{C}$ existiert mit $b(F) = 0$.

Der nächste Satz sagt, dass unter relativ harmlosen Voraussetzungen die wesentlichen unter den Bedingungen „$b(F) \geq 0$", $b \in B$ bereits ausreichen, um die Mitgliedschaft in $\mathcal{R}_B \cap \mathcal{C}$ zu garantieren.

Proposition 3.4.6 *Es seien $\mathcal{S}, \mathcal{C}, B, \mathcal{R} = \mathcal{R}_B, \mathcal{R}'$ wie bisher, $B_{\mathrm{ess}} \subseteq B$ die Teilmenge der wesentlichen Bedingungen. Es sei B lokal-endlich in $\mathcal{C}$ und $\mathcal{R}' \neq \emptyset$. Dann gilt*

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{C} = \bigcap_{b \in B_{\mathrm{ess}}} H_b^{\geq 0} \cap \mathcal{C}\,.$$

Der Fall der symmetrischen Matrizen. Nun sei wieder $\mathcal{S}$ der Vektorraum der symmetrischen Matrizen, bzw. quadratischen Formen, $\mathcal{C} = \mathcal{S}_{>0}$ die Teilmenge der positiv definiten Matrizen und $B = \{b_{k,\mathbf{s}}\}$ die Menge der Reduktionsbedingungen, genauer der zugehörigen Linearformen auf $\mathcal{S}$. Nach Definition ist dann $\mathcal{R} \cap \mathcal{C} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}_{>0}$ die Menge $\mathcal{R}_{>0}$ der positiv definiten reduzierten quadratischen Formen.

Lemma 3.4.7 Es sei $\mathcal{S}_{>0}$ der Kegel der positiv definiten quadratischen Formen,

$$B = \{b_{k,\mathbf{s}} \mid k = 1, \ldots, n,\ \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^n,\ \mathrm{ggT}(s_k, \ldots, s_n) = 1,\ \mathbf{s} \neq \pm\mathbf{e}_k\}$$

die Menge der Reduktionsbedingungen (genauer: der zugehörigen Linearformen). Dann ist B lokal-endlich für $\mathcal{S}_{>0}$.

Nach dem letzten Lemma erfüllen die Reduktionsbedingungen die Voraussetzungen von Lemma 3.4.4. Die Voraussetzung $\mathcal{R}' \neq \emptyset$ ist ebenfalls erfüllt: z.B. liegt jede Diagonalmatrix mit strikt steigenden Diagonalelementen $f_{11} < f_{22} < \ldots < f_{nn}$ in $\mathcal{R}'$. Somit ist Proposition 3.4.6 anwendbar, was bereits den zweiten Teil des folgenden Hauptsatzes dieses Kapitels beweist.

Theorem 3.4.8 (Minkowski) *In jeder festen Dimension gibt es nur endlich viele wesentliche Reduktionsbedingungen für positiv definite quadratische Formen. Eine quadratische Form ist reduziert, wenn sie die wesentlichen Bedingungen erfüllt.*